## Rappel des étapes détaillées de la preuve de Morley algébrique par Alain Connes

DVC, octobre 2024.

**Théorème** : *Les 2 conditions* :

1) $f^3g^3h^3 = 1$.

2) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ avec $\mathrm{fix}(fg) = \alpha$ et $\mathrm{fix}(gh) = \beta$ et $\mathrm{fix}(hf) = \gamma$.

*sont équivalentes.*

La démonstration du théorème de Morley sera un corollaire de la démonstration du théorème ci-dessus, qui se tient dans le groupe affine d'un corps $K$. On travaille en fait dans $G$ le groupe affine de la droite, qu'on représente par des matrices $2\times 2$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les points de l'espace affine sont des vecteurs colonne de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Rappel* : on peut composer deux applications affines en multipliant leur matrice associée. Par exemple, correspondant à :

$$3 \xmapsto{3x+2} 11 \xmapsto{5x+1} 56$$

on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Attention* : il ne faut pas se tromper de sens pour la composition :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour rappel, le point fixe d'une application affine $g$ définie par $g(x) = ax + b$ est le point $x \in K$ avec $ax + b = x$, qu'on note $\mathrm{fix}(g) = \dfrac{b}{1-a}$.

On définit le morphisme $\delta$ du groupe affine de la droite vers le groupe multiplicatif $(K^*, \times)$ des éléments non nuls de $K$. $\delta$ associe à une application affine son coefficient multiplicateur $a \in K^*$. Le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$, i.e. l'ensemble des éléments qui sont envoyés sur l'unité de $K^*$, est le sous-groupe de $G$ des translations, qui est aussi le groupe additif $(K, +)$, c'est-à-dire l'ensemble des transformations telles que $a = 1$.

*Démonstration du théorème* :

1) $\implies$ 2).

Notons que par hypothèse, on aura $j \neq 1$ ainsi que $ak - j \neq 0$ (les produits de 2 applications ne sont pas des translations).

$$
\begin{aligned}
f &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
f^3 &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1b_1 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 + a_1b_1 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^3 & b_1(1 + a_1 + a_1^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
f^3g^3h^3 &= \begin{pmatrix} a_1^3 & b_1(1 + a_1 + a_1^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^3 & b_2(1 + a_2 + a_2^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3^3 & b_3(1 + a_3 + a_3^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^3a_2^3 & a_1^3b_2(1 + a_2 + a_2^3) + b_1(1 + a_1 + a_1^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3^3 & b_3(1 + a_3 + a_3^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^3a_2^3a_3^3 & a_1^3a_2^3b_3(1 + a_3 + a_3^2) + a_1^3b_2(1 + a_2 + a_2^2) + b_1(1 + a_1 + a_1^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On réécrit la condition $f^3g^3h^3 = 1$ en

$$
\begin{pmatrix} a_1^3a_2^3a_3^3 & a_1^3a_2^3b_3(1 + a_3 + a_3^2) + a_1^3b_2(1 + a_2 + a_2^2) + b_1(1 + a_1 + a_1^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

condition qui devient

$$
\begin{cases} a_1^3a_2^3a_3^3 = 1 \text{ et} \\ \\ b = a_1^3a_2^3b_3 + a_1^3a_2^3b_3a_3 + a_1^3a_2^3b_3a_3^3 + a_1^3b_2 + a_1^3b_2a_2 + a_1^3b_2a_2^2 + b_1 + b_1a_1 + b_1a_1^2 \end{cases}
$$

Là, il est noté “*A straightforward computation, using* $a_1a_2a_3 = j$ *gives*”.

En utilisant $j = a_1a_2a_3$, on obtient [1] :

$$
b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma)
$$

où $\alpha = \dfrac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}$, $\beta = \dfrac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}$ et $\gamma = \dfrac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}$, qui sont les points fixes des applications $fg$, $gh$ et $hf$.

[1] et il reste à trouver le calcul évident.

Recherchons par exemple le point fixe de $fg$.

$$fg = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De cette égalité, on a :

$$fg(x) = x \iff \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui donne $x = \dfrac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}$.

*Exercice subsidiaire* :

Comment faire pour transformer le quadrilatère quelconque en un carré et le pentagone quelconque en un pentagone régulier ?

On imagine que pour le carré, il faut utiliser la relation

$$a + ib - c - id = 0$$

caractéristique de tout carré dont les sommets ont pour affixes $a$, $b$, $c$ et $d$ et le produit de puissances quatrièmes $m^4n^4o^4p^4$.

Pour le pentagone, la relation à utiliser est

$$a + \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) b + \exp\left(\frac{4i\pi}{5}\right) c + \exp\left(\frac{6i\pi}{5}\right) d + \exp\left(\frac{8i\pi}{5}\right) e$$

vérifiée par tout pentagone régulier $abcde$, les puissances cinquièmes et les expressions de la forme $1+x+x^2+x^3+x^4$.