Une formule récurrente pour l'indicateur d'Euler trouvée sur la toile (6.11.2016)

Dans la séquence $A000010$ de l'On-line Encyclopedia Integer Sequences de N. J. A. Sloane (https://oeis.org/A000010), on trouve, fournie par Jon Perry le 2.3.4 la formule récurrente suivante pour l'indicateur d'Euler :

$$\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Effectivement, pour 28 (avec $\frac{1}{2}.28.29 = 406$) par exemple, on a les valeurs suivantes :

i	$\varphi(i)$	$\lfloor \frac{28}{i} \rfloor$	$\varphi(i) \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$
1	1	28	28
2	1	14	14
3	2	9	18
4	2	7	14
5	4	5	20
6	2	4	8
7	6	4	24
8	4	3	12
9	6	3	18
10	4	2	8
11	10	2	20
12	4	2	8
13	12	2	24
14	6	2	12
15	8	1	8
16	8	1	8
17	16	1	16
18	6	1	6
19	18	1	18
20	8	1	8
21	12	1	12
22	10	1	10
23	22	1	22
24	8	1	8
25	20	1	20
26	12	1	12
27	18	1	18
			$somme = 394$
28	12		

$406 - 394 = 12$ qui est bien la valeur de $\varphi(28)$.

Puisque $\varphi(p) = p - 1$ si p est premier, on doit avoir pour les nombres premiers

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$