Conjecture de Goldbach : 16 règles de réécriture si bizarres

Denise Vella-Chemla

19/3/14

1 Des règles de réécriture si bizarres

On rappelle qu'on a choisi de représenter le fait qu'un entier est premier par le booléen 0 et le fait qu'il est composé par le booléen 1.

On a également pris comme conventions ($p \leqslant n/2$) :

- que la lettre a symbolise une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers ;
- que la lettre b symbolise une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier ;
- que la lettre c symbolise une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé ;
- que la lettre d symbolise une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés ;

La lettre a code la matrice $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, et respectivement b $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, c $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et enfin d $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Exemples : Ci-dessous le mot $m_{abcd}(40)$.

40	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$m_{abcd}(40)$	a	c	c	b	a	c	d	a	c

Dans la suite, on utilise l'opération définie sur les matrices :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_2\end{pmatrix}$$

L'opération de multiplication des matrices fournit 16 règles de réécriture de couples de lettres, qui semblent pertinentes pour l'étude de la conjecture de Goldbach :

1) $aa \to a$	5) $ba \to a$	9) $ca \to c$	13) $da \to c$
2) $ab \to b$	6) $bb \to b$	10) $cb \to d$	14) $db \to d$
3) $ac \to a$	7) $bc \to a$	11) $cc \to c$	15) $dc \to c$
4) $ad \to b$	8) $bd \to b$	12) $cd \to d$	16) $dd \to d$

Observons les règles 1 à 4 : elle consistent à appliquer une sorte d'opérateur a à gauche.

Réécrivons ces règles en terme d'opérations dans l'algèbre de Boole :

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Les règles 1 à 4, appliquées à deux doublons $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ fournissent le doublon $\begin{pmatrix}x_1\wedge x_2\\y_1\vee y_2\end{pmatrix}$.
Les règles 5 à 8 (opérateur b “appliqué à gauche”) deviennent dans l'algèbre de Boole :

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Les règles 5 à 8, appliquées à deux doublons $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ fournissent le doublon $\begin{pmatrix}x_1\wedge x_2\\y_1\wedge y_2\end{pmatrix}$.
Les règles 9 à 12 (opérateur c “appliqué à gauche”) deviennent dans l'algèbre de Boole :

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Les règles 9 à 12 règle, appliquée à deux doublons $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ fournissent le doublon $\begin{pmatrix}x_1\vee x_2\\y_1\vee y_2\end{pmatrix}$.

Enfin, les règles 13 à 16 (opérateur d "appliqué à gauche") deviennent dans l'algèbre de Boole :

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Les règles 13 à 16, appliquées à deux doublons $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ fournissent le doublon $\begin{pmatrix}x_1 \vee x_2\\y_1 \wedge y_2\end{pmatrix}$.

Si l'on regarde maintenant ensemble les règles en considérant les opérateurs à droite plutôt qu'à gauche, en mettant ensemble les règles 1, 5, 9 et 13, (resp. 2, 6, 10 et 14 ensemble, 3, 7, 11 et 15 ensemble et enfin, 4, 8, 12, et 16 ensemble), on constate les choses suivantes, comme attendu totalement "symétriques" de ce qu'on a obtenu à gauche :

- le a appliqué à droite d'un doublon $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ permet d'obtenir $\begin{pmatrix}x_1 \vee 0\\x_2 \wedge 0\end{pmatrix}$;
- le b appliqué à droite d'un doublon $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ permet d'obtenir $\begin{pmatrix}x_1 \vee 1\\x_2 \vee 0\end{pmatrix}$;
- le c appliqué à droite d'un doublon $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ permet d'obtenir $\begin{pmatrix}x_1 \wedge 0\\x_2 \wedge 1\end{pmatrix}$;
- le d appliqué à droite d'un doublon $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ permet d'obtenir $\begin{pmatrix}x_1 \wedge 1\\x_2 \vee 1\end{pmatrix}$.

Les règles sont complètement décourageantes, on imagine mal ce que peut donner l'application simultanée de plusieurs d'entre elles à un même mot, sans avoir aucune connaissance du nombre d'applications de chacune. On désespère de jamais comprendre pourquoi *"tout mot contient un a"*.

En outre, et cela est vraisemblablement complètement rédhibitoire, on n'arrive toujours pas à lever l'indéterminisme patent qui porte sur la première lettre des mots utilisés ; or, c'est cet indéterminisme qui "engendre tout le reste".

Note : cet indéterminisme provient du fait qu'on a "borné" la droite des entiers à gauche en commençant nos mots à partir de la lettre correspondant à la décomposition $3 + (n - 3)$ mais si l'on regarde les mots comme infinis des deux côtés, en étudiant non pas un processus dynamique permettant de passer du mot de n au mot de $n + 2$, mais en ayant une connaissance totale de tous les nombres simultanément, alors ce problème d'indéterminisme sur la première lettre disparaît en quelque sorte.