

1. Avant-propos

Ce document rend compte, étape par étape, de ce qui a effectivement été fait pour approfondir le § 5 de la synthèse du 21 juin 2026 (le programme de travail sur la piste des graphes triangulaires et de l'excentricité).

2. Étape 5.2 exécutée : extension numérique à 5 millions

Le programme proposait d'étendre la vérification numérique de l'existence d'au moins un décomposant de Goldbach, au-delà des quelques centaines de valeurs déjà testées dans les notes. Je l'ai fait, par une méthode efficace (auto-corrélation via transformée de Fourier rapide de l'indicatrice des nombres premiers impairs), qui donne en un seul calcul le nombre de décompositions pour *tous* les n pairs simultanément.

Portée de la vérification	jusqu'à $n = 5\,000\,000$
Nombre de valeurs paires testées	2 499 998
Valeurs de n sans aucune décomposition trouvée	aucune

C'est une confirmation purement numérique (elle n'apporte aucun argument théorique nouveau, le programme le dit lui-même), mais elle étend de plusieurs ordres de grandeur la portée déjà vérifiée dans vos notes, exactement comme suggéré. À titre indicatif, quelques valeurs du nombre de représentations (paires non ordonnées de premiers impairs) :

$$n = 8 : 1, \quad n = 16 : 2, \quad n = 98 : 3, \quad n = 1000 : 28, \quad n = 10\,000 : 127.$$

3. Étape 5.1 exécutée : test de robustesse sur une suite générique

C'est le test le plus instructif du programme, et celui qui apporte une vraie réponse (négative, mais informative) à la question posée dans les notes : *la propriété d'existence d'un centre persiste-t-elle pour une suite générique de même densité, ou est-elle spécifique aux nombres premiers ?*

3.1. Protocole

J'ai remplacé l'ensemble des nombres premiers par un **modèle aléatoire de Cramér** : chaque entier impair m est retenu indépendamment avec probabilité $1/\ln m$ (c'est le modèle probabiliste standard qui imite la densité des nombres premiers, $\pi(x) \sim x/\ln x$, sans utiliser aucune propriété arithmétique réelle). Pour chaque tirage aléatoire, j'ai vérifié, pour tout n pair jusqu'à 200 000, si l'ensemble aléatoire obtenu possède au moins une paire (p, q) , $p + q = n$, p, q dans l'ensemble tiré - l'analogue exact de l'existence d'un centre d'excentricité n . J'ai répété l'expérience sur 30 tirages indépendants.

3.2. Résultat

Intervalle de n	# échecs moyen / tirage	taux d'échec empirique
[6, 1 000)	17,6 (sur 497)	3,5 %
[1 000, 10 000)	0	0 %
[10 000, 50 000)	0	0 %
[50 000, 200 000)	0	0 %

Sur plus de trois millions de couples (valeur de n , tirage), tous les échecs se concentrent dans les toutes petites valeurs de n (là où la densité $1/\ln n$ est trop faible pour garantir statistiquement une rencontre) ; au-delà de $n = 1\,000$, l'échec n'a **jamais** été observé.

3.3. Interprétation, et ce qu'elle signifie pour la piste graphe/excentricité

Fait : La propriété “il existe un centre” n'est donc *pas* une signature arithmétique fine des nombres premiers : elle est vraie, avec une probabilité tendant vers 1, pour **tout** ensemble aléatoire de densité $\sim 1/\ln x$ - c'est exactement ce que prédit l'heuristique classique (le nombre attendu de représentations croît comme $n/(\ln n)^2 \rightarrow \infty$, et une estimation de variance suffit à montrer que la probabilité d'un échec tend vers 0).

C'est la réponse que le programme lui-même anticipait comme la plus probable, et elle a une conséquence précise pour la suite : **le verrou de l'étape 1 (formuler l'existence d'un centre comme un problème de cycle critique min-plus) ne peut pas, à lui seul, capturer une difficulté spécifiquement arithmétique**, puisque la propriété qu'il chercherait à établir est déjà vraie, et démontrable élémentairement (par un argument de premier/second moment), pour n'importe quelle suite générique de même densité. Autrement dit : le cadre graphe triangulaire / excentricité reformule fidèlement la conjecture, mais il ne fournit, en l'état, aucun levier supplémentaire par rapport à ce que l'on sait déjà faire avec les méthodes probabilistes classiques (méthode du cercle, petit crible) - ce qui rejoint très exactement l'obstruction de parité déjà identifiée dans la synthèse du 21 juin, sous un habit différent.

4. Conclusion

- L'étape 5.2 est exécutée : aucune exception jusqu'à 5 millions.
- L'étape 5.1 est exécutée et donne une réponse claire : la propriété est générique pour tout ensemble de densité $1/\ln x$, ce qui signifie que la reformulation min-plus, aussi élégante soit-elle, ne contourne pas l'obstruction de parité - elle la reformule, une fois de plus, dans un langage différent.

Cela rejoint votre propre scepticisme exprimé en ouverture de cette séance : cette piste, sur le fond, ne semble pas receler de levier nouveau contre l'obstruction de parité. Le travail effectué ici permet au moins de le dire avec un chiffre à l'appui plutôt que sur la seule intuition.