On a une première équation polynomiale qui a pour racines les nombres premiers impairs inférieurs à n. On remplace x par $n-x$ dans cette équation pour obtenir une nouvelle équation polynomiale qui a pour racines les complémentaires des nombres premiers impairs inférieurs à n. Lorsque les racines de la deuxième équation polynomiale sont des nombres premiers impairs, ce sont des décomposants de Goldbach de n.

1 Degré 3 : nombres premiers 3, 5, 7

$$x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$$

$$(n-x)^3 - 15(n-x)^2 + 71(n-x) - 105 = 0$$

$$x^3 - (3n-15)x^2 + (3n^2 - 30n + 71)x - (n^3 - 15n^2 + 71n - 105) = 0$$

$$(x^3 - n^3) - (3nx^2 - 3n^2x) + (15x^2 + 15n^2) + (71x - 71n) - 30nx + 105 = 0$$

Il y a invariance de l'équation par permutation de n et x.

2 Degré 4 : nombres premiers 3, 5, 7, 11

$$x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0$$

$$(n-x)^4 - 26(n-x)^3 + 236(n-x)^2 - 886(n-x) + 1155 = 0$$

$$x^4 - (4n-26)x^3 + (6n^2 - 78n + 886)x^2 - (4n^3 - 78n^2 + 886n - 236)x \\ +(n^4 - 26n^3 + 886n^2 - 236n + 1155) = 0$$

$$(x^4 + n^4) - (4nx^4 + 4n^3x + (26x^3 - 26n^3) - (78nx^2 - 78n^2x) + (886x^2 + 886n^2) \\ -(236x + 236n) + (6n^2x^2 + 886nx + 1155) = 0$$

Il y a invariance de l'équation par permutation de n et x.

3 Degré 5 : nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13

$$x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0$$

$$(n-x)^5 - 39(n-x)^4 + 574(n-x)^3 - 3954(n-x)^2 + 12673(n-x) - 15015 = 0$$

$$x^5 - (5n-39)x^4 + (10n^2 - 156n + 574)x^3 - (10n^3 - 234n^2 + 1722n - 3954)x^2 + \\ (5n^4 - 156n^3 + 1722n^2 - 7908n + 12673)x - (n^5 - 39n^4 + 574n^3 - 3954n^2 + 12673n - 15015) = 0$$

$$(x^5 - n^5) - (5nx^4 - 5n^4x) - (39x^4 - 39n^4) + (10n^2x^3 - 10n^3x^2) - (156nx^3 + 156n^3x) \\ +(574x^3 - 574n^3) - (1722nx^2 - 1722n^2x) - (3954x^2 - 3954n^2) + (12673x - 12673n) \\ -(234n^2x^2 + 7908nx - 15015) = 0$$

Il y a invariance de l'équation par permutation de n et x.

4 Degré 6 : nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17

$$x^6 - 56x^5 + 1237x^4 - 13712x^3 + 79891x^2 - 230456x + 255255 = 0$$

$$(n-x)^6 - 56(n-x)^5 + 1237(n-x)^4 - 13712(n-x)^3 + 79891(n-x)^2 - 230456(n-x) + 255255 = 0$$

$$\begin{aligned}&x^6 - (6n-56)x^5 + (15n^2 - 280n + 1237)x^4 - (20n^3 - 560n^2 + 4948n - 13712)x^3 +\\ &\quad (15n^4 - 560n^3 + 7422n^2 - 41136n + 79891)x^2\\ &\quad -(6n^5 - 280n^4 + 4948n^3 - 41136n^2 - 159782n - 230456)x\\ &\quad +(n^6 - 56n^5 + 1237n^4 - 13712n^3 + 79891n^2 - 230456n + 255255) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x^6 + n^6) - (6nx^5 + 6n^5x) - (56x^5 + 56n^5) + (15n^2x^4 + 15n^4x^2) - (280nx^4 - 280n^4x)\\ &\quad +(1237x^4 + 1237n^4) + (560n^2x^3 - 560n^3x^2) - (4948nx^3 + 4948n^3x) + (13712x^3 - 13712n^3)\\ &\quad -(41136nx^2 - 41136n^2x) - (79891x^2 - 79891n^2) - (230456x + 230456n)\\ &\quad -(20n^3x^3 - 7422n^2x^2 - 159782nx - 255255) = 0\end{aligned}$$

Il y a invariance de l'équation par permutation de n et x.

Les équations polynomiales obtenues semblent toujours être des fonctions invariantes par permutation de n et x. Il faut trouver pourquoi ces équations ont toujours l'une de leurs racines au moins qui est un nombre premier impair.