

1. Résumé

On étudie ici le lien entre deux modélisations proposées dans le *Planeprem*

<https://denisevellachemla.eu/Planeprem-formalisation.pdf> ,

l'approche par oscillateurs harmoniques et l'approche par opérateurs de permutations circulaires.

Le point central est l'identité

$$\left|1 - e^{2\pi in/p}\right| = 2 \left|\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)\right|.$$

Elle montre que les facteurs sinusôiaux de l'approche 2 peuvent être interprétés directement comme des distances spectrales entre une valeur propre du cycle circulaire de longueur p et la valeur propre 1.

On construit ensuite un signal arithmétique supporté exactement par les nombres premiers, puis sa convolution avec lui-même. Cette convolution est strictement positive exactement lorsqu'un entier possède une décomposition de Goldbach. Sa diagonalisation par Fourier conduit à une formulation spectrale du problème.

Cette construction ne constitue pas une preuve de la conjecture de Goldbach. Elle fournit cependant une formulation précise reliant les trois éléments suivants :

cycles circulaires $\longrightarrow$ sinusôides $\longrightarrow$ convolution additive des nombres premiers.

2. Point de départ : le produit de sinusôides

Pour un entier $n \geq 2$, considérons

$$S(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right),$$

où le produit porte sur les nombres premiers p .

On a

$$\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right) = 0 \iff \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \iff p \mid n.$$

Or tout entier composé n possède un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. Par conséquent

$$S(n) = 0 \iff n \text{ est composé.}$$

Pour éviter les signes et obtenir une fonction positive, il est naturel de considérer

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right).$$

On obtient alors

$$\boxed{a(n) > 0 \iff n \in \mathbb{P}.} \quad (1)$$

Ainsi a n'est pas l'indicatrice des nombres premiers, car les valeurs de $a(n)$ ne sont pas égales à 1 sur les nombres premiers, mais son support est exactement celui des nombres premiers.

3. Le lien avec les permutations circulaires

Soit C_p la permutation circulaire de taille p :

$$C_p e_j = e_{j+1},$$

les indices étant pris modulo p .

Les valeurs propres de C_p sont

$$\lambda_{p,j} = e^{2\pi i j/p}, \quad j = 0, \dots, p-1.$$

En particulier, posons

$$\omega_p = e^{2\pi i/p}.$$

Après n itérations, le mode correspondant à ω_p devient

$$\omega_p^n = e^{2\pi i n/p}.$$

On utilise maintenant l'identité élémentaire

$$1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\theta/2} \sin(\theta/2),$$

d'où

$$|1 - e^{i\theta}| = 2|\sin(\theta/2)|.$$

Avec $\theta = 2\pi n/p$, on obtient

$$\boxed{|1 - \omega_p^n| = 2 \left| \sin \left(\frac{\pi n}{p} \right) \right|.} \quad (2)$$

En particulier,

$$\boxed{|1 - \omega_p^n|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right).} \quad (3)$$

C'est le lien spectral essentiel entre les approches 2 et 3.

4. Interprétation spectrale de la primalité

La quantité

$$|1 - \omega_p^n|$$

mesure la distance, dans le plan complexe, entre 1 et le mode propre ω_p^n .

Elle s'annule si et seulement si

$$\omega_p^n = 1,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$p \mid n.$$

Ainsi, pour chaque premier p ,

$$\sin^2\left(\frac{\pi n}{p}\right)$$

est, à un facteur constant près, le carré de la distance spectrale entre le mode ω_p^n et le mode stationnaire 1.

On peut donc écrire

$$a(n) = 4^{-\pi(\sqrt{n})} \prod_{p \leq \sqrt{n}} |1 - \omega_p^n|^2,$$

où $\pi(x)$ désigne ici le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

Cette écriture donne une interprétation précise de l'approche "oscillateurs harmoniques" : la primalité correspond à l'absence de retour de l'un des modes spectraux fondamentaux sur la valeur propre 1.

5. Goldbach comme corrélation

Soit N un entier pair.

Considérons

$$G(N) = \sum_{x=0}^N a(x)a(N-x).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls.

Un terme est strictement positif si et seulement si

$$a(x) > 0 \quad \text{et} \quad a(N-x) > 0.$$

D'après la propriété précédente, ceci équivaut à

$$x \in \mathbb{P} \quad \text{et} \quad N-x \in \mathbb{P}.$$

On obtient donc

$$\boxed{G(N) > 0 \iff N = p + q \quad \text{pour deux nombres premiers } p, q.} \tag{4}$$

Ainsi la conjecture forte de Goldbach peut être reformulée comme

$$\boxed{G(N) > 0 \quad \text{pour tout entier pair } N > 2.} \quad (5)$$

Le changement de variable

$$x \longmapsto N - x$$

est donc naturellement une opération de réflexion du signal arithmétique.

6. De la corrélation à la convolution

Si l'on définit

$$(a * a)(N) = \sum_x a(x)a(N - x),$$

alors

$$G(N) = (a * a)(N).$$

Le problème de Goldbach devient donc un problème de positivité d'une convolution additive :

$$\boxed{\text{Goldbach} \iff (a * a)(N) > 0 \quad \text{pour tout } N > 2 \text{ pair.}} \quad (6)$$

Cette formulation est importante car la convolution devient un produit après transformation de Fourier.

7. Diagonalisation spectrale

Pour fixer les idées, considérons une fenêtre finie de longueur M et la convolution circulaire associée.

Soit

$$a = (a_0, \dots, a_{M-1}).$$

La matrice circulante C_a est définie par

$$(C_a f)(x) = \sum_{y=0}^{M-1} a(y)f(x - y).$$

Les vecteurs de Fourier

$$v_k(x) = e^{2\pi i k x / M}, \quad k = 0, \dots, M - 1,$$

sont des vecteurs propres de C_a .

En effet,

$$\begin{aligned} (C_a v_k)(x) &= \sum_y a(y) e^{2\pi i k (x-y) / M} \\ &= e^{2\pi i k x / M} \sum_y a(y) e^{-2\pi i k y / M}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{C_a v_k = \Lambda_k v_k,} \quad (7)$$

avec

$$\Lambda_k = \sum_{y=0}^{M-1} a(y) e^{-2\pi i k y / M}. \quad (8)$$

Les valeurs propres Λ_k sont donc exactement les coefficients de la transformée de Fourier discrète du signal a .

8. Le spectre du problème de Goldbach

Puisque

$$G = a * a,$$

la propriété fondamentale de Fourier donne

$$\hat{G}(k) = \hat{a}(k)^2.$$

Ainsi

$$\hat{G}(k) = \Lambda_k^2. \quad (9)$$

Autrement dit, le passage de a à la convolution $a * a$ transforme le spectre

$$\Lambda_k$$

en

$$\Lambda_k^2.$$

Dans le cadre circulaire,

$$G(N) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Lambda_k^2 e^{2\pi i k N / M}.$$

Cette formule est une formulation véritablement spectrale du problème.

9. Attention à la différence entre deux familles de valeurs propres

Il faut distinguer deux niveaux.

9.1. Valeurs propres des cycles

Pour le cycle C_p ,

$$\lambda_{p,j} = e^{2\pi i j / p}.$$

Elles décrivent les modes propres du cycle de longueur p .

Ce spectre est entièrement explicite.

9.2. Valeurs propres du signal arithmétique

Pour la matrice circulante C_a , les valeurs propres sont

$$\Lambda_k = \hat{a}(k).$$

Elles décrivent la répartition de l'information arithmétique contenue dans $a(n)$ selon les différentes fréquences de Fourier.

Ce second spectre est celui qui pourrait éventuellement contenir une information globale sur l'addition des nombres premiers.

10. Lien avec la méthode du cercle

La méthode du cercle de Hardy–Littlewood utilise précisément des sommes exponentielles de nombres premiers pour transformer un problème additif en problème spectral.

Pour une fonction f portée par les nombres premiers, on considère typiquement

$$F(\alpha) = \sum_{n \leq N} f(n) e(\alpha n), \quad e(t) = e^{2\pi i t}.$$

L'orthogonalité de Fourier permet alors d'extraire le nombre de solutions de

$$p + q = N$$

à partir d'une intégrale du produit de deux sommes exponentielles.

La construction présentée ici est analogue dans son architecture : le signal $a(n)$ est d'abord construit à partir des modes propres des cycles C_p , puis son autocorrélation fournit le problème additif.

Cependant, cette analogie ne signifie pas que la conjecture de Goldbach est démontrée.

11. Ce que la construction apporte réellement

Le résultat structurel principal est la chaîne

$$C_p \longrightarrow e^{2\pi i/p} \longrightarrow e^{2\pi i n/p} \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right) \longrightarrow a(n) \longrightarrow a * a.$$

Plus explicitement,

$$\sin^2\left(\frac{\pi n}{p}\right) = \frac{1}{4} |1 - e^{2\pi i n/p}|^2.$$

Cette identité montre que les approches 2 et 3 ne sont pas seulement des analogies physiques différentes : elles peuvent être reliées par la théorie spectrale élémentaire des permutations circulaires.

12. Limite actuelle de l'approche

La difficulté restante est de montrer que

$$(a * a)(N) > 0$$

pour tout entier pair $N > 2$.

La définition de a garantit que son support est celui des nombres premiers, de sorte que cette positivité est équivalente à Goldbach. Mais le passage à Fourier ne rend pas cette positivité automatique.

En effet,

$$(a * a)(N) = \frac{1}{M} \sum_k \Lambda_k^2 e^{2\pi i k N/M},$$

et les termes spectraux peuvent avoir des phases différentes.

Il faut donc contrôler quantitativement les amplitudes et les phases des Λ_k .

C'est précisément ce type de difficulté qui apparaît dans la méthode du cercle : les fréquences proches des rationnels de petit dénominateur forment les “arcs majeurs”, tandis que les autres fréquences doivent être contrôlées par des estimations de sommes exponentielles.

13. Question de recherche suggérée

La question naturelle n'est donc pas immédiatement :

“les sinusôides prouvent-elles Goldbach ?”

mais plutôt :

Le spectre de

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right)$$

possède-t-il une structure particulière, absente ou plus visible dans le spectre de l'indicatrice des nombres premiers, qui permette de contrôler la convolution $a * a$?

Pour étudier cette question, il serait naturel de comparer les trois signaux

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right),$$

$$1_{\mathbb{P}}(n),$$

et une pondération analytique classique des nombres premiers, par exemple la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$.

On comparerait leurs transformées de Fourier et, surtout, leurs autocorrélations.

14. Conclusion

La construction ne fournit pas, à ce stade, une preuve de Goldbach.

Elle fournit néanmoins une identification mathématique précise :

$$\boxed{\text{sinusoïde de l'approche 2} = \text{distance à un mode propre de l'approche 3.}}$$

Plus précisément,

$$\boxed{2 \left| \sin \left(\frac{\pi n}{p} \right) \right| = |1 - \lambda_p^n|, \quad \lambda_p = e^{2\pi i/p}.$$

La conjecture de Goldbach peut alors être exprimée comme la positivité d'une convolution du signal arithmétique ainsi obtenu :

$$\boxed{\text{Goldbach} \iff (a * a)(N) > 0 \quad (N > 2, N \text{ pair}).}$$

La diagonalisation de l'opérateur de convolution fournit enfin

$$\boxed{\widehat{a * a}(k) = \widehat{a}(k)^2.}$$

Le problème devient ainsi un problème sur les valeurs propres $\widehat{a}(k)$ d'un opérateur de convolution.

La nouveauté conceptuelle de cette formulation est donc le lien explicite entre les cycles de permutation, leurs valeurs propres, les sinusoïdes de l'approche 2 et la convolution additive qui porte le problème de Goldbach.

Elle constitue une piste spectrale cohérente, mais pas encore une démonstration de la conjecture.