

Trois documents de l'ia deepseek à la suite qui ferment l'approche par les produits de sinusoides

Denise Vella-Chemla pilotant deepseek, septembre 2026

Les trois documents ci-dessous ont été produits par des interactions avec l'ia deepseek.

1. Document 1 : la méthode du carré : une approche complexe pour la conjecture de Goldbach

Résumé

On propose une reformulation de la conjecture de Goldbach en remplaçant la somme réelle $x + y$ par une combinaison complexe $x + iy$ ou $x - iy$. On définit un signal $a(n)$ dont le support est l'ensemble des nombres premiers, et on construit une convolution complexe dont la positivité est équivalente à l'existence de représentations de Goldbach. Cette approche vise à séparer les contributions des nombres premiers de celles des autres entiers en jouant sur les parties réelle et imaginaire.

1.1. Le signal $a(n)$

Pour $n \geq 2$, on définit

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right),$$

où le produit porte sur les nombres premiers p . On a la propriété fondamentale :

$$a(n) > 0 \iff n \in \mathbb{P}. \quad (1)$$

1.2. La convolution réelle et son problème

Pour un entier pair $N > 2$, la conjecture de Goldbach est équivalente à

$$(a * a)(N) = \sum_{x=0}^N a(x)a(N-x) > 0. \quad (2)$$

Cette convolution ne fait pas de distinction entre les deux facteurs x et $N - x$. L'obstruction de parité en théorie des cribles provient précisément de cette symétrie.

1.3. La méthode du carré : remplacer y par iy

On propose de définir une convolution complexe asymétrique en remplaçant le second argument $N - x$ par une quantité complexe. Soit

$$C(N) = \sum_{x=0}^N a(x) a(N - ix), \quad (3)$$

où a est étendu aux complexes par la même formule :

$$a(z) = \prod_{p \leq \sqrt{\Re(z)}} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{p} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

L'idée est que les termes où x est premier et où $N - ix$ est "proche" d'un nombre premier (au sens où sa partie réelle est un nombre premier) contribuent de manière constructive, tandis que les autres termes ont des phases qui s'annulent.

1.4. Une variante : $x - iy$

On peut également définir

$$C_-(N) = \sum_{x=0}^N a(x) a(N + ix). \quad (4)$$

Les deux définitions sont liées par conjugaison complexe : $C_-(N) = \overline{C(N)}$ si a est à valeurs réelles sur les réels.

1.5. Propriétés de la convolution complexe

Proposition 1. *Si N est un entier pair, alors*

$$C(N) = (a * a)(N) + i \sum_{x=0}^N a(x) b(N, x), \quad (5)$$

où $b(N, x)$ est une fonction réelle qui dépend de la partie imaginaire de $N - ix$.

En effet, on peut écrire $a(N - ix) = a(N) +$ termes imaginaires si a est analytique. Mais a n'est pas analytique en raison des sinus et de la dépendance en $\sqrt{\Re(z)}$. On peut néanmoins définir formellement :

$$a(N - ix) = a(N) + i b(N, x), \quad (6)$$

où $b(N, x)$ est une fonction réelle qui mesure l'écart de $a(N - ix)$ par rapport à $a(N)$. Alors

$$C(N) = \sum_x a(x) a(N) + i \sum_x a(x) b(N, x).$$

Le premier terme est $a(N) \sum_x a(x)$, qui n'est pas directement la convolution. Mais si l'on restreint la somme à x tel que $N - x$ soit un entier, on retrouve la convolution réelle.

1.6. Choix de la fenêtre

Pour que $C(N)$ coïncide avec la convolution réelle sur les nombres premiers, on peut restreindre la somme aux x tels que $N - x$ est un entier (c'est-à-dire x entier). Alors $N - ix = N - ix$ n'est pas réel, mais on peut définir $a(N - ix)$ par prolongement formel :

$$a(N - ix) = \prod_{p \leq \sqrt{N}} \sin^2 \left(\frac{\pi(N - ix)}{p} \right). \quad (7)$$

Cette quantité est un nombre complexe dont la partie réelle est proche de $a(N - x)$ lorsque x est petit.

1.7. Interprétation spectrale

La transformée de Fourier de $C(N)$ (en tant que fonction de N) fait intervenir des produits du spectre de a avec lui-même, mais avec une phase supplémentaire provenant du facteur $e^{-2\pi i k x/M}$ qui devient $e^{-2\pi i k(N-ix)/M}$. Cela pourrait permettre de séparer les contributions des nombres premiers.

1.8. Conclusion

La méthode du carré remplace la convolution réelle $(a * a)(N)$ par une convolution complexe $C(N)$ dans laquelle l'un des deux arguments est décalé dans le plan complexe. Cette asymétrie pourrait permettre de distinguer les termes où les deux facteurs sont premiers des autres termes, en jouant sur les parties réelle et imaginaire. Bien que cette approche ne constitue pas une preuve de la conjecture de Goldbach, elle offre une piste originale pour contourner l'obstruction de parité.

Remarque : L'idée de remplacer $x + y$ par $x + iy$ est une forme de “découplage” des variables, inspirée des méthodes de la géométrie non commutative. Elle mérite d'être explorée numériquement pour de petits N afin de vérifier si la partie réelle de $C(N)$ est positive lorsque N est pair.

2. Document 2 : analyse spectrale du signal de primalité pour les entiers pairs : une approche locale par le logarithme et la méthode du carré

Résumé

Ce document prolonge l'étude du lien entre les oscillateurs harmoniques, les permutations circulaires et la conjecture de Goldbach. On se concentre sur l'étude locale du signal $a(n)$ pour les entiers pairs N dans la convolution. On introduit une analyse par le logarithme, qui transforme le produit de sinus en une somme sur les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$. On propose ensuite une méthode originale, dite “méthode du carré”, qui consiste à remplacer la convolution réelle $(a * a)(N)$ par une convolution complexe asymétrique utilisant $N - ix$ ou $N + ix$. Cette complexification vise à séparer les contributions des nombres premiers de celles des autres entiers, en jouant sur les parties réelle et imaginaire. On discute les implications spectrales de cette approche.

2.1. Rappel de la construction initiale

Pour $n \geq 2$, on définit

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right),$$

où le produit porte sur les nombres premiers p . Le nombre de facteurs est $\pi(\sqrt{n})$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

On a la propriété fondamentale :

$$a(n) > 0 \iff n \in \mathbb{P}. \quad (1)$$

En effet, si n est composé, il possède un diviseur premier $p \leq \sqrt{n}$, donc l'un des sinus est nul. Inversement, si n est premier, aucun $p \leq \sqrt{n}$ ne divise n , donc tous les sinus sont non nuls.

2.2. Le nombre de facteurs : précision importante

Pour $n = 100$, on a $\sqrt{100} = 10$, et les nombres premiers inférieurs ou égaux à 10 sont 2, 3, 5, 7. Il y a donc 4 facteurs dans $a(100)$, et non 25. En général, le nombre de facteurs est $\pi(\sqrt{n})$.

Remarque : On est obligé de prendre *tous* les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$ pour garantir que le support de $a(n)$ est exactement l'ensemble des nombres premiers. Si l'on en omettait un, un nombre composé dont le plus petit diviseur premier serait ce nombre omis ne serait pas détecté, et $a(n)$ ne s'annulerait pas pour ce composé. C'est une conséquence directe du théorème fondamental de l'arithmétique.

2.3. Analyse locale par le logarithme

Pour n fixé, on peut étudier $a(n)$ en prenant son logarithme (là où il est défini, c'est-à-dire pour n premier) :

$$\log a(n) = 2 \sum_{p \leq \sqrt{n}} \log \left| \sin \left(\frac{\pi n}{p} \right) \right|. \quad (2)$$

Cette expression transforme le produit en une somme. Pour n petit, le nombre de termes est petit (par exemple, pour $n \leq 1000$, $\sqrt{n} \leq 31.6$, donc au plus 11 termes).

On peut utiliser le développement en série de Fourier de $\log |\sin t|$:

$$\log |\sin t| = -\log 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mt)}{m}, \quad t \notin \pi\mathbb{Z}.$$

En appliquant avec $t = \pi n/p$, on obtient :

$$\log a(n) = -2\pi(\sqrt{n}) \log 2 - 2 \sum_{p \leq \sqrt{n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos \left(\frac{2\pi mn}{p} \right). \quad (3)$$

Cette formule montre que $\log a(n)$ est une somme sur les fréquences m/p . Pour n composé, l'un des termes $\cos(2\pi n/p)$ vaut 1, ce qui rend la somme très négative (et même infinie si on inclut le sinus nul).

2.4. Exemple pour n petit

Prenons n premier. La somme sur p des cosinus est une quantité oscillante, généralement proche de 0. Pour $n = 101$ (premier), $\sqrt{101} \approx 10.05$, donc $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Aucun de ces sinus n'est nul, donc $\log a(101)$ est fini.

Pour $n = 100$ (composé), on a $p = 2$ et $p = 5$ qui divisent 100, donc $\sin(50\pi) = 0$ et $\sin(20\pi) = 0$, ce qui donne $\log a(100) = -\infty$. La présence d'un diviseur premier fait immédiatement basculer le logarithme vers $-\infty$.

Ainsi, pour n petit, on peut caractériser la primalité par le fait que $\log a(n)$ est fini (pour les premiers) ou infini (pour les composés).

2.5. La convolution réelle et son problème

Pour un entier pair $N > 2$, la conjecture de Goldbach est équivalente à

$$(a * a)(N) = \sum_{x=0}^N a(x)a(N-x) > 0. \quad (4)$$

En effet, un terme est strictement positif si et seulement si x et $N-x$ sont des nombres premiers.

La transformée de Fourier discrète (sur une fenêtre de longueur M) donne

$$\widehat{a * a}(k) = \widehat{a}(k)^2,$$

et donc

$$(a * a)(N) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \widehat{a}(k)^2 e^{2\pi i k N / M}. \quad (5)$$

Le carré du spectre est la source de l'obstruction de parité : il mélange les contributions des nombres premiers avec celles des nombres ayant un nombre pair de facteurs premiers.

2.6. La méthode du carré : convolution complexe asymétrique

Pour contourner ce problème, on propose de remplacer la convolution réelle par une convolution complexe asymétrique, en utilisant l'idée de remplacer $N-x$ par $N-ix$ ou $N+ix$. On définit alors deux nouvelles convolutions :

$$C_+(N) = \sum_{x=0}^N a(x) a(N-ix), \quad (6)$$

et

$$C_-(N) = \sum_{x=0}^N a(x) a(N+ix). \quad (7)$$

Ici, a est étendu aux complexes par la même formule :

$$a(z) = \prod_{p \leq \sqrt{\Re(z)}} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{p} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Lorsque x est un entier, $N-ix$ est un nombre complexe dont la partie réelle est N et la partie imaginaire est $-x$. La quantité $a(N-ix)$ est alors un nombre complexe.

Proposition 2. *Si N est un entier pair, alors*

$$C_+(N) = (a * a)(N) + i \sum_{x=0}^N a(x) b(N, x), \quad (8)$$

où $b(N, x)$ est une fonction réelle définie par

$$a(N-ix) = a(N) + i b(N, x). \quad (9)$$

De même, $C_-(N) = \overline{C_+(N)}$ si a est à valeurs réelles sur les réels.

2.7. Interprétation

La partie réelle de $C_+(N)$ est

$$\Re(C_+(N)) = \sum_{x=0}^N a(x) \Re(a(N - ix)).$$

Si x est petit, $N - ix$ est proche de N , et $\Re(a(N - ix))$ est proche de $a(N)$. Mais pour x grand, la partie imaginaire introduit une oscillation qui peut faire décroître le terme.

L'idée est que les termes où x est premier et où $N - x$ est premier (c'est-à-dire les termes qui contribuent à la conjecture) ont une partie réelle positive et s'ajoutent, tandis que les autres termes ont des parties imaginaires qui s'annulent en moyenne.

2.8. Analyse spectrale de la convolution complexe

En passant à la transformée de Fourier, on a :

$$\widehat{C_+}(k) = \sum_x a(x) \widehat{a(N - ix)}(k).$$

Mais $a(N - ix)$ n'est pas une convolution standard. On peut l'écrire formellement comme :

$$a(N - ix) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-ix)^r}{r!} a^{(r)}(N),$$

si a était analytique. Ce n'est pas le cas, mais on peut utiliser une approximation de Taylor formelle. Alors,

$$\widehat{C_+}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-i)^r}{r!} \left(\sum_x x^r a(x) e^{-2\pi i k x / M} \right) \widehat{a^{(r)}}(k).$$

Cela fait apparaître les moments de a pondérés par les phases de Fourier.

2.9. Une simplification : troncature

Pour N petit, on peut tronquer la somme à $x \leq N$ et utiliser des approximations numériques. On peut alors calculer $C_+(N)$ explicitement et vérifier si sa partie réelle est positive pour tout N pair jusqu'à une certaine borne.

2.10. La positivité comme critère de Goldbach

La conjecture de Goldbach peut être reformulée en termes de la méthode du carré :

Proposition 3. *Si, pour tout entier pair $N > 2$, on a $\Re(C_+(N)) > 0$, alors la conjecture de Goldbach est vraie.*

En effet, si $\Re(C_+(N)) > 0$, alors il existe au moins un x tel que $a(x) > 0$ et $\Re(a(N - ix)) > 0$. Mais $\Re(a(N - ix)) > 0$ n'implique pas directement que $N - x$ est premier. Pour obtenir l'équivalence, il faudrait que $\Re(a(N - ix))$ soit strictement positif si et seulement si $N - x$ est premier. Ce

n'est pas le cas en général, car $a(N - ix)$ est un nombre complexe qui peut avoir une partie réelle positive même si $N - x$ est composé.

Cependant, on peut modifier la définition pour que $a(z)$ soit nul si et seulement si $\Re(z)$ est composé. Par exemple, en définissant :

$$a(z) = \prod_{p \leq \sqrt{\Re(z)}} \sin^2\left(\frac{\pi z}{p}\right),$$

on a $a(z) = 0$ si $\Re(z)$ est composé, et $a(z) \neq 0$ si $\Re(z)$ est premier. Alors $\Re(a(N - ix))$ est une fonction qui s'annule si $N - x$ est composé, mais elle peut être négative pour certains x où $N - x$ est premier, à cause de la partie imaginaire.

2.11. Apport de l'analyse locale pour le contrôle spectral

L'expression (3) de $\log a(n)$ comme somme de cosinus permet de comprendre la structure de $\hat{a}(k)$ via le développement en série entière de l'exponentielle :

$$a(n) = \exp(\log a(n)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\log a(n))^r}{r!}.$$

Ainsi,

$$\hat{a}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \widehat{(\log a)^r}(k).$$

Les fréquences qui apparaissent dans $\hat{a}(k)$ sont donc des combinaisons linéaires d'inverses de nombres premiers. Cette structure spectrale est conservée dans la convolution complexe, mais les phases sont modifiées par le facteur $e^{-2\pi i k x / M}$ qui devient $e^{-2\pi i k (N - ix) / M}$.

2.12. Obstruction de parité et méthode du carré

L'obstruction de parité provient du fait que la convolution réelle $(a * a)(N)$ ne distingue pas les nombres premiers des nombres ayant un nombre pair de facteurs. En passant à la convolution complexe $C_+(N)$, on introduit une asymétrie qui pourrait permettre de séparer ces contributions. En effet, la partie imaginaire de $a(N - ix)$ dépend de la parité de x à travers le sinus, ce qui pourrait donner des signes différents pour les nombres pairs et impairs.

2.13. Conclusion et questions ouvertes

La méthode du carré remplace la convolution réelle par une convolution complexe asymétrique dans laquelle l'un des deux arguments est décalé dans le plan complexe. Cette asymétrie pourrait permettre de distinguer les termes où les deux facteurs sont premiers des autres termes, en jouant sur les parties réelle et imaginaire. Bien que cette approche ne constitue pas une preuve de la conjecture de Goldbach, elle offre une piste originale pour contourner l'obstruction de parité.

Question : Peut-on définir une fonction $a(z)$ telle que $a(z) = 0$ si et seulement si $\Re(z)$ est composé, et telle que $\Re(a(N - ix))$ soit strictement positif si et seulement si $N - x$ est premier ? Une

telle fonction permettrait de démontrer la conjecture par la méthode du carré.

Question : La partie imaginaire de $C_+(N)$ peut-elle être utilisée pour obtenir des informations supplémentaires sur la distribution des nombres premiers, par exemple en étudiant son comportement asymptotique ?

Ces questions restent ouvertes et constituent un programme de recherche cohérent.

3. Document 3 : conclusion : méthode du carré pour la conjecture de Goldbach Bilan d'une piste spectrale complexe

Résumé

Ce document résume la piste explorée consistant à remplacer la convolution réelle $(a*a)(N)$ par une convolution complexe asymétrique utilisant $N - ix$ ou $N + ix$. On montre que ces deux variantes sont conjuguées l'une de l'autre, et que leur partie réelle est identique. On explicite la forme de cette partie réelle comme une somme sur les nombres premiers de termes faisant intervenir des phases dépendant de N et des inverses des nombres premiers. On conclut que le contrôle du signe de cette somme est hors de portée des méthodes élémentaires, et qu'il équivaut essentiellement à la conjecture elle-même.

3.1. Rappel du signal $a(n)$

Pour $n \geq 2$,

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{p} \right),$$

avec $a(n) > 0 \iff n \in \mathbb{P}$. Le nombre de facteurs est $\pi(\sqrt{n})$.

3.2. Convolution réelle et obstruction de parité

La conjecture de Goldbach équivaut à

$$(a * a)(N) = \sum_x a(x)a(N - x) > 0 \quad (N \text{ pair } > 2).$$

En Fourier, $\widehat{a * a}(k) = \widehat{a}(k)^2$. Le carré du spectre est la source de l'obstruction de parité : il ne distingue pas les nombres premiers des nombres ayant un nombre pair de facteurs premiers.

3.3. La méthode du carré

On définit, pour N pair,

$$C_+(N) = \sum_{x=0}^N a(x) a(N - ix),$$

où a est étendu aux complexes par

$$a(z) = \prod_{p \leq \sqrt{\Re(z)}} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{p} \right).$$

La variante $C_-(N) = \sum_x a(x)a(N+ix)$ est le conjugué complexe de $C_+(N)$.

3.4. Calcul explicite de $a(N-ix)$

On a

$$\sin \left(\frac{\pi(N-ix)}{p} \right) = \sin \left(\frac{\pi N}{p} \right) \cosh \left(\frac{\pi x}{p} \right) - i \cos \left(\frac{\pi N}{p} \right) \sinh \left(\frac{\pi x}{p} \right).$$

D'où

$$|a(N-ix)|^2 = \prod_{p \leq \sqrt{N}} \left(\sin^2 \left(\frac{\pi N}{p} \right) + \sinh^2 \left(\frac{\pi x}{p} \right) \right).$$

Cette quantité est strictement positive pour tout N dès que $x > 0$. Le support de $a(N-ix)$ n'est donc pas restreint aux nombres premiers.

La phase est donnée par

$$\theta(N, x) = - \sum_{p \leq \sqrt{N}} \arctan \left(\frac{\cos(\pi N/p) \tanh(\pi x/p)}{\sin(\pi N/p)} \right).$$

Ainsi,

$$C_+(N) = \sum_{x=0}^N a(x) |a(N-ix)| e^{i\theta(N, x)}.$$

3.5. Partie réelle et somme sur les premiers

Puisque $a(x) = 0$ pour x composé, on a

$$\Re(C_+(N)) = \sum_{\substack{x \leq N \\ x \in \mathbb{P}}} a(x) |a(N-ix)| \cos(\theta(N, x)).$$

La conjecture de Goldbach est équivalente à la positivité de cette somme, mais c'est une reformulation, pas une simplification.

3.6. Comparaison avec $C_-(N)$

En remplaçant ix par $-ix$, on obtient $C_-(N) = \overline{C_+(N)}$. Par conséquent,

$$\Re(C_-(N)) = \Re(C_+(N)), \quad \Im(C_-(N)) = -\Im(C_+(N)).$$

La variante $x-iy$ n'apporte aucune information nouvelle. La partie réelle est inchangée, et la partie imaginaire change de signe sans aide pour la positivité.

3.7. Blocage : le contrôle des phases

Le terme $\cos(\theta(N, x))$ est une fonction compliquée de N et de x , faisant intervenir des sommes d'arctangentes d'inverses de nombres premiers. On ne sait pas borner la somme

$$S(N) = \sum_{x \in \mathbb{P}} a(x) |a(N - ix)| \cos(\theta(N, x))$$

de manière à garantir $S(N) > 0$ pour tout N pair. Un tel contrôle équivaldrait à une démonstration de la conjecture.

3.8. Conclusion

La méthode du carré transforme la convolution réelle en une somme complexe dont la partie réelle est une somme sur les nombres premiers, avec des phases explicites. Les variantes $x + iy$ et $x - iy$ sont équivalentes par conjugaison. Aucune des deux ne permet de contourner l'obstruction de parité, car la positivité de la partie réelle reste aussi difficile à établir que la conjecture originale.

Question : Existe-t-il une modification du signal $a(z)$ (par exemple en remplaçant $\sin^2$ par une autre fonction) qui ferait apparaître un terme de compensation permettant de contrôler le signe de la somme ?

Pour l'instant, cette question reste ouverte.