Snurpf, revenir à Gauss (Denise Vella-Chemla, 17.5.2016)

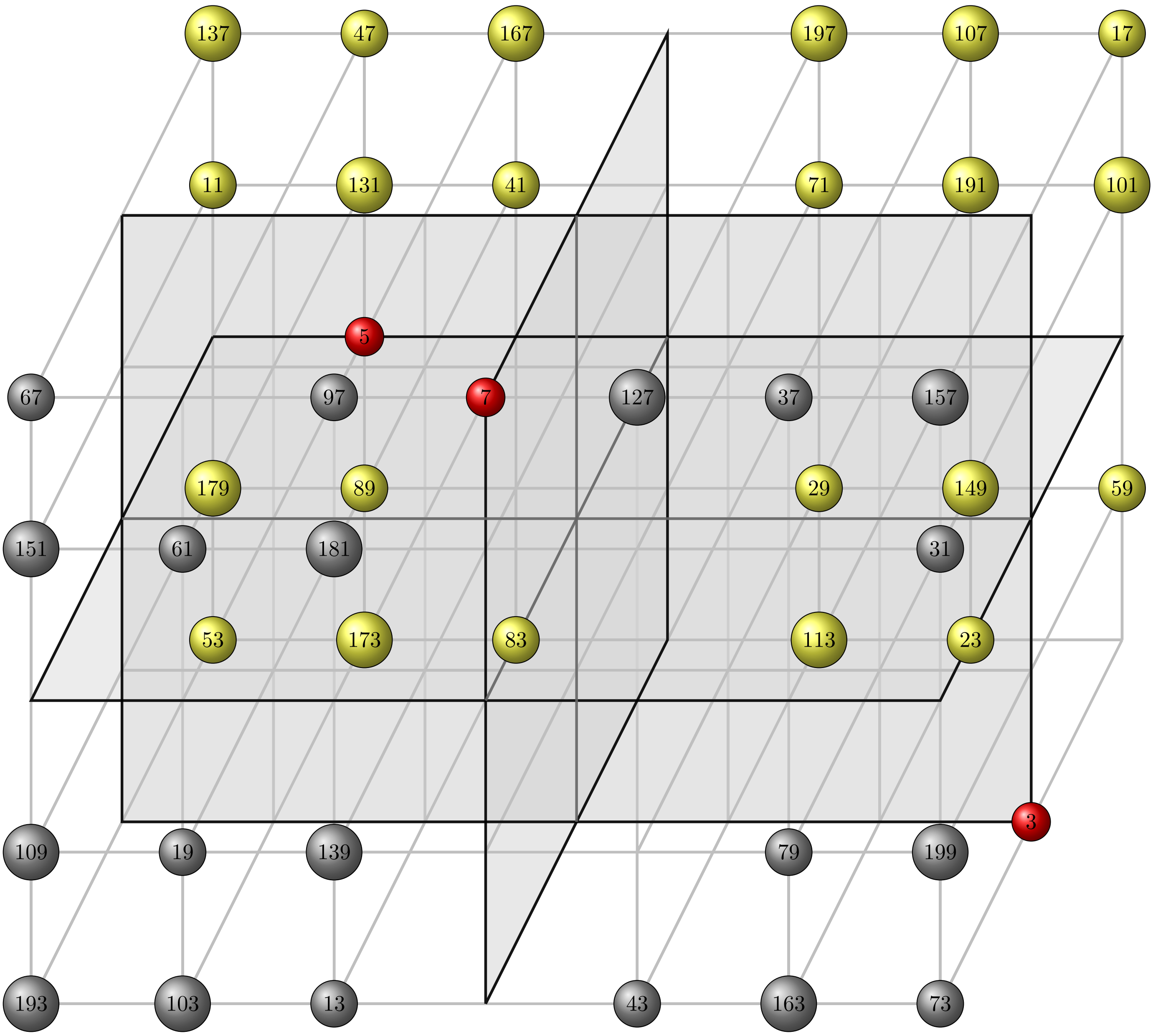
Sur le maillage ci-dessous, en 3 dimensions, on place un nombre n en position (x, y, z) avec $x \equiv n \ (modneg\ 3)$, $y \equiv n \ (modneg\ 5)$ et $z \equiv n \ (modneg\ 7)$.

On utilise les nombres négatifs :

$$\left\{ \begin{array}{lll} n \equiv \ m \ (modneg\ p) & \iff & n \equiv m \ (mod\ p) \text{ et } m \leqslant \frac{p-1}{2} \\ n \equiv \ m - p \ (modneg\ p) & \iff & n \equiv m \ (mod\ p) \text{ et } m > \frac{p-1}{2}. \end{array} \right.$$

Par exemple, les restes modulo 3, habituellement 0, 1 et 2, sont remplacés par 0, 1 et -1 ; les restes modulo 5, habituellement 0, 1, 2, 3 et 4, sont remplacés par 0, 1, 2, -2, -1. Et les restes modulo p, habituellement $0, 1, 2, \ldots, p-1$ sont remplacés par $0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, -(\frac{p-1}{2}), \ldots, -1$.

Les nombres premiers apparaissent tout seuls dans leur hyperplan (ici un plan). En effet, ils sont de reste nul modulo eux-mêmes et de restes non-nuls modulo tous les autres. Bien que la représentation choisie ne permette pas de rendre compte de la cyclicité des restes qui nous amène à penser que la seule structure à utiliser doive être un tore ∞-dimensionnel, elle a cet avantage cependant de nous montrer chaque nombre premier comme se situant "isolé de tous les autres, dans son hyperplan personnel".



Même si ça n'est pas flagrant sur le dessin, 3 est dans le plan vertical de face central tandis que les nombres premiers argentés ou dorés sont sur les plans verticaux en avant ou en arrière de ce plan-là. De même pour 5, il est seul dans un plan horizontal ne contenant que lui, avec deux plans au-dessus et deux plans au-dessous de son plan et contenant les autres nombres premiers. Il en est de même pour 7, sa "solitude sur son plan" étant mieux visualisable.

Cette expression "isolé de tous les autres" rappelle la notion d'espace ultra-métrique, notamment la propriété selon laquelle tout point d'un espace ultra-métrique en est centre. Mais si on utilise comme distance entre 2 points la racine carrée de la somme des carrés des différences des coordonnées, la propriété d'ultra-métricité $d(x, z) \leqslant max(d(x, y), d(y, z))$ n'est pas systématiquement vérifiée. Par exemple, $d(61, 179) = 3 > max(d(61, 151), d(151, 179))$.

La distance à définir devrait ramener les différents restes dans les différents corps premiers à une même échelle. Pour ça, on peut diviser chaque différence de restes modulaires selon p par p (on peut comprendre aisément cette idée en considérant que 12 est à 3 ce que 20 est à 5). Mais ce qui pose souci alors, c'est le fait que les nombres de restes $\frac{p-1}{2}$ et $-\frac{p-1}{2}$ (par exemple de restes 3 et -3 modulo 7) s'avèrent les plus éloignés qu'il est possible par la distance alors qu'ils devraient être proches. Pour tenir compte de cette forme sinusoïdale de la fonction continue qui correspond à la notion discrète de restes modulaires, la solution qui semble intéressante est d'associer à chaque nombre une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\mathbf{k1}.2i\pi}{3}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{\mathbf{k2}.2i\pi}{5}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{\frac{\mathbf{k3}.2i\pi}{7}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Par exemple, on associe à 11 (de restes (2,1,4,0,...) modulo (3,5,7,11,...)) la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\mathbf{2}.2i\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{5}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{\frac{\mathbf{4}.2i\pi}{7}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$