Spectres (DV 30.7.2015)

1) Introduction

Dans cette note, on joue avec des spectres de matrices. On cherche à caractériser l'ensemble des nombres premiers, la clef se cache peut-être dans un opérateur subtil.

2) Définition

Extrait de [1] : Soit A une matrice carrée d'ordre n à valeurs réelles ou complexes ; on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Le vecteur x est le vecteur propre associé à la valeur propre λ et l'ensemble des valeurs propres de A est appelé *spectre* de A. On le note $\sigma(A)$.

Extrait de [2] : les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont les n racines de son *polynôme caractéristique* $p(z) = det(zI - A)$. L'ensemble de racines est appelé le spectre.

Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$.

3) Exemples jouets

Une récurrence simple calcule la somme des diviseurs :

$$\sigma(n) = \frac{12}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (-5k^2 + 5kn - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k)$$

Un programme récursif la calcule trivialement, il suffit d'initialiser $\sigma(1) = 1$ et la somme des diviseurs est effectivement trouvée pour les entiers successifs sans que ne soit jamais testé aucun reste de division. Les nombres premiers p sont aisément caractérisés par le fait que pour eux, $\sigma(p) = p + 1$.

Similairement, on cherche ici à être surpris par les opérateurs matriciels, en testant certains calculs de spectre, un peu au hasard, et en espérant le coup de chance, qui ferait apparaître les nombres premiers par exemple. On utilise le logiciel *Scilab* qui fournit un spectre de matrice à la demande.

3a) Matrices-gnomons

Si $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_1) = \{1\}$.

Si $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_2) = \{-0.5615528, 3.5615528\}$.

Si $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_3) = \{-1.1776168, -0.3389217, 7.5165385\}$.

Si $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_4) = \{-2.0531158, -0.5146428, -0.2943265, 12.862085\}$.

Si $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_5) = \{-3.185096, -0.7498856, -0.3857228, -0.2769322, 19.597637\}$.

Si $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$,
$Spec(A_6) = \{-4.5728999, -1.040565, -0.5065657, -0.3347785, -0.2681985, 27.723008\}$.

On a compris le principe, on n'écrit plus les matrices.

$Spec(A_7) = \{-6.2163067, -1.3855235, -0.6529671, -0.4115027, -0.3086653, -0.2631553, 37.238121\}$.

$Spec(A_8) = \{-8.1152237, -1.7843181, -0.8236182, -0.5037270, -0.3628137, -0.2932653, -0.2599676, 48.142933\}$.

$Spec(A_9) = \{-10.269606, -2.2367501, -1.0179672, -0.6101633, -0.4277919, -0.3339874, -0.2833391, -0.2578199, 60.437425\}$.

$Spec(A_{10}) = \{-12.679428, -2.7427181, -1.2357461, -0.7302233, -0.502402 -0.3829322, -0.3152953, -0.2765327, -0.2563021, 74.12158\}$.

$Spec(A_{11}) = \{-15.344678, -3.3021658, -1.4768107, -0.8636042, -0.5860603, -0.4390148, -0.3538327, -0.3023903, -0.2716470, -0.2551890, 89.195392\}$.

$Spec(A_{12}) = \{-18.265345, -3.9150598, -1.7410776, -1.0101359, -0.6784516, -0.5016770, -0.3979809, -0.3337051, -0.2930613, -0.2680135, -0.2543478, 105.65885\}$.

On a l'impression que la dernière valeur du spectre est un nombre premier quand n est premier mais pour $n = 13$, patatras, 123 est composé.

$Spec(A_{13}) = \{-21.441423, -4.5813793, -2.0284957, -1.1697163, -0.7793923, -0.5706049, -0.4472171, -0.3696142, -0.3191154, -0.2860751, -0.2652338, -0.2536965, 123.51196\}$.

3b) Matrices de suites arithmétiques

Dans cette section et les deux sections suivantes sont effectués quelques calculs de spectre. Les contenus des matrices se déduisent des titres des sections.

Si $B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$,
$Spec(B_5) = \{-2.222.10^{-15}, -1.415.10^{-16}, 1.791.10^{-16}, 1.4921894, 33.507811\}$ (les nombres minuscules sont sûrement des zéros).

Si $B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \end{pmatrix}$,
$Spec(B_6) = \{-1.288.10^{-15}, -8.990.10^{-17}, 8.547.10^{-16}, 1.266.10^{-14}, 1.7728352, 59.227165\}$.

Abandon.

On peut également tester une matrice symétrique, 5×5.

Si $B'_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$,

$Spec(B'_5) = \{0, 0, 0, 3.553.10^{-15}, 55\}$.

Il se trouve que $55 = 5 \times 11$, on continue.

$Spec(B'_6) = \{-2.560.10^{-15}, 0, 0, 0, 2.560.10^{-15}, 91\}$.

Il se trouve que $91 = 7 \times 13$, on continue.

$Spec(B'_6) = \{-8.000.10^{-15}, -2.434.10^{-16}, -1.525.10^{-64}, 4.911.10^{-32}, 1.279.10^{-15}, 6.298; 10^{-15}, 140\}$.

Il se trouve que $140 = 2^2 \times 5 \times 7$, abandon.

3c) Matrices de suites de puissances

Si $C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{pmatrix}$,

$Spec(C_5) = \{680.92666, 17.658486, 1.9730603, 0.4123561, 0.0294392\}$.

Même si 17 est premier, les nombres grossissent trop vite, abandon.

En cherchant la symétrie, on retrouve les puissances de 2.

Si $C'_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 \\ 1 & 16 & 256 & 4096 & 65536 \end{pmatrix}$,

$Spec(C'_5) = \{0.1357339, 1.1891004, 7.2373579, 264.40988, 65794.028\}$.

Notre énervement face à la notion de puissance perdure, les puissances, même de 2 comme dans la légende de l'échiquier de Sissa, grossissent trop vite.

3d) Matrices-compagnons les plus élémentaires

On lit que la détermination des zéros d'un polynôme de degré $\leqslant n$ à coefficients réels

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \text{ avec } \mathrm{a_n} \neq 0 \text{ et } \mathrm{a_k} \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{k} = 0, \ldots, \mathrm{n}$$

est équivalente à la détermination du spectre de la matrice de Frobenius $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associée à p_n appelée matrice compagnon (contenant des ratios de coefficients du polynôme dans la première ligne, des 1 dans la diagonale immédiatement en-dessous de la diagonale principale et des 0 partout ailleurs).

$$D = \begin{pmatrix} -(a_{n-1}/a_n) & -(a_{n-2}/a_n) & \ldots & -(a_0/a_n) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule deux spectres, au hasard :

Si $D_5 = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/5 & -1/4 & -1/3 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$Spec(D_5) = \{0.6010558 + 0.6605334i, 0.6010558 - 0.6605334i,$
$-0.7196965,$
$-0.3245409 + 0.6894803i, -0.3245409 - 0.6894803i\}.$

Si $D_6 = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/4 & -1/3 & -1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$Spec(D_6) = \{0.7436122 + 0.7498717i, 0.7436122 - 0.7498717i,$
$-0.9501551,$
$-0.3685346 + 0.8988140i, -0.3685346 - 0.8988140i\}.$

Enfin, si $D'_5 = \begin{pmatrix} -5/6 & -4/6 & -3/6 & -2/6 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$Spec(D'_5) = \{0.6500656 + 0.6715345i, 0.6500656 - 0.6715345i$
-0.8150367
$-0.3258806 + 0.7720611i, -0.3258806 - 0.7720611i\}.$

Enfin, si $D''_5 = \begin{pmatrix} -5/5 & -4/5 & -3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$Spec(D''_5) = \{$0.2749880+0.6837609i,0.2749880-0.6837609i
- 0.7195054
- 0.4152353+0.5825408i,- 0.4152353-0.5825408i$\}$.

On voit apparaître dans ces deux derniers exemples des nombres complexes et une certaine symétrie entre les différentes valeurs propres. Il faudra tester d'autres possibilités avec des nombres plus grands sur la première ligne car les nombres trouvés sont trop petits.

3e) Ellipsoïde de révolution

Une ellipse rend invariante l'aire délimitée par un triangle dont les sommets sont le point décrivant l'orbite elliptique et les deux points focaux. On aimerait trouver un opérateur en lien avec une telle surface elliptique ou même avec un volume ellipsoïdal et calculer son spectre, pour voir.

Bibliographie

[1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques (algorithmes, analyse et applications)*, Springer, 2007.

[2] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix computations (4th edition)*, Johns Hopkins University editors, 2013.

[3] Site Images des mathématiques : article "De l'autre côté du miroir" : *"Spectre"*
http://images.math.cnrs.fr/Spectre.html