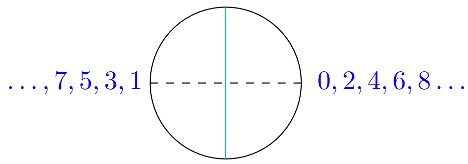
Se promener sur la sphère *(DV, 11/5/2015)*

On aimerait associer à chaque entier son "mot de restes modulaires", i.e. le mot constitué de ses restes dans les divisions par l'infinité des nombres premiers. Par exemple, le mot associé à 11 est $1, 2, 1, 4, 0, 11, 11, 11, \ldots$ (1^{er} reste mod 2, $2^{ème}$ reste mod 3, $3^{ème}$ reste mod 5, $4^{ème}$ reste mod 7, $5^{ème}$ reste mod 11 (donc 0), puis restes suivants mod tout premier strictement supérieur à 11 tous égaux à 11).

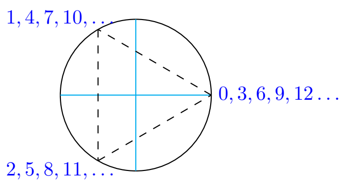
On "positionne" les différents restes d'un nombre entier n sur la sphère de la façon suivante :

- à chaque premier p, on associe un plan vertical passant par les pôles, séparé du plan de Greenwich par un angle de rotation de $\dfrac{1}{p}$;
- sur ce plan vertical, on dessine sur la géodésique qui est l'intersection de ce plan et de la sphère un p-gone (un segment de droite pour $p = 2$, un triangle pour $p = 3$, un pentagone pour $p = 5$, un heptagone pour $p = 7$,...). Tous ces p-gones ont un sommet sur le point $(1, 0)$ (enfin, qui serait $(1, 0)$ si on tournait ce plan pour le ramener sur le plan de Greenwich) qui "codera" tous les entiers divisibles par p (et puis sur le point suivant du p-gone, les nombres congrus à 1, sur le point suivant les congrus à 2, ..., sur le $p - 1^{ième}$ point les congrus à $p - 1$ mod p.

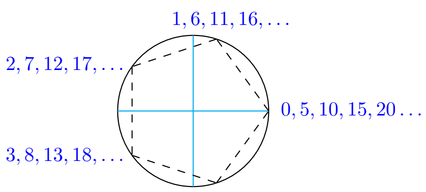
Exemples de géodésiques :



géodésique du 2-gone



géodésique du 3-gone



géodésique du 5-gone

Ainsi, chaque entier est représenté par une infinité de points de la sphère dans l'infinité des "plans de restes". Du coup, les nombres premiers, n'étant divisibles que par eux-mêmes, ont leur ensemble de points qui ne contient qu'**un seul point sur l'équateur**.

Utiliser les nombres complexes

A un nombre complexe $a + ib$, on peut faire correspondre une matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On peut aussi voir le nombre complexe $cos\theta + isin\theta$ comme codant la combinaison d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie qui multiplie les normes des vecteurs par la norme du complexe $\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}$.

Si on utilise la représentation proposée ci-dessus, on peut voir chaque nombre entier comme une composition infinie d'homothéties et rotations sur la sphère. Il faudrait pousser plus avant pour comprendre à quelles transformations correspond le fait d'avoir comme on l'a vu "un seul point sur l'équateur", dans la mesure où cette caractéristique suffit à distinguer les nombres premiers des nombres composés. Il faudrait voir aussi si cette représentation permet de modéliser "agréablement" l'addition et la multiplication des entiers.