Suite des calculs des formules de Riemann (Denise Vella-Chemla, 7.7.2017)

On étudie ici les calculs de la formule 2) ci-dessous fournie dans l'article que Riemann a consacré au nombre de nombres premiers pour les nombres 995 907, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9.

$$1)\ \ f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots$$

$$2)\ \ \pi(x) = \frac{\mu(2)}{2} f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mu(3)}{3} f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{\mu(4)}{4} f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{\mu(5)}{5} f\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots = \sum \frac{\mu(k)}{k} f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

La formule 2) utilise les valeurs de f calculées au préalable qu'on fournit dans le tableau ci-après en regard des racines k-ièmes des nombres choisis (à gauche de la flèche dans chaque case, la racine k-ième, à droite, son image par f).

f	$\sqrt[2]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[6]{x}$	$\sqrt[7]{x}$	$\sqrt[10]{x}$
995 907	997.951 $\to$ 176	99.8634 $\to$ 28	15.8359 $\to$ 7	9.99317 $\to$ 5	7.19264 $\to$ 4	3.97944 $\to$ 2
10^6	1000 $\to$ 176	100 $\to$ 28	15.8489 $\to$ 7	10 $\to$ 5	7.19686 $\to$ 4	3.98107 $\to$ 2
10^7	3162.28 $\to$ 458	215.443 $\to$ 52	25.1189 $\to$ 11	14.678 $\to$ 7	10 $\to$ 5	5.01187 $\to$ 3
10^8	10000 $\to$ 1247	464.159 $\to$ 96	39.8107 $\to$ 14	21.5443 $\to$ 9	13.895 $\to$ 7	6.30957 $\to$ 3
10^9	31622.8 $\to$ 3428	1000 $\to$ 176	63.0957 $\to$ 21	31.6228 $\to$ 13	19.307 $\to$ 9	7.94328 $\to$ 4
f	$\sqrt[11]{x}$	$\sqrt[13]{x}$	$\sqrt[14]{x}$	$\sqrt[15]{x}$	$\sqrt[17]{x}$	$\sqrt[19]{x}$
995 907	3.50988 $\to$ 2	2.89335 1	2.68191 $\to$ 1	2.5112 $\to$ 1	2.25339 $\to$ 1	2.06869 $\to$ 1
10^6	3.51119 $\to$ 2	2.89427 $\to$ 1	2.6827 $\to$ 1	2.51189 $\to$ 1	2.25393 $\to$ 1	2.06914 $\to$ 1
10^7	4.32876 $\to$ 2	3.45511 $\to$ 2	3.16228 $\to$ 1	2.92864 $\to$ 1	2.58086 $\to$ 1	2.33572 $\to$ 1
10^8	5.3356 $\to$ 3	4.12463 $\to$ 2	3.72759 $\to$ 2	3.41455 $\to$ 2	2.95521 $\to$ 1	2.63665 $\to$ 1
10^9	6.57933 $\to$ 3	4.92388 $\to$ 2	4.39397 $\to$ 2	3.98107 $\to$ 2	3.38386 $\to$ 2	2.97635 $\to$ 1
f	$\sqrt[21]{x}$	$\sqrt[22]{x}$	$\sqrt[23]{x}$	$\sqrt[26]{x}$	$\sqrt[29]{x}$	
995 907	–	–	–	–	–	
10^6	–	–	–	–	–	
10^7	2.15443 $\to$ 1	2.08057 $\to$ 1	2.01534 $\to$ 1	–	–	
10^8	2.4041 $\to$ 1	2.31013 $\to$ 1	2.22754 $\to$ 1	2.03092 $\to$ 1	–	
10^9	2.6827 $\to$ 1	2.56502 $\to$ 1	2.46209 $\to$ 1	2.21898 $\to$ 1	2.04336 $\to$ 1	

La fonction de Moebius "équilibre" à peu près les ajouts et les soustractions.

x	$\pi(x)$	$formule\ 2)$
995 907	78 262	78 199
1 000 000	78 498	78 627
10 000 000	664 579	664 555
100 000 000	5 761 455	5 760 896
1 000 000 000	50 847 534	50 845 856

Ci-dessous, le tableau des écarts à $\pi(x)$, plus parlant :

x	$\pi(x)$	$formule\ 2(x) - \pi(x)$
995 907	78 262	−63
1 000 000	78 498	+129
10 000 000	664 579	−24
100 000 000	5 761 455	−559
1 000 000 000	50 847 534	−1678

Ci-dessous les valeurs calculées au fur et à mesure de l'application de la formule 2 pour les nombres choisis.

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 995907

res = 78 298 (= f(995907)).
$-(1.0/2.0)*176 \to 78210.00000$
$-\ (1.0/3.0) * 28 \to 78200.66667$
$-\ (1.0/5.0) * 7 \to 78199.26667$
$+\ (1.0/6.0) * 5 \to 78200.10000$
$-\ (1.0/7.0) * 4 \to 78199.52857$

$+ (1.0/10.0) * 2 \rightarrow 78199.72857$
$- (1.0/11.0) * 2 \rightarrow 78199.54675$
$- (1.0/13.0) * 1 \rightarrow 78199.46983$
$+ (1.0/14.0) * 1 \rightarrow 78199.54126$
$+ (1.0/15.0) * 1 \rightarrow 78199.60793$
$- (1.0/17.0) * 1 \rightarrow 78199.54910$
$- (1.0/19.0) * 1 \rightarrow 78199.49647$
$formule\ 2 \ \rightarrow\ 78199.49647$

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^6

res = 78 726 (= f(10^6)).
$-(1.0/2.0) * 176 \rightarrow 78638.00000$
$- (1.0/3.0) * 28 \rightarrow 78628.66667$
$- (1.0/5.0) * 7 \rightarrow 78627.26667$
$+ (1.0/6.0) * 5 \rightarrow 78628.10000$
$- (1.0/7.0) * 4 \rightarrow 78627.52857$
$+ (1.0/10.0) * 2 \rightarrow 78627.72857$
$- (1.0/11.0) * 2 \rightarrow 78627.54675$
$- (1.0/13.0) * 1 \rightarrow 78627.46983$
$+ (1.0/14.0) * 1 \rightarrow 78627.54126$
$+ (1.0/15.0) * 1 \rightarrow 78627.60793$
$- (1.0/17.0) * 1 \rightarrow 78627.54910$
$- (1.0/19.0) * 1 \rightarrow 78627.49647$
formule 2 $\rightarrow$ 78627.49647

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^7

res = 664 829 (= f(10^7)).
$-(1.0/2.0) * 458 \rightarrow 664600.00000$
$- (1.0/3.0) * 128 \rightarrow 664557.33333$
$- (1.0/5.0) * 11 \rightarrow 664555.13333$
$+ (1.0/6.0) * 7 \rightarrow 664556.30000$
$- (1.0/7.0) * 5 \rightarrow 664555.58571$
$+ (1.0/10.0) * 4 \rightarrow 664555.98571$
$- (1.0/11.0) * 2 \rightarrow 664555.80390$
$- (1.0/13.0) * 2 \rightarrow 664555.65005$
$+ (1.0/14.0) * 1 \rightarrow 664555.72148$
$+ (1.0/15.0) * 1 \rightarrow 664555.78815$
$- (1.0/17.0) * 1 \rightarrow 664555.72932$
$- (1.0/19.0) * 1 \rightarrow 664555.67669$
$+ (1.0/21.0) * 1 \rightarrow 664555.72431$
$+ (1.0/22.0) * 1 \rightarrow 664555.76976$
$- (1.0/23.0) * 1 \rightarrow 664555.72629$
formule 2 $\rightarrow$ 664555.72629

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^8

res = 5 761 554 (= f(10^8)).
$-(1.0/2.0) * 1247 \rightarrow 5760930.50000$
$- (1.0/3.0) * 96 \rightarrow 5760898.50000$
$- (1.0/5.0) * 14 \rightarrow 5760895.70000$
$+ (1.0/6.0) * 9 \rightarrow 5760897.20000$
$- (1.0/7.0) * 7 \rightarrow 5760896.20000$
$+ (1.0/10.0) * 3 \rightarrow 5760896.50000$
$- (1.0/11.0) * 3 \rightarrow 5760896.22727$
$- (1.0/13.0) * 2 \rightarrow 5760896.07343$
$+ (1.0/14.0) * 2 \rightarrow 5760896.21628$
$+ (1.0/15.0) * 2 \rightarrow 5760896.34962$
$- (1.0/17.0) * 1 \rightarrow 5760896.29079$
$- (1.0/19.0) * 1 \rightarrow 5760896.23816$
$- (1.0/21.0) * 1 \rightarrow 5760896.19054$

$-\ (1.0/22.0) * 1 \rightarrow 5760896.14509$
$-\ (1.0/23.0) * 1 \rightarrow 5760896.10161$
$-\ (1.0/26.0) * 1 \rightarrow 5760896.06315$
formule 2 $\rightarrow$ 5760896.06315

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^9

res = 50 847 633 (= f(10^9)).
$-(1.0/2.0) * 3428 \rightarrow 50845919.00000$
$-\ (1.0/3.0) * 176 \rightarrow 50845860.33333$
$-\ (1.0/5.0) * 21 \rightarrow 50845856.13333$
$+\ (1.0/6.0) * 13 \rightarrow 50845858.30000$
$-\ (1.0/7.0) * 9 \rightarrow 50845857.01429$
$+\ (1.0/10.0) * 4 \rightarrow 50845857.41429$
$-\ (1.0/11.0) * 3 \rightarrow 50845857.14156$
$-\ (1.0/13.0) * 2 \rightarrow 50845856.98771$
$+\ (1.0/14.0) * 2 \rightarrow 50845857.13057$
$+\ (1.0/15.0) * 2 \rightarrow 50845857.26390$
$-\ (1.0/17.0) * 2 \rightarrow 50845857.14626$
$-\ (1.0/19.0) * 1 \rightarrow 50845857.09362$
$-\ (1.0/21.0) * 1 \rightarrow 50845857.04601$
$-\ (1.0/22.0) * 1 \rightarrow 50845857.00055$
$-\ (1.0/23.0) * 1 \rightarrow 50845856.95707$
$-\ (1.0/26.0) * 1 \rightarrow 50845856.91861$
$-\ (1.0/29.0) * 1 \rightarrow 50845856.88413$
formule 2 $\rightarrow$ 50845856.88413

Concernant le dernier paragraphe de l'article de Bernhard Riemann :

> *"Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique*[1] *contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + log\ \xi(0)$.",*

il s'agit de comparer $Li(x)$ et $f(x)$ dont on rappelle quelques valeurs :

x	$f(x)$	$Li(x)$	$Li(x) - f(x)$
500	101	101	0
10^3	176	177	1
2.10^3	313	314	1
5.10^3	683	684	1
10^4	1247	1245	-2
2.10^4	2285	2288	3
5.10^4	5164	5165	1
10^5	9633	9629	-4
2.10^5	18037	18035	-2
5.10^5	41614	41606	-8
995 907	78 298	78 332	34
10^6	78 726	78 627	-99
10^7	664 829	664 917	88
10^8	5 761 554	5 762 208	654
10^9	50 847 633	50 847 534	-99

Il faut peut-être, dans la comparaison "en moyenne", considérer, comme le fait le traducteur, que $log\ \xi(0)$ est une coquille typographique et doit prendre la valeur $\frac{1}{2}$, ou bien selon l'idée d'autres, remplacer $log\ \xi(0)$ par $li(2) = 1.045164$.

[1] selon le traducteur, penser ici oscillatoire plutôt que périodique.

Toujours est-il que le rapport $\dfrac{50\,847\,633}{50\,847\,534}$ pour $x = 10^9$ vaut 1.000001947 et que donc, puisque $f(x) = \pi(x) + \dfrac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \dfrac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dfrac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \dfrac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots$, il suffirait, si l'hypothèse de Riemann était démontrée, pour trouver quasi-exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à x de calculer $Li(x) = li(x) - li(2)$ et de lui soustraire la moitié du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine carrée de x, ainsi que le tiers du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine cubique de x, ainsi que le quart du nombre de nombres premiers de la racine quatrième de x, en poursuivant les retraits jusqu'à la dernière racine k-ième de x supérieure ou égale à 2.

On vérifie cela avec le nombre 10^9 uniquement ; on calcule $\pi(x) = Li(x) - \sum \dfrac{1}{k}\pi(\sqrt[k]{x})$:

res = Li(10^9) = 50849233.0-(1.0/2.0) $*$ 3401.0 = 50847532.500000
$-$ (1.0/3.0) $*$ 168.0 = 50847476.500000
$-$ (1.0/4.0) $*$ 40.0 = 50847466.500000
$-$ (1.0/5.0) $*$ 18.0 = 50847462.900000
$-$ (1.0/6.0) $*$ 11.0 = 50847461.066667
$-$ (1.0/7.0) $*$ 8.0 = 50847459.923810
$-$ (1.0/8.0) $*$ 6.0 = 50847459.173810
$-$ (1.0/9.0) $*$ 4.0 = 50847458.729365
$-$ (1.0/10.0) $*$ 4.0 = 50847458.329365
$-$ (1.0/11.0) $*$ 3.0 = 50847458.056638
$-$ (1.0/12.0) $*$ 3.0 = 50847457.806638
$-$ (1.0/13.0) $*$ 2.0 = 50847457.652792
$-$ (1.0/14.0) $*$ 2.0 = 50847457.509935
$-$ (1.0/15.0) $*$ 2.0 = 50847457.376601
$-$ (1.0/16.0) $*$ 2.0 = 50847457.251601
$-$ (1.0/17.0) $*$ 2.0 = 50847457.133954
$-$ (1.0/18.0) $*$ 2.0 = 50847457.022843
$-$ (1.0/19.0) $*$ 1.0 = 50847456.970211
$-$ (1.0/20.0) $*$ 1.0 = 50847456.920211
$-$ (1.0/21.0) $*$ 1.0 = 50847456.872592
$-$ (1.0/22.0) $*$ 1.0 = 50847456.827138
$-$ (1.0/23.0) $*$ 1.0 = 50847456.783660
$-$ (1.0/24.0) $*$ 1.0 = 50847456.741993
$-$ (1.0/25.0) $*$ 1.0 = 50847456.701993
$-$ (1.0/26.0) $*$ 1.0 = 50847456.663531
$-$ (1.0/27.0) $*$ 1.0 = 50847456.626494
$-$ (1.0/28.0) $*$ 1.0 = 50847456.590780
$-$ (1.0/29.0) $*$ 1.0 = 50847456.556297

L'écart rapporté à $\pi(x)$ de la valeur finale obtenue $\dfrac{50847534 - 50847456}{50847534}$ est égal à 0.00000153098 mais dès la première soustraction, en ôtant simplement $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})$, on a un écart aussi petit que $\dfrac{50847534 - 50847532}{50847534} = 3,93332743.10^{-8}$.

Annexe : autres résultats

Calculs pour 10^8

res $= \mathrm{Li}(10^8) = 5762208.0$
$-\ (1.0/2.0) * 1229.0 = 5761593.500000$
$-\ (1.0/3.0) * 90.0 = 5761563.500000$
$-\ (1.0/4.0) * 25.0 = 5761557.250000$
$-\ (1.0/5.0) * 12.0 = 5761554.850000$
$-\ (1.0/6.0) * 8.0 = 5761553.516667$
$-\ (1.0/7.0) * 6.0 = 5761552.659524$
$-\ (1.0/8.0) * 4.0 = 5761552.159524$
$-\ (1.0/9.0) * 4.0 = 5761551.715079$
$-\ (1.0/10.0) * 3.0 = 5761551.415079$
$-\ (1.0/11.0) * 3.0 = 5761551.142352$
$-\ (1.0/12.0) * 2.0 = 5761550.975685$
$-\ (1.0/13.0) * 2.0 = 5761550.821839$
$-\ (1.0/14.0) * 2.0 = 5761550.678982$
$-\ (1.0/15.0) * 2.0 = 5761550.545649$
$-\ (1.0/16.0) * 2.0 = 5761550.420649$
$-\ (1.0/17.0) * 1.0 = 5761550.361825$
$-\ (1.0/18.0) * 1.0 = 5761550.306270$
$-\ (1.0/19.0) * 1.0 = 5761550.253638$
$-\ (1.0/20.0) * 1.0 = 5761550.203638$
$-\ (1.0/21.0) * 1.0 = 5761550.156019$
$-\ (1.0/22.0) * 1.0 = 5761550.110565$
$-\ (1.0/23.0) * 1.0 = 5761550.067086$
$-\ (1.0/24.0) * 1.0 = 5761550.025420$
$-\ (1.0/25.0) * 1.0 = 5761549.985420$
$-\ (1.0/26.0) * 1.0 = 5761549.946958$

Erreur $= (5761455 - 5761593)/5761455 = 2,39.10^{-5}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à $.10^{-}$ si on va au bout des calculs ((5761455-5761549)/5761455=1,63.10^{-5}).

Calculs pour 10^7

res $= \mathrm{Li}(10^7) = 664917.0$
$-\ (1.0/2.0) * 446.0 = 664694.000000$
$-\ (1.0/3.0) * 47.0 = 664678.333333$
$-\ (1.0/4.0) * 16.0 = 664674.333333$
$-\ (1.0/5.0) * 9.0 = 664672.533333$
$-\ (1.0/6.0) * 6.0 = 664671.533333$
$-\ (1.0/7.0) * 4.0 = 664670.961905$
$-\ (1.0/8.0) * 4.0 = 664670.461905$
$-\ (1.0/9.0) * 3.0 = 664670.128571$
$-\ (1.0/10.0) * 3.0 = 664669.828571$
$-\ (1.0/11.0) * 2.0 = 664669.646753$
$-\ (1.0/12.0) * 2.0 = 664669.480087$
$-\ (1.0/13.0) * 2.0 = 664669.326240$
$-\ (1.0/14.0) * 2.0 = 664669.183383$
$-\ (1.0/15.0) * 1.0 = 664669.116717$
$-\ (1.0/16.0) * 1.0 = 664669.054217$
$-\ (1.0/17.0) * 1.0 = 664668.995393$
$-\ (1.0/18.0) * 1.0 = 664668.939838$
$-\ (1.0/19.0) * 1.0 = 664668.887206$
$-\ (1.0/20.0) * 1.0 = 664668.837206$
$-\ (1.0/21.0) * 1.0 = 664668.789587$
$-\ (1.0/22.0) * 1.0 = 664668.744132$
$-\ (1.0/23.0) * 1.0 = 664668.700654$

Erreur $= (664579 - 664694)/664579 = 1,73.10^{-4}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à $1,33.10^{-4}$ si on va au bout des calculs (=(664579-664668)/664579).

Calculs pour 10^6

$\text{res} = \text{Li}(10^6) = 78627.0$
$-(1.0/2.0)*168.0 = 78543.000000$
$-(1.0/3.0)*25.0 = 78534.666667$
$-(1.0/4.0)*11.0 = 78531.916667$
$-(1.0/5.0)*7.0 = 78530.516667$
$-(1.0/6.0)*4.0 = 78529.850000$
$-(1.0/7.0)*4.0 = 78529.278571$
$-(1.0/8.0)*3.0 = 78528.903571$
$-(1.0/9.0)*2.0 = 78528.681349$
$-(1.0/10.0)*2.0 = 78528.481349$
$-(1.0/11.0)*2.0 = 78528.299531$
$-(1.0/12.0)*2.0 = 78528.132864$
$-(1.0/13.0)*1.0 = 78528.055941$
$-(1.0/14.0)*1.0 = 78527.984513$
$-(1.0/15.0)*1.0 = 78527.917846$
$-(1.0/16.0)*1.0 = 78527.855346$
$-(1.0/17.0)*1.0 = 78527.796523$
$-(1.0/18.0)*1.0 = 78527.740967$
$-(1.0/19.0)*1.0 = 78527.688335$

Erreur $= (78543 - 78498)/78498 = 5.10^{-4}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à 3.10^{-4} si on va au bout des calculs (=(78527-78498)/78498).

Calculs pour 10^5

$\text{res} = \text{Li}(10^5) = 9629.0$
$-(1.0/2.0)*25.0 = 9616.500000$
$-(1.0/3.0)*8.0 = 9613.833333$
$-(1.0/4.0)*4.0 = 9612.833333$
$-(1.0/5.0)*3.0 = 9612.233333$
$-(1.0/6.0)*2.0 = 9611.900000$
$-(1.0/7.0)*2.0 = 9611.614286$
$-(1.0/8.0)*2.0 = 9611.364286$
$-(1.0/9.0)*2.0 = 9611.142063$
$-(1.0/10.0)*2.0 = 9610.942063$
$-(1.0/11.0)*2.0 = 9610.760245$
$-(1.0/12.0)*2.0 = 9610.593579$
$-(1.0/13.0)*2.0 = 9610.439732$

Erreur $= (9616 - 9592)/9592 = 2.10^-3$ si on s'arrête à la racine carrée et divisée par 2 si on va au bout des calculs.

Calculs pour 10^4

$\text{res} = \text{Li}(10^4) = 1245.0$
$-(1.0/2.0)*25.0 = 1232.500000$
$-(1.0/3.0)*8.0 = 1229.833333$
$-(1.0/4.0)*4.0 = 1228.833333$
$-(1.0/5.0)*3.0 = 1228.233333$
$-(1.0/6.0)*2.0 = 1227.900000$
$-(1.0/7.0)*2.0 = 1227.614286$
$-(1.0/8.0)*2.0 = 1227.364286$
$-(1.0/9.0)*1.0 = 1227.253175$
$-(1.0/10.0)*1.0 = 1227.153175$
$-(1.0/11.0)*1.0 = 1227.062266$
$-(1.0/12.0)*1.0 = 1226.978932$
$-(1.0/13.0)*1.0 = 1226.902009$

Erreur $= (1232 - 1229)/1229 = 2.10^{-3}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui reste à 2.10^{-3} (en négatif) si on va au bout des calculs (=(1226-1229)/1229).

Calculs pour 10^3

res $= \mathrm{Li}(10^3) = 177.0$
$-(1.0/2.0) * 31.0 = 161.500000$
$-(1.0/3.0) * 4.0 = 160.166667$
$-(1.0/4.0) * 3.0 = 159.416667$
$-(1.0/5.0) * 2.0 = 159.016667$
$-(1.0/6.0) * 2.0 = 158.683333$
$-(1.0/7.0) * 1.0 = 158.540476$
$-(1.0/8.0) * 1.0 = 158.415476$
$-(1.0/9.0) * 1.0 = 158.304365$

Erreur $= (161 - 168)/168 = -4.10^{-2}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui devient -5.10^{-2} si on va au bout des calculs (=(158-168)/168).