

Formalisation analytique du crible de Goldbach dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, rectification des heuristiques de Denise Vella-Chemla, gemini, juillet 2026.

Introduction et formalisme dans le tore

Soit $n \in 2\mathbb{N}$ un entier pair supérieur à 4. On étudie l'espace des candidats $x \in [0, \frac{n}{2}]$. L'approche de Denise Vella-Chemla¹ consiste à projeter l'action du crible d'Ératosthène dans le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ via les applications de projection des parties décimales pour chaque niveau de crible $r \in [2, \lfloor \sqrt{n} \rfloor]$:

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \left\{ \frac{x}{r} \right\} \\ g_r(x) &= \left\{ \frac{n-x}{r} \right\} = \left\{ \frac{n}{r} \right\} - \left\{ \frac{x}{r} \right\} \pmod{1} \end{aligned}$$

Un candidat x est éliminé si $x \in \ker(f_r) \cup \ker(g_r)$, ce qui équivaut aux congruences classiques $x \equiv 0 \pmod{r}$ ou $x \equiv n \pmod{r}$.

Analyse combinatoire des noyaux et périodicité

L'examen structurel montre que le cardinal de l'union des noyaux sur une période de longueur r dépend strictement de la relation de divisibilité entre n et r :

$$\#((\ker(f_r) \cup \ker(g_r)) \cap [0, r-1]) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \mid n \\ 2 & \text{si } r \nmid n \end{cases} \quad (1)$$

Sur l'intervalle d'étude, le nombre maximal théorique d'éliminations isolées pour un niveau r donné est donc de $2 \lfloor \frac{n}{2r} \rfloor$.

Correction théorique de la limite de la factorielle

L'introduction empirique d'un facteur de filtration en $\frac{1}{(r-1)!}$ visant à modéliser l'orthogonalité des cribles successifs mène à la formulation quantitative :

$$S(n) = \sum_{2 \leq r \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2r} \right\rfloor \frac{2}{(r-1)!} \approx n(e-2) \approx 0.718n \quad (2)$$

Expérimentalement, la prise en compte des cas $r \mid n$ abaisse ce ratio à $\alpha \approx 0.4432$.

Objection algébrique (validation du crible)

L'indépendance des noyaux modulo r ne suit pas une loi factorielle. Selon le **Théorème des restes chinois**, pour deux niveaux r_1 et r_2 premiers entre eux, les structures de congruences s'intersectent de manière multiplicative sur la période $r_1 r_2$.

1. Voir <https://denisevellachemla.eu/papillons-sapins.pdf>.

Pour formaliser rigoureusement la convergence observée ($\alpha \approx 0.4432 < 0.5$), l'analogie correcte doit être établie avec le **Crible de Selberg** ou de **Brun**. La proportion de survivants (non-éliminés) après application de tous les niveaux de crible associés aux nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$ est minorée par le produit de Mertens :

$$\prod_{p \leq \sqrt{n}, p \nmid n} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{p \leq \sqrt{n}, p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{2C_2 e^{-2\gamma}}{\log^2(\sqrt{n})} \quad (3)$$

où C_2 est la constante des nombres premiers jumeaux et γ la constante d'Euler.

Conclusion

L'approche par les parties décimales mod 1 offre une visualisation géométrique excellente de la distribution des restes. Cependant, le coefficient de stabilité asymptotique 0.4432 calculé par l'auteur doit être interprété non pas comme une propriété de la série de Taylor de e , mais comme la manifestation de la densité locale des entiers non criblés sur de petites et moyennes périodes arithmétiques.