

Modélisation de la conjecture de Goldbach en algèbre min-plus par calcul des centres de graphes triangulaires, Denise Vella-Chemla, mai 2026

1. Introduction

La conjecture de Goldbach, énoncée en 1742, stipule que tout entier pair $n \geq 4$ est la somme de deux nombres premiers. Malgré des vérifications massives par ordinateur, aucune preuve générale n'a encore été acceptée par la communauté mathématique.

Dans cette note, nous proposons une approche par la théorie des graphes : nous modélisons les décompositions de Goldbach comme les centres d'un graphe triangulaire T particulier. Nous montrons que l'existence d'au moins deux centres dans T (un centre trivial n'apportant pas de connaissance et un autre) impliquerait la validité de la conjecture. Cependant, nous ne parvenons pas à démontrer cela. Cependant, l'approche est synthétisée ci-dessous car elle montre le lien qui existe entre la conjecture de Goldbach, le calcul de plus courts chemins en utilisant la distance de Manhattan, et l'algèbre min-plus

2. Définitions et construction du graphe

2.1 Ensembles X_n et Y_n , graphe triangulaire T .

Soit n un entier pair ≥ 6 . Définissons :

$$X_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ un nombre premier}\} \cup \{0, n\},$$
$$Y_n = \{n - p_k \mid p_k \in X_n\} \cup \{0, n\}.$$

Exemple :

Pour $n = 8$,

$$X_{16} = \{0, 3, 5, 8\} \quad Y_{16} = \{8, 5, 3, 0\}$$

Le graphe grille $G = (S, A)$ est défini par :

- son ensemble de sommets S :

$$S = \{(x, y) \mid x \in X_n, y \in Y_n\}.$$

- son ensemble d'arêtes, constitué d'arêtes horizontales et verticales entre sommets adjacents (séparés par une distance de Manhattan égale à 1).
- La fonction de numérotation f , qui énumère les sommets du premier au dernier dans l'ordre de lecture habituel, c'est-à-dire ligne par ligne, et dans chaque ligne, colonne par colonne.

Le graphe triangulaire T est la partie de G restreinte aux sommets (x, y) avec $x \geq y$ (il contient les sommets situés sous la diagonale principale).

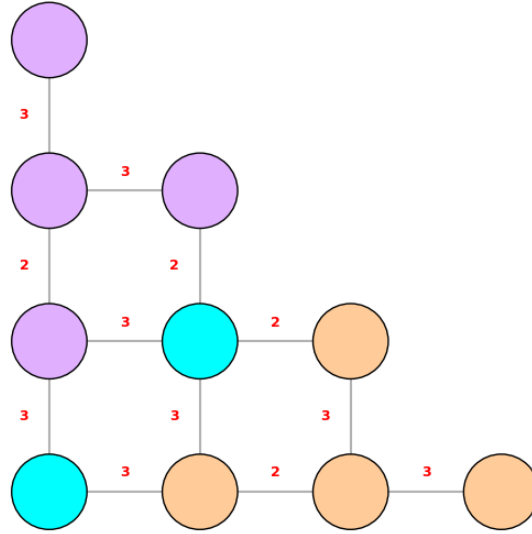


FIGURE 1 : $n = 8$

Les sommets sont numérotés de haut en bas et dans chaque ligne de gauche à droite, ils sont en correspondance biunivoque avec les points du plan cartésien qui leur correspondent.

2.3 Étiquetage des arêtes

Les arêtes sont orientées de haut en bas et de gauche à droite. On les étiquette par les écarts entre nombres premiers successifs, qui sont éléments de la suite ordonnée $\Delta_n = [s_1, s_2, \dots, s_k]$, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 3 \text{ (premier saut de 0 au premier nombre premier impair 3),} \\ s_i = p_{i+1} - p_i \text{ pour } 2 \leq i \leq k - 1 \text{ (sauts entre nombres premiers consécutifs),} \\ s_k = n - \max\{p \in X_n \mid 3 \leq p \leq n - 3\} \\ \text{(dernier saut entre le plus grand nombre premier } \leq n - 3, \text{ et } n\text{).} \end{array} \right.$$

2.4 Distance et excentricité

Définissons les notions de théorie des graphes intervenant dans la modélisation : la notion de *distance entre 2 sommets*, la notion d'*excentricité d'un sommet*, et la notion de *centre d'un graphe*.

- *Distance entre 2 sommets* : dans T , la distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin, un ensemble d'arêtes orientées successives, reliant ces sommets ; la longueur d'un chemin est la somme des poids des arêtes constituant ce chemin ; les arêtes étant étiquetées par des écarts entre nombres premiers, la longueur d'un chemin de la source du graphe S (en haut à gauche) vers tout point du graphe qui n'est pas sur le bord gauche du triangle est la somme de deux nombres premiers $p + q$, avec le nombre premier p qui est égal à la somme des étiquettes des arêtes verticales du chemin et le nombre premier q qui est égal à la somme des étiquettes des arêtes horizontales du chemin.
- *Excentricité $e(s)$ d'un sommet s* : elle est définie ainsi :

$$e(s) = \max\{d(s, s') \mid s' \in S_T\}.$$

- Centre du graphe T : Un sommet s est un centre du graphe T si

$$e(s) = \min\{e(s') \mid s' \in S_T\}.$$

Exemple : pour $n = 16$, $\Delta_{16} = [3, 2, 2, 4, 2, 3]$ (qui sont les écarts entre 0 et 3, 3 et 5, 5 et 7, 7 et 11, 11 et 13 et enfin, 13 et 16).

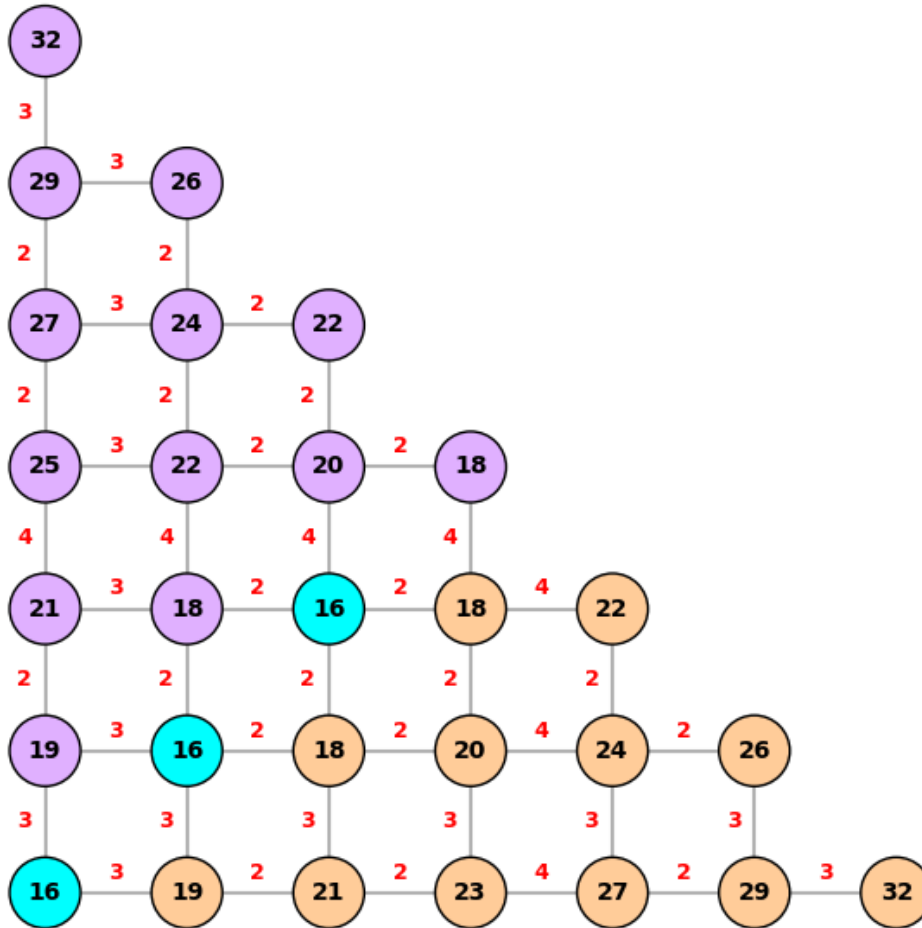


FIGURE 2 : graphe triangulaire T pour $n = 16$.

3. Propriétés-clés du graphe T

3.1 Connexité de T

Lemme 1 : T est connexe.

Preuve :

- T contient les sommets $(0, n)$ (dit “source” S) et $(n, 0)$ (dit “puits” P);
- Il existe un chemin monotone (dans lequel x ou y augmente lors de la traversée de chaque arête du chemin) entre tout sommet S et (x, y) d’une part, et entre (x, y) et P d’autre part;

3.2. L'excentricité de tout sommet s est calculable en comparant les seuls 2 plus courts chemins qui mène de s à S et de s à P .

Lemme 2 : $\forall s', d(s, s') \leq d(s, P)$ et $d(s, s') \leq d(s, S)$.

Preuve :

- Dans un graphe grille, les distances les plus grandes depuis s sont celles de s vers les coins S et P .
- Les autres sommets s' sont "plus proches" de s que ne le sont S ou P , donc leur distance à s est inférieure ou égale à $\max(d(s, S), d(s, P))$. Trois preuves visuelles de ces distances qui sont maximales entre un point et S ou un point et P sont fournies en annexe.
- Calcul des excentricités : on peut remplacer $d(s, P)$ par $2n - p - q$ et $d(s, S)$ par $p + q$ dans le calcul de l'excentricité par calcul du maximum ci-dessus car ces valeurs sont celles qui nous ont servi à définir les coordonnées des sommets du graphe, et qu'on peut remplacer la longueur d'un chemin dans le graphe par la distance de Manhattan séparant dans le plan euclidien les points correspondants aux deux sommets :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

3.3. Excentricité des sommets.

Lemme 3 : Pour tout sommet $s = (p, q)$ de T , son excentricité est donnée par :

$$e(s) = \max(d(s, S), d(s, P)), \text{ avec } S = (0, n) \text{ et } P = (n, 0).$$

3.4. Centres et décompositions de Goldbach

Théorème 1 : Les sommets de T , d'excentricité n , s'il en existe et qui seraient différents du sommet à la "pointe" du graphe T lorsqu'on plonge le graphe dans le plan euclidien, (i.e. en bas à gauche sur le diagramme), correspondent aux décompositions de Goldbach de n , c'est-à-dire aux sommets (p, q) avec $p + q = n$ et p et q premiers.

Si $\max(2n - p - q, p + q) = n$ alors deux cas sont possibles :

- si le maximum est $2n - p - q$, on a $2n - p - q = n$ et donc $n = p + q$;
- si le maximum est $p + q$, on a directement $n = p + q$.

En conclusion, les centres du graphe T , si leur excentricité (i.e. le minimum de toutes les excentricités des sommets du graphe) est n , correspondent aux décompositions de Goldbach de n . Mais on n'est pas sûr qu'un centre d'excentricité n existe dans le graphe triangulaire privé de sa pointe.

4. Utilisation du calcul matriciel dans l'algèbre (min, plus) pour le calcul de plus court chemin par l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall

Le calcul des plus courts chemins de tout sommet vers tout sommet d'un graphe (et donc en particulier vers les deux sommets source S et puits P) est effectué en suivant l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall et en effectuant les calculs matriciels dans l'algèbre dite (min, plus). Dans cette

algèbre, l'addition est remplacée par le calcul du minimum, et la multiplication est remplacée par l'addition. Le calcul des excentricités s'effectue en utilisant une matrice d'adjacence entre les sommets du graphe triangulaire. La présentation de l'algorithme de calcul de plus court chemin par cet algorithme se trouve dans l'article de Bernard Roy par aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences en 1959, "Transitivité et connexité"¹.

Ci-dessous est fournie la matrice initiale des distances entre sommets pour $n = 10$. Tous les éléments de la matrice sont initialisés à la valeur $+\infty$ (noté ∞) car on cherche un chemin le plus court possible et que $\min(x, +\infty) = x$. Les éléments de la diagonale de la matrice sont initialisés à 0 (car la distance de tout sommet à lui-même est nulle) et les écarts entre nombres premiers successifs (ou bien 3 ou bien l'écart entre le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $n - 3$ et le nombre n) sont positionnés aux éléments adéquats de la matrice, du fait de la numérotation des sommets².

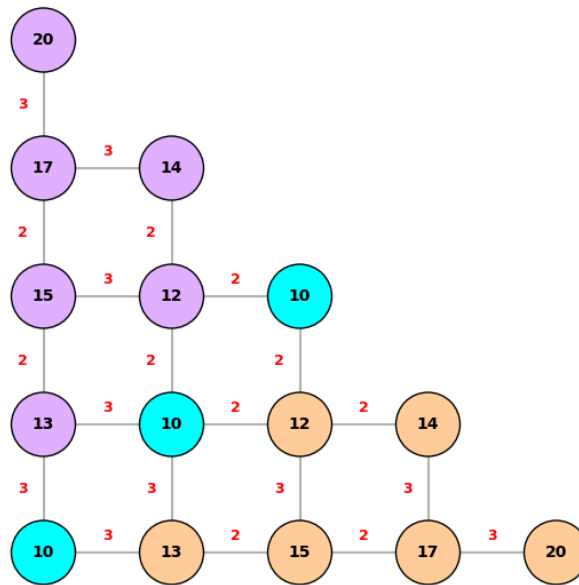


FIGURE 3 : $n = 10$

Ci-dessous la numérotation des sommets et l'étiquetage des arêtes.

1. Roy, B., "Transitivité et connexité". C. R. Acad. Sci., Paris, vol. 249, 1959, p. 216-218. Voir <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3201c/f222.item>.

2. Remarque : la matrice est toujours de taille $\frac{\pi(n-3)(\pi(n-3)+1)}{2}$ avec $\pi(x)$ la notation habituelle pour le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

Matrice terminale des excentricités, calculée par l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall de calcul du plus court chemin. Les décompositions de Goldbach $10 = 3+7$ et $10 = 5+5$ sont en correspondance avec les 2 occurrences du nombre 10 de la première ligne.

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 10 & 13 & 15 & 17 & 20 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 7 & 10 & 12 & 14 & 17 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 9 & 11 & 14 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 5 & 8 & 10 & 12 & 15 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 8 & 5 & 7 & 9 & 12 \\ 10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 10 & 7 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 3 & 6 & 8 & 10 & 13 \\ 10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 7 & 10 \\ 12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 8 & 5 & 3 & 5 & 8 \\ 14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 10 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 10 & 7 & 10 & 5 & 8 & 10 & 3 & 6 & 8 & 10 & 0 & 3 & 5 & 7 & 10 \\ 13 & 10 & 7 & 8 & 5 & 7 & 6 & 3 & 5 & 7 & 3 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 5 & 8 & 5 & 3 & 5 & 5 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 3 & 7 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 20 & 17 & 14 & 15 & 12 & 10 & 13 & 10 & 8 & 6 & 10 & 7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On fournit ci-dessous, en ne notant pas les éléments initialisés à la valeur ∞ pour que la lecture en soit plus aisée, les 4 premières matrices pour les nombres $n = 6, 8, 10, 12$. Le positionnement bizarre des éléments dans les matrices fait qu'on ne comprend absolument pas ce qui pourrait provoquer l'apparition systématique du nombre n après application de l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall (qui finit par remplir complètement la matrice, du fait que le graphe est connexe). Les matrices sont symétriques, ont leur déterminant et leur trace nuls.

exemple 1 : $n = 6$, points = $[0, 3, 6]$, écarts = $[3, 3]$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & & \\ 3 & 0 & 3 & & \\ & & 3 & 0 & 3 \\ & & & 3 & 0 & 3 \\ & & & & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

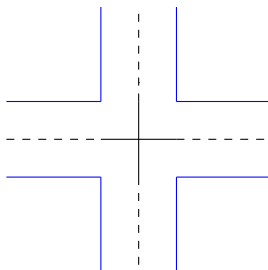
exemple 2 : $n = 8$, points = $[0, 3, 5, 8]$, écarts = $[3, 2, 3]$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & & & & & & \\ 3 & 0 & 3 & 2 & & & & & \\ & & 3 & 0 & & 2 & & & \\ & & & & 0 & 3 & & & \\ & & & & & & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 & 0 & & 3 \\ & & & & & & & & 3 & & 0 & 2 \\ & & & & & & & & & 3 & 2 & 0 & 3 \\ & & & & & & & & & & & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 11 & 13 & 16 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 10 & 13 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 5 & 7 & 10 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 6 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 5 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 5 & 6 & 3 & 5 & 0 & 2 & 5 \\ 13 & 10 & 7 & 8 & 5 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 16 & 13 & 10 & 11 & 8 & 6 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Faire tendre n vers 1

Il faut avoir à l'esprit que se placer dans l'algèbre min-plus chamboule toute appréhension classique de la notion de distance : ci-dessous, on montre le "cercle-unité", i.e. l'ensemble des points à distance min-plus égale à 1 de l'origine.

Pour la norme min, la courbe unité (bleue) est :



Ce "cercle-unité", appelons-le plutôt courbe unité, n'est ni fermé, ni connexe (on ne peut pas aller de n'importe quel point lui appartenant à n'importe quel autre point lui appartenant sans en "sortir").

Pour illustrer la modification de la notion de distance, on voit que le point $(0.2, 10)$ (de distance à l'origine 0.2) est "plus près" de l'origine que le point $(0.5, 0.5)$ (de distance à l'origine 0.5), alors qu'il en est bien plus loin "à vol d'oiseau".

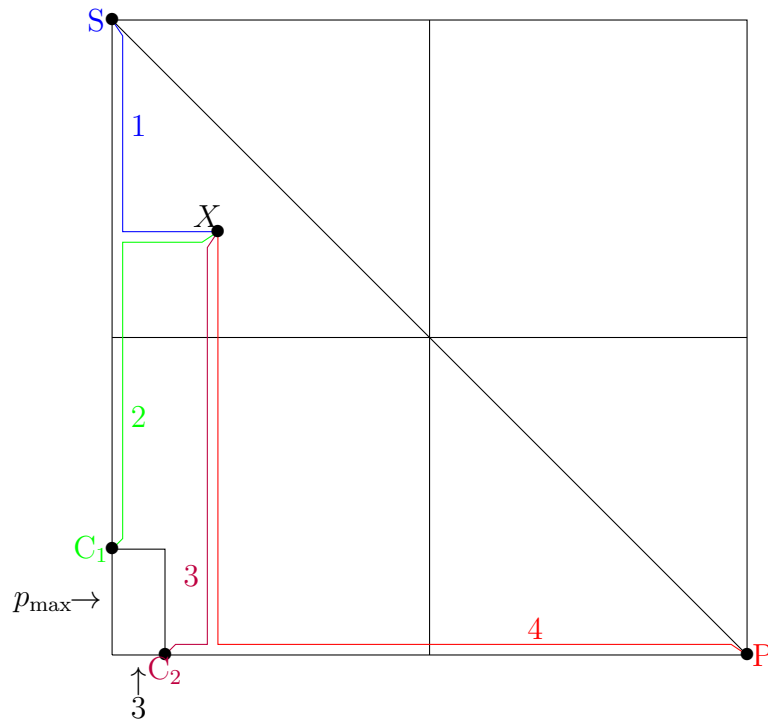
Si on effectue une mise à l'échelle des carrés Goldbach qui sous-tendent les graphes triangulaires (isocèles rectangles) pour que leur côté vaille 1, alors les points correspondant aux décompositions de Goldbach sont tous à distance $1/2$ des points S et P . On peut voir la correspondance entre l'addition et la multiplication comme le fait de noter la somme $3 + 5 = 8$ sur l'hyperbole d'équation $xy = 8$ au point de coordonnées $(3, 5)$.

7. Conclusion

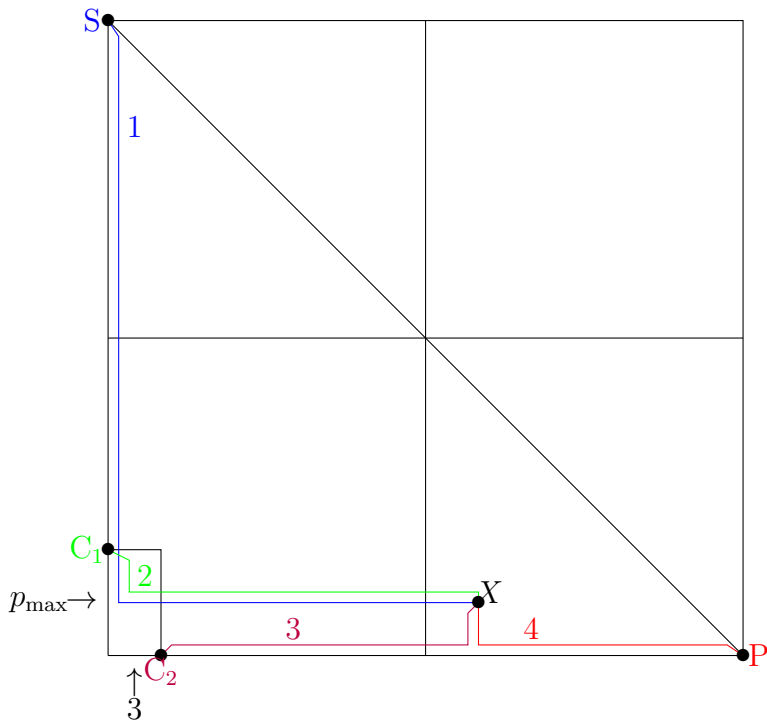
L'approche présentée ici fait comprendre géométriquement, graphiquement, certaines propriétés difficiles à appréhender de façon purement algébrique. Malheureusement, l'impossibilité de démontrer, sans utiliser des propriétés arithmétiques des nombres premiers, telles que la divisibilité par exemple, que les matrices, une fois l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall appliqué, contiennent bien un élément égal à n au moins ne permet pas d'utiliser cette approche pour démontrer la conjecture de Goldbach. On lui conservera son caractère pédagogique pour présenter la conjecture de Goldbach et les notions de sommet, arête, excentricité, centre en théorie des graphes, ainsi que l'algorithme informatique de Roy-Floyd-Warshall de calcul de plus court chemin.

Annexe : il suffit de considérer les distances à la source S et au puits P dans le graphe triangulaire épointé T

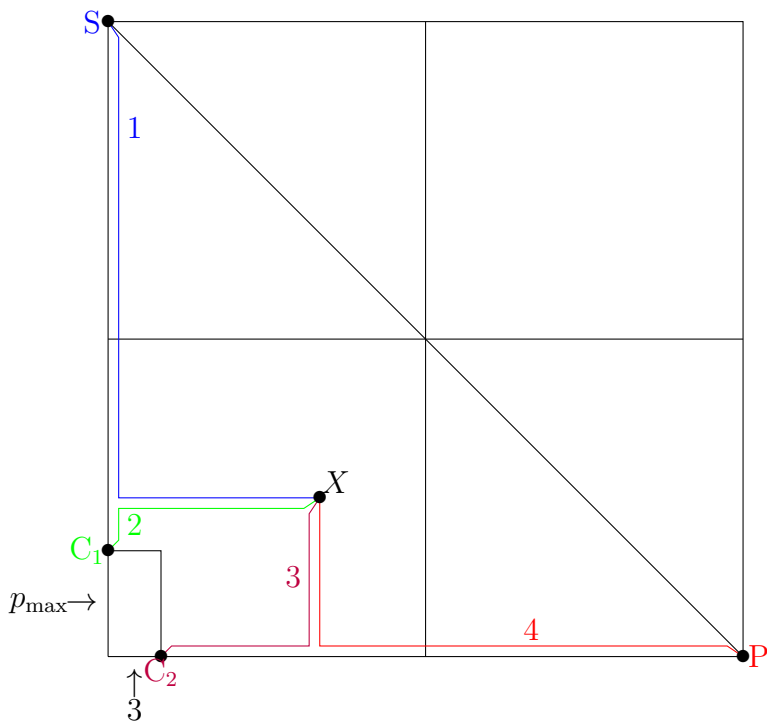
Preuves sans mots du fait qu'on peut ne tenir compte que des seules longueurs des chemins d'un point X vers S et de ce point X vers P pour calculer son excentricité (on a dessiné au mieux les chemins dont les longueurs sont des distances de Manhattan dans le plan euclidien, les chemins partent des points et aboutissent aux points, les petits détours en diagonale sont utiles pour écarter un peu les chemins des bords pour qu'ils soient plus visibles ; la notation $\ell(k)$ désigne la longueur du chemin k , les numéros des chemins étant indiqués en couleur) :



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(4) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$