Tester par programme les théorèmes de Mertens (Denise Vella-Chemla, mars 2024)

Étonnée d'avoir découvert hier par programme la presque-égalité ci-après :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \simeq 2\sqrt{n} + \gamma'$$

avec $\gamma' < 2$, jusqu'à 10^8, dont on se demande si elle serait démontrable, ou si elle est seulement un mirage provoqué par des erreurs de programmation ou d'arrondis, on souhaite tester, toujours par programme, les théorèmes de Mertens.

L'article de Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Mertens attribue trois théorèmes à Mertens. Dans la suite, la lettre p désigne toujours un nombre premier.

Théorème 1 : Pour $n \geq 1$,

$$\left| \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \ln n \right| \; < \; 2.$$

Théorème 2 : Pour $n \geq 2$, avec M désignant la constante de Meissel-Mertens (approximativement égale à 0.261497...),

$$\left| \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \ln \ln n - M \right| < \frac{4}{\ln(n+1)} + \frac{2}{n \ln n}.$$

Théorème 3 : Pour $n \geq 2$, avec e la base du logarithme népérien et γ la constante d'Euler-Mascheroni,

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

L'article de Mertens est visionnable ici : lien. Cet article étant écrit en allemand, on a encadré les éléments qui correspondent aux 3 théorèmes (il y a des différences pour le troisième théorème).

Voici le programme et ses résultats pour le théorème 2, pour des puissances successives de 10.

```
import math
from math import log, cos, pi, sqrt, e
def premier(atester):
    if atester in [0, 1]: return False
    if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
    k = 2
    while True:
        if k * k > atester: return True
        else:
            if atester % k == 0: return False
            else: k = k + 1
```

```
somme = 1
nmax = 101
for n in range(2,nmax):
        if premier(n):
                somme = somme+1/n
        if n == nmax-1:
                print('= ', n)
                print('S=somme des inverses des premiers jusqu a n = ',somme)
                print('S-ln(ln(n)-M = ',somme-log(log(n))-0.261497)
                print('4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = ', (4/log(n+1))+(2/(n * log(n))))
```

Les résultats du programme du théorème 2 sont :

```
n = 100
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 2.802817201048871
S-ln(ln(n))-M = 1.0141405752409698
4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = 0.8710592061611592

n = 1000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 3.1980801271750883
S-ln(ln(n)-M = 1.003938393259023
4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = 0.5792650654452169

n = 10000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 3.483059947233565
S-ln(ln(n)-M = 1.0012361408657187
4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = 0.43431148162186056

n = 100000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 3.7052721790472813
S-ln(ln(n)-M = 1.0003048213652255
4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = 0.34743702092358486

n = 1000000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 3.887328099567694
S-ln(ln(n)-M = 1.0000391850916834
4/ln(n+1)+2/(n ln(n)) = 0.289529778410152
```

Sans fournir le programme, voici les résultats illustrant le théorème 1 de Mertens :

```
n = 100
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 4.369470874998981
S-ln(n) = -0.23569931098911123

n = 1000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 6.609510475393042
S-ln(n) = -0.2982448035890952

n = 10000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 8.890863604287127
S-ln(n) = -0.3194767676890571
```

```
n = 100000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 11.184294953916854
S-ln(n) = -0.32863051105337426

n = 1000000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 13.483585396239128
S-ln(n) = -0.3319251617251453

n = 10000000
S=somme des inverses des premiers jusqu a n = 15.785700405801178
S-ln(n) = -0.3323952451571426
```

Et enfin les résultats, concernant le théorème 3 de Mertens.

n = 100
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.12031729047493521
$e^\gamma/\ln n =$ 0.3867549615016125
Diff = -0.26643767102667726

n = 1000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.08096526350684251
$e^\gamma/\ln n =$ 0.257836641001075
Diff = -0.17687137749423248

n = 10000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.060884692455838364
$e^\gamma/\ln n =$ 0.19337748075080624
Diff = -0.13249278829496788

n = 100000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.048752917851015085
$e^\gamma/\ln n =$ 0.154701984600645
Diff = -0.10594906674962991

n = 1000000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.040638210171648585
$e^\gamma/\ln n =$ 0.1289183205005375
Diff = -0.08828011032888891

n = 10000000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.03483377452961803
$e^\gamma/\ln n =$ 0.11050141757188929
Diff = -0.07566764304227126

n = 100000000
P=prod des un moins inverses des premiers jusqu a n = 0.030479721610591266
$e^\gamma/\ln n =$ 0.09668874037540312
Diff = -0.06620901876481186

Cela illustre au moins les minuscules nombres dont il est question, pour 10^8 et en-dessous, du moins.