

Triplets spectraux pour zêta

Alain Connes, Caterina Consani et Henri Moscovici

Résumé

Nous proposons et étudions une stratégie pour démontrer l'hypothèse de Riemann à partir d'une réalisation spectrale de ses zéros non triviaux. Notre approche construit des opérateurs autoadjoints $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ obtenus comme perturbations de rang un du triplet spectral associé à l'opérateur d'échelle sur l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. La construction ne fait intervenir que les produits eulériens sur les nombres premiers $p \leq x = \lambda^2$ et elle produit des opérateurs autoadjoints dont les spectres coïncident, avec une remarquable précision numérique, avec les premiers zéros non triviaux de $\zeta(\frac{1}{2} + is)$, même pour de petites valeurs de x . Le fondement théorique repose sur le cadre introduit dans [4] ainsi que sur l'extension dans [7] du théorème classique de Carathéodory-Fejér pour les matrices de Toeplitz, qui garantit l'auto-adjonction nécessaire. Des expériences numériques montrent que les spectres des opérateurs $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ convergent vers les zéros de $\zeta(\frac{1}{2} + is)$ lorsque les paramètres $N, \lambda \rightarrow \infty$. Une démonstration rigoureuse de cette convergence établirait l'hypothèse de Riemann. Nous calculons ensuite les déterminants régularisés $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z)$ de ces opérateurs et discutons de leur rôle analytique dans le contrôle et la démonstration potentielle du résultat précédent, en montrant que, convenablement normalisés, ils convergent vers la fonction de Riemann Ξ .

1 Introduction

Cet article¹ s'inspire de la réalisation spectrale, initiée dans [4], des zéros de basse énergie de la fonction zêta de Riemann, autrement dit de la partie infrarouge du spectre d'un opérateur autoadjoint. Un autre élément clé est la généralisation, démontrée dans [7], d'un résultat fondamental sur les matrices de Toeplitz, corollaire du théorème de structure de Carathéodory-Fejér (1911) [2]. Cette généralisation nous fournit une vaste classe de fonctions dont les zéros sont situés sur la droite critique $\Re(s) = 1/2$, grâce à l'auto-adjonction des matrices concernées et au théorème de Hurwitz sur les zéros des limites uniformes de fonctions holomorphes. Forts de ces outils, nous élaborons une démarche, parfaitement en

1. Ceci est la traduction en français de l'article arxiv <https://arxiv.org/pdf/2511.22755.pdf> : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

accord avec l'article de Riemann [11], qui associe au produit eulérien restreint, ne faisant intervenir que les nombres premiers $p \leq x$, une fonction dont les zéros sont sur la droite critique.

La grande surprise réside alors dans le fait que les zéros de cette fonction fournissent des approximations de haute précision des premiers zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann, en utilisant un nombre remarquablement faible de termes du produit eulérien. Par exemple, en utilisant uniquement les nombres premiers ≤ 13 , on obtient pour les 50 premiers zéros une précision extraordinaire, avec des erreurs allant de $2,5 \times 10^{-55}$ pour le premier zéro à environ 10^{-3} pour le cinquantième. La probabilité d'obtenir de telles approximations précises par hasard est d'environ 10^{-1235} , ce qui exclut de fait toute coïncidence et suggère une relation structurelle profonde entre les produits eulériens restreints et la position des zéros. La méthode que nous utilisons est générale, de même que la démonstration que toutes les valeurs d'approximation se situent exactement sur la droite critique.

En fait, nous construisons des triplets spectraux associés aux perturbations de rang un $D_{\log}^{(\lambda,N)}$ de l'opérateur d'échelle $D_{\log}^{(\lambda)}$ sur l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ avec des conditions aux limites périodiques. Cette construction repose sur la restriction QW_{λ}^N de la forme quadratique de Weil à l'espace linéaire $E_N = E_N(\lambda)$ des fonctions-tests engendrées par les $2N + 1$ fonctions propres de $D_{\log}^{(\lambda)}$ associées aux $2N + 1$ valeurs propres de plus petite valeur absolue (c'est-à-dire $\leq N\pi/\log \lambda$), prolongées par 0 à l'extérieur de l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. Nous devons vérifier que la plus petite valeur propre ϵ_N de QW_{λ}^N est simple et que la fonction propre correspondante est paire, c'est-à-dire invariante par symétrie $u \mapsto u^{-1}$. Soit $\delta_N \in E_N$ le vecteur représentant le noyau de Dirichlet, comme approximation de l'évaluation sur la frontière de l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit ϵ_N la plus petite valeur propre de QW_{λ}^N , supposée simple, et ξ le vecteur propre correspondant, supposé pair et normalisé par $\delta_N(\xi) = 1$.*

- (i) *L'opérateur $D_{\log}^{(\lambda,N)} = D_{\log}^{(\lambda)} - |D_{\log}^{(\lambda)}\xi\rangle\langle\delta_N|$ est autoadjoint dans la somme directe $E'_N \oplus E_N^{\perp}$ où, sur le sous-espace $E'_N = E_N/\mathbb{C}\xi$, le produit intérieur est donné par la restriction de la forme quadratique $QW_{\lambda}^N - \epsilon_N\langle|\rangle$.*
- (ii) *Le déterminant régularisé de $D_{\log}^{(\lambda,N)}$ est donné par $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda,N)} - z) = -i\lambda^{-iz}\widehat{\xi}(z)$ où $\widehat{\xi}$ est la transformée de Fourier de ξ pour la dualité $(\mathbb{R}_+^* \mid \mathbb{R})$.*
- (iii) *La transformée de Fourier $\widehat{\xi}(z)$ est une fonction entière, tous ses zéros sont sur la droite réelle et coïncident avec le spectre de $D_{\log}^{(\lambda,N)}$.*

Dans la section 6, nous présentons des preuves numériques remarquables de la convergence des valeurs propres des opérateurs autoadjoints $D_{\log}^{(\lambda,N)}$ vers les zéros de la fonction zêta de Riemann $\zeta(\frac{1}{2} + is)$ lorsque les paramètres N et λ tendent vers l'infini.

Dans la section 7, nous expliquons la stratégie naturelle pour justifier la convergence numérique mentionnée ci-dessus. Elle consiste à entreprendre les premières démarches visant à démontrer la convergence des déterminants régularisés $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - s)$ vers la fonction Ξ de Riemann.

Enfin, la section 8 décrit les étapes manquantes de cette stratégie et la perspective qu'elle ouvre, fondée sur [3], sur les liens entre le monde de la forme quadratique de Weil et celui de la théorie de l'information, telle que développée à travers la théorie des fonctions d'onde prolate de D. Slepian et de ses collaborateurs [15].

2 Préliminaires

2.1 L'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}, dx)$

Dans cette section, nous expliquons les calculs élémentaires qui préparent le terrain à l'introduction de la forme quadratique de Weil QW_λ et de la matrice qui encode cette forme quadratique dans une base naturelle.

Définition 2.1. Soit $L^1(\mathbb{R}, dx)$ l'algèbre de Banach complexe involutive des fonctions intégrables à valeurs complexes sur \mathbb{R} , dont le produit et l'involution sont donnés par

$$f * g(y) := \int f(x)g(y - x)dx \quad (2.1)$$

$$f^*(y) := \overline{f(-y)} \quad (2.2)$$

Nous utilisons la sous-algèbre des fonctions à support compact. Les deux opérations produisent des fonctions à support compact. Nous considérons l'inclusion $L^2([0, L]) \subset L^1(\mathbb{R}, dx)$ obtenue en prolongeant les fonctions par 0 hors de l'intervalle $[0, L]$. En particulier, pour $f, g \in L^2[0, L]$, le support de $f^* * g$ est inclus dans $[-L, L]$.

Nous utilisons également les produits intérieurs $\langle f, g \rangle$ qui sont antilinéaires par rapport à la première variable et linéaires par rapport à la seconde. Le produit intérieur standard $\langle f, g \rangle_2$ est donné par

$$\langle f, g \rangle_2 = \int \overline{f(x)}g(x)dx = (f^* * g)(0) \quad (2.3)$$

En vue de produits scalaires plus complexes, nous calculons des expressions de la forme

$$q(f, g)(y) := (f^* * g)(y) + (f^* * g)(-y) \quad (2.4)$$

qui est une fonction paire de y dépendant antilinéairement de f et linéairement de g . On a

$$(f^* * g)(-y) = \overline{(f^* * g)^*(y)} = \overline{(g^* * f)(y)},$$

par conséquent

$$q(f, g)(y) = (f^* * g)(y) + \overline{(g^* * f)(y)}. \quad (2.5)$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, dénotons par $f_a(x) := f(x - a)$ le translaté de f .

Lemme 2.2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, on a $(f_a)^* * g_a = f^* * g$ et $q(f_a, g_a) = q(f, g)$.*

Démonstration. On a

$$(f_a)^* * g_a(y) = \int (f_a)^*(y - x)g_a(x)dx = \int \overline{(f_a)(x - y)}g_a(x)dx = \int \overline{f(x - a - y)}g(x - a)dx$$

qui est indépendant de a . La seconde égalité découle de (2.4). \square

2.2 La base $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Une base orthonormée naturelle de $L^2([0, L])$ est constituée des fonctions $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définies par :

$$U_n(x) := L^{-\frac{1}{2}} \exp(2\pi i n x / L), \quad \forall x \in [0, L]. \quad (2.6)$$

En appliquant les opérations ci-dessus aux fonctions de base, on obtient, pour $n \neq m$, $y \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} (U_m^* * U_n)(y) &= \int \overline{U_m(x - y)}U_n(x)dx = \frac{1}{L} \int_y^L \exp(2\pi i m(y - x)/L + 2\pi i n x / L)dx \\ &= \frac{\exp(2\pi i m y / L)}{L} \int_y^L \exp(2\pi i (n - m)x / L)dx = \frac{\exp(2\pi i m y / L)}{2\pi i (n - m)} (\exp(2\pi i (n - m)x / L)) \Big|_y^L \\ &= \frac{\exp(2\pi i m y / L)}{2\pi i (n - m)} (1 - (\exp(2\pi i (n - m)y / L))) = \frac{\exp(2\pi i m y / L) - \exp(2\pi i n y / L)}{2\pi i (n - m)} \end{aligned}$$

de telle façon que pour $n \neq m$, $y \in [0, L]$,

$$(U_m^* * U_n)(y) = \frac{\exp(2\pi i m y / L) - \exp(2\pi i n y / L)}{2\pi i (n - m)} \quad (2.7)$$

Le résultat de (2.7) étant symétrique en n, m , implique, en utilisant (2.5), que pour $y \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} (U_m^* * U_n)(y) + (U_m^* * U_n)(-y) &= 2 \Re \left(\frac{e^{2\pi i my/L} - e^{2\pi i ny/L}}{2\pi i(n-m)} \right) \\ &= \frac{\sin(2\pi my/L) - \sin(2\pi ny/L)}{\pi(n-m)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

de telle façon que la fonction paire $q(U_m, U_n)$ est donnée par

$$q(U_m, U_n)(y) = \frac{\sin(2\pi m|y|/L) - \sin(2\pi n|y|/L)}{\pi(n-m)}, \quad \forall y \in [-L, L]. \quad (2.9)$$

Pour $m = n$, on a simplement que, pour $y \in [0, L]$,

$$(U_n^* * U_n)(y) = \frac{1}{L} \int_y^L \exp(2\pi i n(y-x)/L + 2\pi i n x/L) dx = (1 - y/L) \exp(2\pi i ny/L),$$

d'où

$$(U_n^* * U_n)(y) + (U_n^* * U_n)(-y) = 2 \Re((1 - y/L) \exp(2\pi i ny/L)) = 2(1 - y/L) \cos(2\pi ny/L).$$

On obtient donc

$$q(U_n, U_n)(y) = 2(1 - |y|/L) \cos(2\pi ny/L), \quad \forall y \in [-L, L]. \quad (2.10)$$

L'expression explicite de la fonction paire $q(U_n, U_m)(y)$ pour $y \in [0, L]$ est :

$$\begin{aligned} m \neq n & \quad \left| \begin{array}{l} \sin\left(\frac{2\pi my}{L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi ny}{L}\right) \\ \hline \pi(n-m) \end{array} \right. \\ m = n & \quad \left| \begin{array}{l} 2(L-y) \cos\left(\frac{2\pi ny}{L}\right) \\ \hline L \end{array} \right. \end{aligned}$$

La forme sesquilinear QW découle de la formulation de Weil de la formule explicite en théorie des nombres premiers [16], que nous rappelons ci-dessous. Notons $W(\mathbb{R}_+^*)$ la *classe de Weil* des fonctions à valeurs complexes f sur \mathbb{R}_+^* , c'est-à-dire la classe des fonctions à dérivée continue, sauf en un nombre fini de points où $f(x)$ et $f'(x)$ peuvent présenter au plus une discontinuité de première espèce; en un tel point, la valeur de $f(x)$ et $f'(x)$ est définie comme la moyenne des limites à droite et à gauche. De plus, on suppose que les fonctions $f \in W(\mathbb{R}_+^*)$ satisfont l'estimation suivante :

$$f(x) = O(x^\delta), \text{ pour } x \rightarrow 0+, \quad f(x) = O(x^{-1-\delta}), \text{ pour } x \rightarrow +\infty,$$

pour un certain $\delta > 0$. Ces fonctions admettent une transformée de Mellin, notée

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \quad (3.1)$$

Avec la notation supplémentaire $f^\sharp(x) := x^{-1}f(x^{-1})$, la formule explicite de Weil prend la forme (cf [1])

$$\sum_{\rho} \tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty f(x)dx + \int_0^\infty f^\sharp(x)dx - \sum_v \mathcal{W}_v(f), \quad (3.2)$$

où ρ parcourt tous les zéros complexes de la fonction zêta de Riemann, v parcourt toutes les places rationnelles de \mathbb{Q} , les distributions non archimédiennes \mathcal{W}_p sont définies comme

$$\mathcal{W}_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} (f(p^m) + f^\sharp(p^m)), \quad (3.3)$$

et la distribution archimédienne est donnée par

$$\mathcal{W}_{\mathbb{R}}(f) := (\log 4\pi + \gamma) f(1) + \int_1^\infty \left(f(x) + f^\sharp(x) - \frac{2}{x} f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}}. \quad (3.4)$$

Il convient de noter que la somme du membre de gauche de la formule de (3.2), dont le terme général est oscillant, ne converge que sous certaines conditions. Ce défaut de convergence absolue est une caractéristique essentielle de la formule de Riemann pour la fonction $\pi(x)$, qui représente le nombre de nombres premiers inférieurs à x . Dans notre cas, ce problème ne se pose pas puisque nous n'appliquerons la formule explicite qu'aux fonctions convolutives (pour le groupe $*$) de deux fonctions de carré intégrable à support compact, assurant ainsi la convergence absolue de la somme sur les zéros.

Une formulation équivalente, connue sous le nom de formule de Guinand-Weil, utilise la transformée de Fourier.

$$\widehat{F}(s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} F(u) u^{-is} d^*u, \quad d^*u = \frac{du}{u} \quad (3.5)$$

au lieu de la transformation de Mellin (3.1). Le passage d'une formule à l'autre est obtenu en implémentant l'automorphisme

$$f \mapsto \Delta^{1/2}f = F, \quad \text{i.e.} \quad F(x) = x^{1/2}f(x), \quad (3.6)$$

qui respecte le produit de convolution et satisfait les égalités

$$(\Delta^{1/2}f^\sharp)(x) = x^{1/2}f^\sharp(x) = x^{-1/2}f(x^{-1}) = (\Delta^{1/2}f)(x^{-1}).$$

Pour une place rationnelle, en dénotant par $W_v(F) := \mathcal{W}_v(\Delta^{-1/2}F)$, les distributions ci-dessus \mathcal{W}_p prennent la forme suivante :

$$W_p(F) = (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m/2} (F(p^m) + F(p^{-m})), \quad (3.7)$$

alors que la distribution archimédienne $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ devient

$$W_{\mathbb{R}}(F) := (\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^{\infty} (F(x) + F(x^{-1}) - 2x^{-1/2}F(1)) \frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}} d^*x,$$

où $d^*x = dx/x$. Ce dernier peut aussi être s'exprimer comme $W_{\mathbb{R}} = -W_{\infty}$, où

$$W_{\infty}(F) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t) \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt. \quad (3.8)$$

et

$$\theta(t) = -\frac{t}{2} \log \pi + \mathfrak{Im} \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{t}{2} \right) \quad (3.9)$$

est la fonction angulaire de Riemann-Siegel, avec $\log \Gamma(s)$ pour $\Re(s) > 0$ désignant la branche du logarithme réelle pour s réel.

Par polarisation, la forme de Weil donne l'expression sesquilinearéaire

$$QW(f, g) = \Psi(f^* * g), \quad \Psi(F) := W_{0,2}(F) - W_{\mathbb{R}}(F) - \sum_p W_p(F). \quad (3.10)$$

Les composantes $W_{\mathbb{R}}$ et W_p sont comme ci-dessus, et la fonctionnelle $W_{0,2}$ est

$$W_{0,2}(F) = \widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2). \quad (3.11)$$

La forme sesquilinear de Weil possède une propriété d'invariance assez subtile, qui est sa symétrie par inversion $\iota(u) = u^{-1}$, $u \in \mathbb{R}^*$, cette symétrie jouera un rôle important dans sa description explicite.

Lemme 3.1. *La fonctionnelle de Weil Ψ satisfait*

$$\Psi(h) = \Psi^\#(h) + \Psi^\#(h \circ \iota) = \Psi^\#(h + h \circ \iota), \quad (3.12)$$

où $\Psi^\#$ est la distribution sur $[1, \infty)$,

$$\Psi^\# := W_{0,2}^\# - W_{\mathbb{R}}^\# - \sum W_p^\# \quad (3.13)$$

avec les composantes données par

$$W_{0,2}^\#(F) = \int_1^\infty F(x)(x^{1/2} + x^{-1/2})d^*x, \quad (3.14)$$

$$W_{\mathbb{R}}^\#(F) = \frac{1}{2}(\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^\infty \frac{x^{1/2}F(x) - F(1)}{x - x^{-1}}d^*x, \quad (3.15)$$

$$W_p^\#(F) = (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m/2} F(p^m). \quad (3.16)$$

Démonstration. Ceci découle de la construction de Ψ . Notez le facteur $\frac{1}{2}$ dans (3.15). \square

Proposition 3.2. *Soit $\lambda > 1$, $L = 2 \log \lambda$.*

(i) *L'application suivante est une isométrie $\kappa : L^2([0, L], dx) \rightarrow L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$,*

$$\kappa(f)(u) = f(\log(\lambda u)) \quad (3.17)$$

qui induit un isomorphisme $C^\infty([0, L]) \rightarrow C^\infty([\lambda^{-1}, \lambda])$.

(ii) *Soit $f, g \in C^\infty([0, L])$. On a*

$$QW(\kappa(f), \kappa(g)) = \Psi^\#(F), \quad F(u) = q(f, g)(\log u). \quad (3.18)$$

Démonstration. (i) découle du fait que l'application $u \mapsto \log(\lambda u)$ est un difféomorphisme de $[\lambda^{-1}, \lambda]$ vers $[0, L]$ transformant la mesure d^*u en la mesure dx .

(ii) On a, par le lemme (3.1),

$$QW(\kappa(f), \kappa(g)) = \Psi^\sharp(h + h \circ \iota), \quad h = \kappa(f)^* * \kappa(g).$$

Montrons que $h + h \circ \iota = F$. Par le lemme 2.2, on a, avec $a = -\frac{L}{2}$

$$q(f, g) = q(f_a, g_a), \quad f_a(x) := f\left(x + \frac{L}{2}\right), \quad g_a(x) := g\left(x + \frac{L}{2}\right)$$

Ainsi, f_a et g_a ont un support dans $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ et on a $\kappa(f) = f_a \circ \log$, $\kappa(g) = g_a \circ \log$, où \log désigne l'isomorphisme de groupes localement compacts $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Ceci induit un isomorphisme d'algèbres de convolution involutives :

$$\circ \log : L^1(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+^*, d^*x).$$

de telle façon qu'on a :

$$h = \kappa(f)^* * \kappa(g) = (f_a \circ \log)^* * (g_a \circ \log) = (f_a^* * g_a) \circ \log$$

ce qui, en utilisant (2.4), donne :

$$h + h \circ \iota = q(f_a, g_a) \circ \log = q(f, g) \circ \log = F.$$

et donc l'égalité recherchée. \square

3.1 La forme quadratique QW_λ

On note QW_λ la restriction de la forme quadratique QW à $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$, où $d^*u = \frac{du}{u}$. On a :

$$QW_\lambda(f, f) = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt + 2\Re \left(\widehat{f}\left(\frac{i}{2}\right) [\textrm{tex}] \widehat{f}\left(-\frac{i}{2}\right) \right) - \sum_{1 < n \leq \lambda^2} \Lambda(n) \langle f \mid T(n)f \rangle; \quad (3.19)$$

ici $\Lambda(n)$ désigne la fonction de von Mangoldt, et $T(n)$ est l'opérateur autoadjoint borné dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ défini par :

$$\langle f \mid T(n)g \rangle = n^{-1/2} ((f^* * g)(n) + (f^* * g)(n^{-1})). \quad (3.20)$$

Proposition 3.3. ([4, § 2]) *La forme quadratique QW_λ est minorée et semi-continue inférieurement.*

Rappelons qu'une forme quadratique inférieurement semi-continue (lsc) Q sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application inférieurement semi-continue $Q : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$, c'est-à-dire telle que $Q(\xi) \leq \liminf Q(\xi_n)$ lorsque $\xi_n \rightarrow \xi$, vérifiant $Q(\lambda\xi) = |\lambda|^2 Q(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et satisfaisant la loi du parallélogramme :

$$Q(\xi + \eta) + Q(\xi - \eta) = 2Q(\xi) + 2Q(\eta)$$

et également une inégalité de la forme $Q(\xi) \geq -c\|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ reflétant la borne inférieure de q . La forme sesquilinéaire associée (antilinéaire par rapport à la première variable) est donnée sur le domaine $\text{Dom}(Q) := \{\xi \in \mathcal{H} \mid Q(\xi) < \infty\}$ par :

$$Q(\xi, \eta) := \frac{1}{4} (Q(\xi + \eta) - Q(\xi - \eta) + iQ(i\xi + \eta) - iQ(i\xi - \eta)).$$

Soit $V_n : [\lambda^{-1}, \lambda] \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $\kappa(U_n)$, i.e.

$$V_n(u) := U_n(\log(\lambda u)), \quad \forall u \in [\lambda^{-1}, \lambda] \quad (3.21)$$

et soit $E \subset L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ le sous-espace vectoriel engendré par les V_n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.4. ([4, Prop. 2.3]) *L'espace E est un noyau de la forme quadratique $QW_\lambda : L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \rightarrow (-\infty, +\infty]$, qui satisfait, pour tout $f \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$,*

$$QW_\lambda(f, f) = \liminf_{g_n \rightarrow f} QW_\lambda(g_n, g_n), \quad g_n \in E. \quad (3.22)$$

En particulier, la borne inférieure de QW_λ est la limite, lorsque $N \rightarrow \infty$, de la plus petite valeur propre de la restriction de QW_λ à l'espace linéaire engendré E_N des fonctions V_k avec $|k| \leq N$.

3.2 Spectre discret de la forme quadratique de Weil semi-locale QW_λ

À ce stade, nous faisons appel à un résultat fondamental de la théorie générale des formes quadratiques. En adoptant la notation de [12, Ch. 10] d'après la proposition 10.1, à une forme quadratique \mathbf{t} , on associe une application $\mathbf{t}' : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en posant $\mathbf{t}'[x] = \mathbf{t}[x]$ si x appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{t}'[x] = +\infty$ si x n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbf{t})$. Selon la proposition 10.1, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbf{t} est fermé.
2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dans \mathcal{H} pour un certain $x \in \mathcal{H}$ et $\lim_{n, k \rightarrow \infty} \mathbf{t}[x_n - x_k] = 0$, alors $x \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{t}[x_n - x] = 0$.
3. \mathbf{t}' est une fonction semi-continue inférieurement sur \mathcal{H} .
4. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dans \mathcal{H} pour un certain $x \in \mathcal{H}$ et que l'ensemble $\{\mathbf{t}[x_n] : n \in \mathbb{N}\}$ est borné, alors nous avons $x \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{t}[x] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{t}[x_n]$.

D'après la proposition de Hilbert, la condition (3) est satisfaite par la forme quadratique de Weil semi-locale QW_λ , et par conséquent le théorème 10.7 de [12], reproduit ci-dessous, s'applique.

Théorème de représentation pour les formes semi-bornées – *Si \mathbf{t} est une forme fermée semi-bornée inférieurement, densément définie, sur \mathcal{H} , alors l'opérateur $A_\mathbf{t}$ est autoadjoint, et \mathbf{t} est égal à la forme $\mathbf{t}_{(A_\mathbf{t})}$ associée à $A_\mathbf{t}$.*

Ainsi, pour tout $\lambda > 1$, il existe un opérateur autoadjoint non borné inférieurement canonique A_λ dans l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ tel que

$$QW_\lambda(f, f) = \langle A_\lambda f \mid f \rangle. \quad (3.23)$$

Par construction, l'opérateur autoadjoint non borné A_λ est minoré. Il s'agit de montrer qu'il possède un spectre discret. Nous utilisons la proposition 10.6 de [12] :

Proposition 3.5. *Supposons que $A \geq m_A$ soit un opérateur autoadjoint semi-borné inférieurement et que $m < m_A$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application d'immersion $\mathcal{I}_{\mathbf{t}_A} : (\mathcal{D}[A], \|\cdot\|_{\mathbf{t}_A}) \rightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est compacte.*
2. *La résolvante $R_\lambda(A)$ est compacte pour un, donc pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*
3. *$(A - mI)^{-1/2}$ est compact.*
4. *A possède un spectre purement discret.*

Théorème 3.6. *L'opérateur autoadjoint A_λ possède un spectre discret minoré.*

Démonstration. D'après la démonstration de la minoration dans [4], la contribution des nombres premiers non archimédiens à l'opérateur A_λ est bornée, de même que la contribution de l'évaluation de la transformée de Fourier aux pôles. Il suffit donc, pour tout $\lambda > 1$, de considérer la contribution du lieu archimédien à A_λ dans l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$. Après transformation de Fourier, elle est donnée par la multiplication par

$$\partial_t \theta(t) = \frac{1}{2}(\log(|t|) - \log(2) - \log(\pi)) - \frac{1}{48t^2} + O(t^{-4}) \quad (3.24)$$

dont le développement asymptotique permet d'utiliser l'opérateur \mathcal{L} de multiplication (dans la transformée de Fourier) par la fonction qui vaut 1 pour $|t| \leq e$ et $\log(|t|)$ sinon. Notons que le facteur $\frac{1}{2\pi}$ est pris en compte puisque la transformée de Fourier unitaire possède un facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

D'après la proposition 3.5, il suffit de montrer que l'application d'injection $\mathcal{J} : (\mathcal{D}[\mathcal{L}], \|\cdot\|_{\mathfrak{t}_L}) \rightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est compacte. L'application \mathcal{J} est de norme ≤ 1 par construction, et il suffit de montrer que l'image de la boule unité est précompacte au sens suivant :

Soit E un espace métrique. Si l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée, alors les trois le sont, et E est dit précompact :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε ;
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de sous-ensembles de diamètre inférieur à ε ;
3. Toute suite dans E possède une sous-suite de Cauchy.

Nous allons montrer que pour toute fonction positive croissante $\rho : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ telle que $\rho(u) \rightarrow \infty$ lorsque $u \rightarrow \infty$, l'injection I_ρ de l'espace de Hilbert \mathcal{D}_ρ dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ est compacte, où le carré de la norme dans \mathcal{D}_ρ est donné par

$$\|f\|_\rho^2 := \int |\widehat{f}(t)|^2 \frac{\rho(t)}{2\pi} dt \quad (3.25)$$

En fait, on peut utiliser l'isomorphisme logarithme-exponentielle et remplacer l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ par $\mathcal{H} = L^2([-L, L], dx)$ et utiliser la transformée de Fourier ordinaire dans (3.25). Il suffit de montrer que l'image $I_\rho(B)$ de la boule unité B de \mathcal{D}_ρ est précompacte dans \mathcal{H} . Supposons alors $\epsilon > 0$ et montrons qu'on peut recouvrir $I_\rho(B)$ par un nombre fini de boules de rayon ϵ pour la norme de \mathcal{H} . Puisque $\rho(u) \rightarrow \infty$ lorsque $u \rightarrow \infty$, il existe $T < \infty$ tel que

$$\|f\|_\rho^2 \leq 1 \Rightarrow \int_{|t| \geq T} |\widehat{f}(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq (\epsilon/4)^2 \quad (3.26)$$

Ensuite, l'opérateur $\widehat{P}_T P_L$ est un opérateur compact dans $L^2(\mathbb{R})$ et par conséquent l'image $\widehat{P}_T P_L(C)$ de la boule unité C de $L^2(\mathbb{R})$ est précompacte dans $L^2(\mathbb{R})$. Par construction, $I_\rho(B) \subset \mathcal{H} = L^2([-L, L], dx) = P_L L^2(\mathbb{R})$, donc l'application

$$\widehat{P}_T I_\rho : \mathcal{D}_\rho \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

est compacte. Il existe donc un ensemble fini de fonctions $\{f_j\}_{j \in J} \subset B \subset \mathcal{D}_\rho$, tel que

$$\forall f \in B, \exists j \mid \|\widehat{P}_T(f - f_j)\|^2 \leq (\epsilon/2)^2.$$

On a donc

$$\forall f \in B, \exists j \in J \quad \text{such that} \quad \int_{|t| \leq T} |\widehat{f}(t) - \widehat{f}_j(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq (\epsilon/2)^2$$

D'après (3.26), il s'ensuit que pour tout $f \in B$, il existe j tel que

$$\begin{aligned} \|f - f_j\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int |\widehat{f}(t) - \widehat{f}_j(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{|t| \leq T} |\widehat{f}(t) - \widehat{f}_j(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} + \int_{|t| \geq T} |\widehat{f}(t) - \widehat{f}_j(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq (\epsilon/2)^2 + (\epsilon/2)^2 < \epsilon^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.26) et l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\left(\int_{|t| \geq T} |(\widehat{f}(t) - \widehat{f}_j)(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/2} \leq \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2.$$

□

Corollaire 3.7. *Soit $\lambda > 1$. Il existe un élément $\phi \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ tel que $A_\lambda(\phi) = \mu_\lambda \phi$ où μ_λ est la plus grande borne inférieure du spectre de A_λ .*

Remarquons que l'on ne peut pas affirmer que $\mu_\lambda \geq 0$. On a cependant

$$\lambda > \lambda' \Rightarrow \mu_\lambda \leq \mu_{\lambda'} \tag{3.27}$$

En effet, il convient de noter tout d'abord que les fonctions de test régulières par morceaux forment un noyau pour la forme quadratique de Weil QW_λ , puisque les fonctions régulières le font déjà d'après [4]. De plus, la transformée de Fourier des fonctions régulières par morceaux f à support compact est de complexité $O(|s|^{-1})$ puisque la dérivée f' est une mesure bornée. Par conséquent, les fonctions régulières par morceaux appartiennent au domaine de QW_λ . On utilise alors l'équivalence (avec f régulière par morceaux).

$$\nu \leq \mu_\lambda \iff QW_\lambda(f, f) \geq \nu \|f\|^2, \quad \forall f \mid \text{support}(f) \subset [\lambda^{-1}, \lambda]$$

Corollaire 3.8. *Si la limite de la fonction décroissante μ_λ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ est égale à 0, alors l'hypothèse de Riemann est vérifiée.*

4 La matrice de QW_λ dans la base V_n

Nous calculons maintenant la matrice de la forme sesquilinearaire $QW_\lambda(f, g) = \Psi(f^* * g)$ dans la base $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. D'après la proposition 3.2 et l'égalité $V_n = \kappa(U_n)$, nous obtenons

$$QW_\lambda(V_n, V_m) = \Psi^\#(F), \quad \text{avec} \quad F(x) = q(U_n, U_m)(\log x) \tag{4.1}$$

et $\Psi^\#$ a été défini dans (3.13).

Nous allons maintenant décrire la contribution de chaque terme de (3.13) à la matrice $QW_\lambda(V_n, V_m)$.

4.1 La matrice $W_{0,2}(V_n, V_m)$

Le lemme suivant montre que les termes $W_{0,2}(V_n, V_m)$ contribuent par une matrice de rang deux.

Lemme 4.1. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Soit $F(x) = q(U_n, U_m)(\log x)$, alors on a :*

$$W_{0,2}(V_n, V_m) = W_{0,2}^\#(F) = \frac{32L \sinh^2\left(\frac{L}{4}\right) (L^2 - 16\pi^2 mn)}{(L^2 + 16\pi^2 m^2)(L^2 + 16\pi^2 n^2)} \quad (4.2)$$

Démonstration. Ceci se vérifie mieux par un calcul direct. \square

4.2 La matrice $W_p(V_n, V_m)$

La contribution des nombres premiers non archimédiens est donnée par (3.1), i.e.

$$\sum W_p(V_n, V_m) = \sum_{1 < k \leq \exp(L)} \Lambda(k) k^{-1/2} q(U_n, U_m)(\log k). \quad (4.3)$$

4.3 La matrice $W_{\mathbb{R}}(V_n, V_m)$

Soit $\omega(x) = q(U_n, U_m)(x)$, alors (3.1) donne :

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}}(V_n, V_m) &= \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \omega(x) - \omega(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx - \omega(0) \int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\gamma + \log(4\pi))\omega(0). \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^L + 1}{e^L - 1}\right)$$

on obtient

$$W_{\mathbb{R}}(V_n, V_m) = \frac{\omega(0)}{2} \left(\gamma + \log\left(4\pi \frac{e^L - 1}{e^L + 1}\right) \right) + \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \omega(x) - \omega(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx. \quad (4.4)$$

L'expression explicite de $\omega(x) = q(U_n, U_m)(x)$ pour $x \in [0, L]$ est donnée par le lemme 2.2. L'étape suivante consiste à calculer les intégrales impliquées, exprimées en fonction de fonctions connues dans la proposition suivante 4.2. Soit :

$$\rho(x) := \frac{\exp(x/2)}{\exp(x) - \exp(-x)}$$

Soit $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ la fonction digamma et $\psi^{(1)}$ sa dérivée. Nous utilisons la notation standard pour les fonctions hypergéométriques. On utilise la notation Φ pour la fonction de Hurwitz-Lerch.

$$\Phi(z, 2, x) = \frac{1}{x^2} + \frac{z}{(x+1)^2} + \frac{z^2}{(x+2)^2} + \frac{z^3}{(x+3)^2} + \frac{z^4}{(x+4)^2} + \dots$$

Une caractéristique importante de ces formules est que le paramètre e^{-2L} dans les différentes séries impliquées est de module < 1 , ce qui assure la convergence et, en fait, une convergence numérique rapide pour L d'ordre 10.

Proposition 4.2. *On utilise les symboles $\Re(z)$ et $\Im(z)$ pour les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z . On a*

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(2\pi nx/L) \rho(x) dx &= e^{-L/2} \Im \left(\frac{2L}{L+4\pi in} {}_2F_1 \left(1, \frac{\pi in}{L} + \frac{1}{4}; \frac{\pi in}{L} + \frac{5}{4}; e^{-2L} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Im \left(\psi \left(\frac{\pi in}{L} + \frac{1}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\int_0^L x \cos(2\pi nx/L) \rho(x) dx = -Le^{-L/2} \Im \left(\frac{2L}{4\pi n - iL} {}_2F_1 \left(1, \frac{1}{4} + \frac{in\pi}{L}; \frac{5}{4} + \frac{in\pi}{L}; e^{-2L} \right) \right) \quad (4.6)$$

$$\int_0^L (\cos(2\pi nx/L) - 1) \rho(x) dx = -e^{-L/2} \Re \left(\frac{2L}{L+4\pi in} {}_2F_1 \left(1, \frac{\pi in}{L} + \frac{1}{4}; \frac{\pi in}{L} + \frac{5}{4}; e^{-2L} \right) \right) \quad (4.7)$$

Démonstration. Dans chaque cas, on commence par changer de variable en $y = 2\pi x/L$ puis on développe, avec $a := \frac{L}{2\pi}$

$$\rho(x) = \frac{\exp\left(\frac{ay}{2}\right)}{\exp(ay) - \exp(-ay)} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(b(k)y), \quad b(k) = \frac{-a(1+4k)}{2}$$

Le changement de variables introduit un facteur global $(L2\pi)^2$ pour l'intégrale du milieu et $\left(\frac{L}{2\pi}\right)$ pour les autres. On obtient ainsi, pour chaque intégrale, une somme de termes indexés par $k \in \mathbb{N}$ et qui sont

$$\int_0^{2\pi} \exp(bx) \sin(nx) dx = \frac{n - e^{2\pi b} n}{b^2 + n^2} \quad (4.8)$$

$$\int_0^{2\pi} x \exp(bx) \cos(nx) dx = \frac{2\pi e^{2\pi b} b - e^{2\pi b} + 1}{b^2 + n^2} - \frac{2n^2 (1 - e^{2\pi b})}{(b^2 + n^2)^2} \quad (4.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(bx)(\cos(nx) - 1) dx = \frac{n^2 - e^{2\pi b} n^2}{b^3 + bn^2} \quad (4.10)$$

Toutes ces expressions sont affines en $e^{2\pi b}$ dont le coefficient donne le terme général d'une somme sur $k \in \mathbb{N}$ en utilisant

$$e^{2\pi b(k)} = \exp\left(-\frac{L}{2}(1 + 4k)\right) = e^{-L/2} z^k, \quad z = e^{-2L}.$$

On reconnaît alors la série en z et on obtient les expressions suivantes

$$\begin{aligned} & \int_0^L \sin(2\pi nx/L) \rho(x) dx \\ &= e^{-L/2} \left(\frac{(iL) {}_2F_1\left(1, \frac{1}{4} - \frac{in\pi}{L}; \frac{5}{4} - \frac{in\pi}{L}; e^{-2L}\right)}{L - 4i\pi n} - \frac{(iL) {}_2F_1\left(1, \frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}; \frac{i\pi n}{L} + \frac{5}{4}; e^{-2L}\right)}{L + 4i\pi n} \right) \\ &+ \frac{1}{4}i \left(\psi^{(0)}\left(\frac{1}{4} - \frac{in\pi}{L}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L x \cos(2\pi nx/L) \rho(x) dx \\ &= e^{-L/2} \left(-\frac{1}{8} \Phi\left(e^{-2L}, 2, \frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} \Phi\left(e^{-2L}, 2, \frac{1}{4} - \frac{i\pi n}{L}\right) \right) \\ &+ e^{-L/2} \left(\frac{iL^2 {}_2F_1\left(1, \frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}; \frac{i\pi n}{L} + \frac{5}{4}; e^{-2L}\right)}{4\pi n - iL} - \frac{iL^2 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{4} - \frac{i\pi n}{L}; \frac{5}{4} - \frac{i\pi n}{L}; e^{-2L}\right)}{4\pi n + iL} \right) \\ &+ \frac{1}{8} \left(\psi^{(1)}\left(\frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}\right) + \psi^{(1)}\left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi n}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\cos(2\pi nx/L) - 1)\rho(x)dx \\
&= e^{-L/2} \left(-\frac{L {}_2F_1 \left(1, \frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4}; \frac{i\pi n}{L} + \frac{5}{4}; e^{-2L} \right)}{L + 4i\pi n} - \frac{L {}_2F_1 \left(1, \frac{1}{4} - \frac{i\pi n}{L}; \frac{5}{4} - \frac{i\pi n}{L}; e^{-2L} \right)}{L - 4i\pi n} \right) \\
&+ 2e^{-L/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{4}, 1; \frac{5}{4}; e^{-2L} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(-\psi^{(0)} \left(\frac{i\pi n}{L} + \frac{1}{4} \right) - \psi^{(0)} \left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi n}{L} \right) + 2\psi^{(0)} \left(\frac{1}{4} \right) \right)
\end{aligned}$$

En simplifiant ces expressions en utilisant les parties réelle et imaginaire, on obtient le résultat souhaité. \square

Pour la dernière intégrale, on peut calculer une forme simplifiée de l'expression recherchée :

$$\int_0^L (\cos(2\pi nx/L) - \exp(-x/2))\rho(x)dx = \int_0^L (\cos(2\pi nx/L) - 1)\rho(x)dx + c(L) \quad (4.11)$$

dont le terme correctif est

$$\begin{aligned}
c(L) &= \int_0^L \frac{1 - \exp(-\frac{x}{2})}{\exp(x) - \exp(-x)} dx \\
&= \log(e^{L/2} + 1) + \frac{1}{4} (-2\log(e^L + 1) - \pi - \log(4)) + \tan^{-1}(e^{L/2})
\end{aligned}$$

En fait, il faut ajouter ce qui suit pour prendre en compte la valeur principale de Weil complète :

$$w(L) = \frac{1}{2}(\gamma + \log(4\pi)) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^L + 1}{e^L - 1} \right)$$

On obtient alors :

$$c(L) + w(L) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{L/2} - 1}{e^{L/2} + 1} \right) + \tan^{-1}(e^{L/2}) - \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \log(8\pi)$$

Pour obtenir des notations plus concises, on pose :

$$\alpha_L(n) := \frac{1}{\pi} \int_0^L \sin(2\pi nx/L)\rho(x)dx, \quad (4.12)$$

$$\beta_L(n) := \frac{1}{L} \int_0^L x \cos(2\pi nx/L)\rho(x)dx, \quad (4.13)$$

$$\gamma_L(n) := \int_0^L (\cos(2\pi nx/L) - \exp(-x/2))\rho(x)dx + c(L) + w(L) \quad (4.14)$$

En utilisant ces notations, la proposition 4.2 et (4.4), on obtient :

Proposition 4.3. *La matrice $W_{\mathbb{R}}(V_n, V_m)$ est donné par le tableau suivant*

$$\begin{array}{c|c} m \neq n & \frac{\alpha_L(m) - \alpha_L(n)}{n - m} \\ \hline m = n & 2\gamma_L(n) - 2\beta_L(n) \end{array}$$

Démonstration. découle du lemme 2.2. □

5 Les triplets spectraux infrarouges

Dans cette section, nous construisons des triplets spectraux infrarouges naturellement associés à l'opérateur d'échelle dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ avec des conditions aux limites périodiques. L'objectif est de modifier ces conditions afin d'insérer dans le noyau de l'opérateur d'échelle modifié le vecteur propre qui réalise le minimum de la forme quadratique de Weil dans l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$. Pour obtenir cette perturbation, nous travaillons au niveau tronqué et utilisons, au lieu de l'évaluation sur la frontière de l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$, une approximation de cette évaluation donnée par le noyau de Dirichlet. Nous démontrons ensuite l'existence et l'unicité de l'opérateur d'échelle perturbé, ainsi que deux résultats fondamentaux. Premièrement, cet opérateur devient autoadjoint à condition de modifier le produit intérieur à l'aide de la forme quadratique de Weil. Deuxièmement, on peut calculer le spectre de cet opérateur grâce à la transformée de Fourier du vecteur propre minimal.

5.1 Troncature de QW_{λ}

Soit $\lambda > 1$, $L = 2 \log \lambda$, U_n tel que défini dans (2.6) et $V_n = \kappa(U_n)$ la base orthonormée de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ donnée dans (3.21). Soit $N \in \mathbb{N}$, on considère la forme quadratique QW_{λ}^N obtenue en restreignant la forme quadratique de Weil QW_{λ} à l'espace de dimension finie des fonctions-tests engendré par les fonctions V_n pour $|n| \leq N$.

D'après (3.18), les éléments de la matrice $T = QW_{\lambda}^N$ dans la base V_n sont donnés par :

$$\tau_{n,m} = \int_0^L q(U_n, U_m)(y) \mathcal{D}(y) \quad i, j \in \{-N, \dots, N\} \quad (5.1)$$

où \mathcal{D} est la distribution réelle $\mathcal{D} = \log_*(\Psi^{\sharp})$ sur l'intervalle $[0, L]$.

Lemme 5.1. *La matrice $\tau_{n,m}$ est une matrice symétrique réelle de la forme*

$$\tau_{i,i} = a_i, \quad \forall i, \quad \tau_{i,j} = \frac{b_i - b_j}{i - j}, \quad \forall j \neq i; \quad i, j \in \{-N, \dots, N\} \quad (5.2)$$

où les scalaires réels a_i vérifient $a_{-j} = a_j$ et $b_{-j} = -b_j$ pour tout $j \in \{-N, \dots, N\}$.

Démonstration. Ceci découle du calcul des fonctions $q(U_n, U_m)(y)$ pour $y \in [0, L]$ dans (2.8) et (2.10), qui donne pour $n \neq m$:

$$\tau_{n,m} = \int_0^L \frac{\sin(2\pi my/L) - \sin(2\pi ny/L)}{\pi(n-m)} \mathcal{D}(y) \implies b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^L \sin(2\pi ny/L) \mathcal{D}(y)$$

et pour $n = m$,

$$\tau_{n,n} = 2 \int_0^L (1 - y/L) \cos(2\pi ny/L) \mathcal{D}(y) = a_n$$

□

5.2 Propriétés des matrices tronquées

Dans cette section, soit N un entier positif, E_N l'espace de Hilbert muni de la base orthonormée $\{V_n, n \in \{-N, \dots, N\}\}$ et T une matrice symétrique réelle de la forme (5.2). Rappelons les propriétés fondamentales de [7] pour les matrices de cette forme.

Lemme 5.2. (i) Soit γ tel que $\gamma(V_j) := V_{-j} \ \forall j \in \{-N, \dots, N\}$. On a $\gamma^2 = \text{id}$ et $T\gamma = \gamma T$.
(ii) Soit D défini par $D(V_n) := n V_n$ pour tout $n \in \{-N, \dots, N\}$. On a $D\gamma = -\gamma D$ et

$$DT - T D = |\beta\rangle\langle\eta| - |\eta\rangle\langle\beta|, \quad \beta = \sum b_j V_j, \quad \eta = \sum V_j. \quad (5.3)$$

Démonstration. (i) On a $q_{-i,-j} = q_{i,j}$ quelques soient $i, j \in \{-N, \dots, N\}$.

(ii) Les éléments diagonaux de la matrice diagonale D sont antisymétriques, ce qui donne $D\gamma = -\gamma D$. Démontrons (5.3). On a :

$$(DT)_{i,j} = i\tau_{i,j}, \quad (TD)_{i,j} = j\tau_{i,j}$$

de sorte que $(DT - T D)_{i,j} = (b_i - b_j)$ quelques soient $i, j \in \{-N, \dots, N\}$. De même, on a :

$$(|\beta\rangle\langle\eta|)_{i,j} = |\beta\rangle_i\langle\eta|_j = b_i, \quad (|\eta\rangle\langle\beta|)_{i,j} = |\eta\rangle_i\langle\beta|_j = b_j$$

ce qui donne l'égalité recherchée. □

Définition 5.3. Une matrice symétrique réelle T commutant avec la $\mathbb{Z}/2$ -graduation γ est dite *paire-simple* si sa plus petite valeur propre est simple et si le vecteur propre correspondant ξ satisfait $\gamma\xi = \xi$.

Supposons maintenant que T soit paire, simple et positive, et posons $\xi \in \text{Ker } T$, $\xi \neq 0$. La matrice réelle symétrique positive T définit un produit intérieur sur \mathbb{R}^{2N+1} et son noyau est le sous-espace unidimensionnel engendré par ξ . Montrons d'abord que l'on peut normaliser ξ par la condition :

$$\langle \xi | \eta \rangle = 1 \quad (5.4)$$

Si $D\xi = 0$, alors $V_0 \in \text{Ker } T$ satisfait à la condition (5.4). On peut donc supposer que $D\xi \neq 0$. On a $TD\xi \neq 0$ puisque $D\xi$ est impaire et linéairement indépendante de ξ , tandis que $\text{Ker } T$ est unidimensionnel. Par (5.3), on a :

$$0 \neq (DT - TD)(\xi) = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle - |\eta\rangle\langle\beta|\xi\rangle = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle.$$

Ainsi on peut normaliser ξ pour que $\langle\eta|\xi\rangle = 1$.

Lemme 5.4. *Supposons $T \geq 0$ et $\text{Ker } T = \mathbb{C}\xi$ où $\gamma\xi = \xi$ et $\langle\xi | \eta\rangle = 1$.*

- (i) *On a $TD\xi = -\beta$.*
- (ii) *L'opérateur $D' := D - |D\xi\rangle\langle\eta|$ induit un opérateur autoadjoint D'' dans l'espace de Hilbert associé au produit intérieur défini par T , comme quotient par des vecteurs nuls.*
- (iii) *On a, en notant ξ_j les composantes de ξ ,*

$$\text{Det}(D'' - s) = \text{Det}(D - s) \sum_{j=-N}^N (j - s)^{-1} \xi_j. \quad (5.5)$$

Démonstration. (i) On applique (5.3) et on obtient, en utilisant $T\xi = 0$ et $\langle\beta|\xi\rangle = 0$ puisque les deux sous-espaces propres de γ sont orthogonaux,

$$-TD\xi = (DT - TD)\xi = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle - |\eta\rangle\langle\beta|\xi\rangle = \beta.$$

(ii) Le produit intérieur défini par T est donné par :

$$\langle f | g \rangle_T = \langle Tf | g \rangle.$$

Montrons d'abord que :

$$\langle D'f | g \rangle_T = \langle f | D'g \rangle_T, \quad \forall f, g \quad (5.6)$$

On a, avec $R = -|D\xi\rangle\langle\eta|$:

$$\langle D'f | g \rangle_T = \langle TD'f | g \rangle = \langle TDf | g \rangle + \langle TRf | g \rangle.$$

Par (i), on a $TR = -|TD\xi\rangle\langle\eta| = |\beta\rangle\langle\eta|$. Ainsi

$$TD' = TD + |\beta\rangle\langle\eta|$$

De plus, par (5.3), on a $TD - DT = -|\beta\rangle\langle\eta| + |\eta\rangle\langle\beta|$. Ainsi

$$TD' = DT + |\eta\rangle\langle\beta|,$$

$$\langle D'f | g \rangle_T = \langle DTf | g \rangle + \langle R'f | g \rangle, \quad R' = |\eta\rangle\langle\beta|.$$

De plus, sachant que T et D sont autoadjoints,

$$\langle f | D'g \rangle_T = \langle Tf | Dg \rangle + \langle Tf | Rg \rangle = \langle DTf | g \rangle + \langle f | TRg \rangle$$

et l'égalité recherchée découle de

$$TRg = (-TD\xi)\langle\eta|g\rangle = \beta\langle\eta|g\rangle$$

$$\langle f | TRg \rangle = \langle f | (|\beta\rangle\langle\eta|g) = \langle f | \beta\rangle\langle\eta|g\rangle = \langle R'f | g \rangle.$$

L'espace de Hilbert \mathcal{H} obtenu à partir de E_N à l'aide du produit intérieur $\langle f | g \rangle_T$ est le quotient de E_N par le noyau $\text{Ker } T = \mathbb{C}\xi$. Par construction, on a $D'\xi = 0$, de sorte que D' induit un opérateur D'' dans \mathcal{H} et que D'' est autoadjoint par (7.3).

(iii) Soit v_j une base orthonormée de \mathcal{H} des vecteurs propres de D'' associés aux valeurs propres λ_j . Soient $w_j \in E_N$ les relèvements des vecteurs v_j . On a $D''(v_j) = \lambda_j v_j$ et donc $D'(w_j) = \lambda_j w_j + s_j \xi$ pour certains scalaires s_j . Ainsi, dans la base de E_N formée par ξ et les vecteurs w_j , la matrice de D' est triangulaire, avec 0 et λ_j sur la diagonale. On obtient ainsi :

$$\text{Det}(D' - s) = -s \prod (\lambda_j - s) = -s \text{Det}(D'' - s) \quad (5.7)$$

Calculons maintenant $\text{Det}(D' - s)$. Commençons par écrire, en fonction de $R = -\langle D\xi | \eta \rangle$:

$$D' - s = D + R - s = (D - s)(\text{id} + (D - s)^{-1}R)$$

Par conséquent

$$\text{Det}(D' - s) = \text{Det}(D - s)\text{Det}(\text{id} + (D - s)^{-1}R).$$

Pour calculer le second déterminant, on utilise l'identité

$$\text{Det}(\text{id} + A) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Tr}(\wedge^k A)$$

appliquée à l'opérateur $A = (D - s)^{-1}R$ de rang un. Les puissances extérieures d'ordre supérieur $\wedge^k A$ s'annulent pour $k > 1$, donc :

$$\text{Det}(\text{id} + (D - s)^{-1}R) = 1 - \text{Tr}(|(D - s)^{-1}D\xi\rangle\langle\eta|) = -s\langle\eta|(D - s)^{-1}\xi\rangle,$$

en utilisant $(D - s)^{-1}D\xi = \xi + s(D - s)^{-1}\xi$ et $\langle \eta | \xi \rangle = 1$. Par conséquent,

$$\text{Det}(D' - s) = -s \text{Det}(D - s) \langle \eta | (D - s)^{-1}\xi \rangle = -s \text{Det}(D - s) \sum_{j=-N}^N (j - s)^{-1}\xi_j.$$

Ainsi, on obtient (5.5) en utilisant (5.7). \square

5.3 Le noyau de Dirichlet δ_N comme approximation de la fonction delta de Dirac

Le **noyau de Dirichlet** approxime la fonction delta de Dirac lorsque $N \rightarrow \infty$. On a :

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N \exp(2\pi i n x / L), \forall x \in [0, L] \quad (5.8)$$

Cette expression peut être simplifiée à l'aide de la formule du développement géométrique :

$$D_N(x) = \sin\left(\frac{\pi(2N+1)x}{L}\right) / \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5.9)$$

pour $x \neq 0 \pmod{L}$ avec $D_N(0) = D_N(L) = 2N + 1$.

Lemme 5.5. Soit $D = -i\partial_L$ l'opérateur autoadjoint de différentiation sur $L^2([0, L], dx)$ avec conditions aux limites périodiques. Soit $f \in \text{Dom } D$. Alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L D_N(x) f(x) dx = f(0) \quad (5.10)$$

Démonstration. Soit $\widehat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$ les coefficients de Fourier de f . D'après le théorème de Parseval, avec une constante $c > 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |\widehat{f}(n)|^2 = c \|f'\|_{L^2}^2 < \infty \quad (5.11)$$

Puisque $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x / L}$, on a :

$$\frac{1}{L} \int_0^L D_N(x) f(x) dx = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \quad (5.12)$$

Il nous faut donc démontrer que la série de Fourier de f converge en $x = 0$:

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \rightarrow f(0) \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty \quad (5.13)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \cdot |n| |\widehat{f}(n)| \\ &\leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

Par conséquent, la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x / L}$ converge absolument et uniformément vers $f(x)$ pour tout x , d'où :

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \rightarrow f(0) \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty$$

□

L'opérateur de mise à l'échelle est défini comme

$$D_{\log}^{(\lambda)} = -i u \frac{\partial}{\partial u} = -i \frac{\partial}{\partial \log u} \quad (5.14)$$

agissant sur $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ sous conditions aux limites périodiques.

Corollaire 5.6. *Soit $V_n(u) := U_n(\log(\lambda u))$ comme dans (3.21), $D_{\log}^{(\lambda)}$ l'opérateur d'échelle avec conditions aux limites périodiques sur $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ et $f \in \text{Dom } D_{\log}^{(\lambda)}$.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \delta_N \mid f \rangle = f(\lambda), \quad \delta_N := \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-N}^N V_n \quad (5.15)$$

Démonstration. Ceci découle du lemme de Dirichlet, en utilisant l'isométrie κ de (3.17) pour passer de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ à $L^2([0, L], dx)$, et l'égalité :

$$D_N = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-N}^N U_n$$

qui découle de (5.8) et (2.6). □

5.4 L'opérateur d'échelle perturbé

L'opérateur d'échelle perturbé $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ est obtenu à partir de ce qui suit :

Proposition 5.7. *Soit $\lambda > 1$ et N tels que la forme quadratique de Weil tronquée soit paire simple. Soit ξ le vecteur propre pair correspondant. Il existe un unique opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ ayant le même domaine que $D_{\log}^{(\lambda)}$ qui coïncide avec cet opérateur sur le noyau de δ_N et tel que $D_{\log}^{(\lambda, N)}(\xi) = 0$.*

Démonstration. L'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ est la somme directe du sous-espace de dimension finie E_N engendré par les V_n pour $|n| \leq N$ et de son complément orthogonal E_N^\perp . Puisque les V_n forment une base orthonormée de vecteurs propres de $D_{\log}^{(\lambda)}$, cet opérateur se décompose en la somme directe de ses restrictions à E_N et E_N^\perp . La forme linéaire δ_N s'annule sur E_N^\perp et $\xi \in E_N$ par construction. Ainsi, l'existence et l'unicité de $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ se réduisent au sous-espace de dimension finie E_N . On a $\delta_N(\xi) \neq 0$ donc $\text{Ker } \delta_N$ et $\mathbb{C} \xi$ engendrent E_N et l'égalité

$$D_{\log}^{(\lambda, N)}(\beta) = D_{\log}^{(\lambda)}(\alpha), \quad \forall \beta = \alpha + x\xi, \quad \alpha \in \text{Ker } \delta_N, \quad x \in \mathbb{C}$$

détermine l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ de manière unique. \square

5.5 Déterminant régularisé

Le déterminant régularisé est défini par

$$\det_{\text{reg}}(D - s) = \exp(-\zeta'_D(0; s)) \quad (5.16)$$

où $\zeta_D(z; s) := \sum(\lambda - s)^{-z}$ est la fonction zêta spectrale. La définition de la fonction zêta présente une ambiguïté (voir [13], § 7.1) car éléver $\lambda - s$ à la puissance $-z$ implique le choix d'une détermination de $\log(\lambda - s)$. Un tel choix est évident pour les valeurs propres $\lambda \rightarrow +\infty$, mais dans la direction négative, il faut choisir pour $(-1)^{-z}$, et ce choix de la coupure spectrale influe sur le résultat de l'exemple de base suivant. Notons que, dans cet exemple, et en prenant par souci de simplicité $L = 2\pi$, on pourrait deviner le déterminant régularisé à partir du produit eulérien donné par la fonction sinus $\sin(\pi s)$, mais cela violerait l'invariance spectrale $s \rightarrow s + 1$. Le facteur de phase devant la fonction sinus corrige cette violation.

Lemme 5.8. *Soit $L > 0$. Le déterminant régularisé de l'opérateur de Dirac D de spectre $\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ est donné, en utilisant $(-1)^{-z} := e^{-i\pi z}$, par*

$$\det_{\text{reg}}(D - s) = 1 - e^{-iLs} \quad (5.17)$$

Démonstration. *Démonstration.* On commence par prendre $L = 2\pi$ pour simplifier les notations. La fonction zêta spectrale est donnée par :

$$\zeta_D(z; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n - s)^{-z} \quad (5.18)$$

Cette fonction converge pour $\operatorname{Re}(z) > 1$. On a :

$$\zeta_D(z; s) = \sum_{n=1}^{\infty} (n - s)^{-z} + \sum_{n=-\infty}^0 (n - s)^{-z} \quad (5.19)$$

Pour la seconde somme, on remplace $n \rightarrow -m$ par $m \geq 0$ et on utilise $(-1)^{-z} := e^{-i\pi z}$

$$\sum_{n=-\infty}^0 (n - s)^{-z} = \sum_{m=0}^{\infty} (-m - s)^{-z} = e^{-i\pi z} \sum_{m=0}^{\infty} (m + s)^{-z} \quad (5.20)$$

De telle façon qu'en utilisant la fonction zêta de Hurwitz :

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-z} \quad (5.21)$$

on obtient

$$\zeta_D(z; s) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1 - s)^{-z} + e^{-i\pi z} \sum_{m=0}^{\infty} (m + s)^{-z} = \zeta(z, 1 - s) + e^{-i\pi z} \zeta(z, s)$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$\zeta'_D(0; s) = \zeta'(0, 1 - s) - i\pi \zeta(0, s) + \zeta'(0, s) \quad (5.22)$$

De plus, on a les expressions classiques

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a, \quad \zeta'(0, a) = \log \Gamma(a) - \frac{1}{2} \log(2\pi) \quad (5.23)$$

ce qui donne

$$\zeta'_D(0; s) = -\log(2\pi) + \log \Gamma(s) + \log \Gamma(1 - s) - i\pi \left(\frac{1}{2} - s \right) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\zeta'_D(0; s)) &= \frac{2\pi}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \exp\left(i\pi\left(\frac{1}{2}-s\right)\right) = \\ &= 2i \sin(\pi s) e^{-i\pi s} = 1 - e^{-2i\pi s} \end{aligned}$$

Le cas général en découle en utilisant le fait que $\zeta_D(0; s) = 0$. On a en effet, pour $a > 0$

$$\zeta_{aD}(z; as) = a^{-z} \zeta_D(z; s) \implies \zeta'_{aD}(0; as) = -\log a \zeta_D(0; s) + \zeta'_D(0; s)$$

ce qui donne le résultat souhaité pour $a = 2\pi/L$. \square

5.6 Spectre et déterminant régularisé de $D_{\log}^{(\lambda, N)}$

Dans cette section, nous démontrons les propriétés fondamentales de $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ et montrons que son spectre est réel et que son déterminant régularisé est (à un facteur de phase près) la transformée de Fourier du vecteur propre minimal ξ .

Nous calculons d'abord la transformée de Fourier des fonctions définies sur $[\lambda^{-1}, \lambda]$ prolongées par 0 à \mathbb{R}_+^* . La transformée de Fourier de la dualité $\langle \mathbb{R}_+^* | \mathbb{R} \rangle$ est définie par :

$$\mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) u^{-is} d^* u.$$

Proposition 5.9. Soit $\lambda > 1$, $L = 2 \log \lambda$, $N \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{C}$ pour $j \in \{-N, \dots, N\}$,

$$\xi(u) := \sum_{\{-N, \dots, N\}} \xi_k V_k(u), \quad \forall u \in [\lambda^{-1}, \lambda], \quad \xi(u) = 0, \quad \forall u \notin [\lambda^{-1}, \lambda].$$

La transformée de Fourier $\widehat{\xi} = \mathbb{F}_\mu(\xi)$ est la fonction entière donnée par

$$\widehat{\xi}(z) = 2 L^{-1/2} \sin(zL/2) \left(\sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{z - 2\pi j/L} \right). \quad (5.25)$$

Démonstration. On a, pour $k \in \mathbb{Z}$, en utilisant $x = \log(\lambda u)$, $u^{-is} = \lambda^{is} \exp(-isx)$, $d^* u = dx$,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} V_k(u) u^{-is} d^* u &= \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} U_k(\log(\lambda u)) u^{-is} d^* u \\ &= L^{-1/2} \lambda^{is} \int_0^L \exp(2\pi ikx/L) \exp(-isx) dx \\ &= -i \frac{1 - e^{-isL}}{s - 2\pi k/L} L^{-1/2} e^{isL/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier de $\xi(u)$ est :

$$\widehat{\xi}(z) = 2 L^{-1/2} \sin(zL/2) \left(\sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{z - 2\pi j/L} \right).$$

Les zéros $z \in 2\pi\mathbb{Z}/L$ de $\sin(zL/2)$ annulent les pôles en $2\pi j/L$ qui apparaissent lorsque $\xi_j \neq 0$ et restent des zéros de $\widehat{\xi}(z)$ sinon. \square

Théorème 5.10. Soit ϵ_N la plus petite valeur propre de QW_λ^N , supposée simple, et ξ le vecteur propre correspondant, supposé pair et normalisé par $\delta_N(\xi) = 1$.

(i) L'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ est autoadjoint dans la somme directe $E'_N \oplus E_N^\perp$, où, sur le sous-espace $E'_N = E_N/\mathbb{C}\xi$, le produit intérieur est donné par la restriction de la forme quadratique $QW_\lambda^N - \epsilon_N \langle \cdot \rangle$.

(ii) Le déterminant régularisé de $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ est donné par

$$\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z) = -i \lambda^{-iz} \widehat{\xi}(z)$$

où $\widehat{\xi}$ est la transformée de Fourier de ξ pour la dualité $\langle \mathbb{R}_+^* | \mathbb{R} \rangle$.

(iii) La transformée de Fourier $\widehat{\xi}(z)$ est une fonction entière, dont tous les zéros sont sur la droite réelle et coïncident avec le spectre de $D_{\log}^{(\lambda, N)}$.

Démonstration. (i) On applique le lemme 5.4 à $T := QW_\lambda^N - \epsilon_N \text{id}$ où ϵ_N est la plus petite valeur propre de QW_λ^N , supposée simple et paire. Soient D , D' et D'' les opérateurs associés. On a

$$D_{\log}^{(\lambda)} \Big|_{E_N} = \frac{2\pi}{L} D, \quad D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E_N} = \frac{2\pi}{L} D', \quad D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E'_N} = \frac{2\pi}{L} D'' \quad (5.26)$$

Par construction, l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ décompose la somme directe en la somme directe $E'_N \oplus E_N^\perp$. Le résultat découle donc du lemme 5.4, (ii).

(ii) Par (5.26), on a

$$\text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda)} \Big|_{E_N} - \frac{2\pi}{L} s \right) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2N+1} \text{Det}(D - s)$$

$$\text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E'_N} - \frac{2\pi}{L} s \right) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2N} \text{Det}(D'' - s)$$

Nous appliquons maintenant le lemme 5.4, (iii), mais notons que la normalisation de ξ donnée par $\delta_N(\xi) = 1$ diffère de $\langle \xi' | \eta \rangle = 1$. On a $\delta_N = L^{-1/2} \eta$ d'après le corollaire ??, ce qui donne $\xi' = L^{-1/2} \xi$. Le lemme 5.4, (iii) montre que :

$$\text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E'_N} - \frac{2\pi}{L} s \right) = \frac{L}{2\pi} \text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda)} \Big|_{E_N} - \frac{2\pi}{L} s \right) \sum_{j=-N}^N (j - s)^{-1} \xi'_j$$

Ce qui, avec $\xi' = L^{-1/2}\xi$ et $z = \frac{2\pi}{L}s$, donne :

$$\text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E'_N} - z \right) = \text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda)} \Big|_{E_N} - z \right) \frac{L^{1/2}}{2\pi} \sum_{j=-N}^N \left(j - \frac{L}{2\pi}z \right)^{-1} \xi_j$$

Il découle alors de la multiplicativité du déterminant régularisé que :

$$\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z) = L^{-1/2} \det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda)} - z) \left(\sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{2\pi j/L - z} \right) \quad (5.27)$$

D'après (5.25), la transformée de Fourier de $\xi(u)$ est :

$$\widehat{\xi}(z) = 2L^{-1/2} \sin(zL/2) \left(\sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{z - 2\pi j/L} \right)$$

D'après (5.17), on a :

$$\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda)} - z) = 1 - \exp(-izL) = 2i \exp(-izL/2) \sin(zL/2),$$

donc (5.27) donne :

$$\begin{aligned} \det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z) &= L^{-1/2} (1 - \exp(-izL)) \left(\sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{2\pi j/L - z} \right) \\ &= -i \exp(-izL/2) \widehat{\xi}(z) = -i \lambda^{-iz} \widehat{\xi}(z) \end{aligned}$$

(iii) La transformée de Fourier $\widehat{\xi}$ est une fonction entière puisque ξ est une fonction L^1 à support compact. Le déterminant régularisé $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z)$ est le produit des déterminants suivants :

$$\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z) = \text{Det} \left(D_{\log}^{(\lambda, N)} \Big|_{E'_N} - z \right) \det_{\text{reg}} \left(D_{\log}^{(\lambda)} \Big|_{E_N^\perp} - z \right)$$

Dans cette factorisation, le premier terme est le polynôme caractéristique d'une matrice autoadjointe et, par conséquent, tous ses zéros sont réels. Les zéros du second terme forment l'ensemble

$$\{2\pi j/L \mid j \in \mathbb{Z}, |j| > N\}$$

ce qui donne les résultat requis. \square

6 Résultats numériques

On calcule, à l'aide des formules précédentes, la matrice de la forme quadratique de Weil et le spectre de l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$. Ces calculs requièrent une grande précision, mais sont aisément effectués avec une précision de 200 chiffres grâce à la convergence rapide des fonctions spéciales impliquées. Le premier cas est $\lambda = 3$ et on prend $N = 120$.

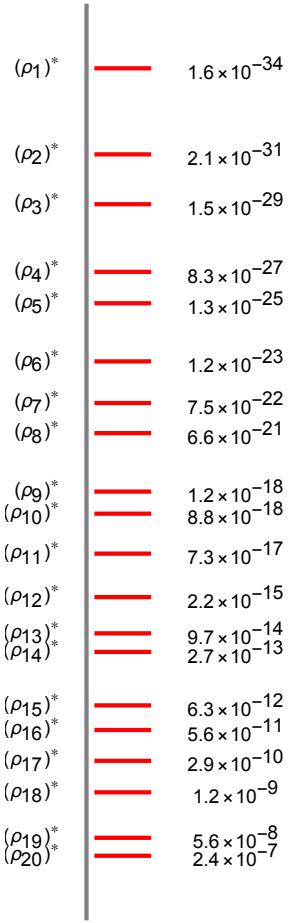


FIGURE 1 – Ceci illustre les différences entre les vingt premiers zéros de $\zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)$ et les valeurs propres de l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ pour $\lambda = 3$ et $N = 120$.

Nous considérons ensuite les cinquante premiers zéros de zêta, en conservant $N = 120$ et les valeurs de λ données par :

$$\lambda = \sqrt{12} \sim 3,4641, \quad \lambda = \sqrt{13} \sim 3,60555, \quad \lambda = \sqrt{14} \sim 3,74166.$$

Nous obtenons le tableau ci-après donnant une borne supérieure sur la valeur absolue de la différence entre les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann $\zeta(\frac{1}{2} + is)$ et les valeurs propres de l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda, N)}$.

7 Perspectives

Ces résultats numériques montrent que les spectres des opérateurs $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ tendent² vers les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann $\zeta(\frac{1}{2} + is)$. Établir rigoureusement cette convergence équivaudrait à une démonstration de l'hypothèse de Riemann. On peut aller encore plus loin en utilisant le théorème 5.10 et l'observation de [4] selon laquelle la fonction propre associée à la plus petite valeur propre de QW_{λ} est bien approchée par des fonctions d'onde sphéroïdales prolates. Comme nous l'expliquons maintenant, cela suggère que les déterminants régularisés $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - s)$ se comportent comme suit :

- Pour λ fixé, les fonctions $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - s)$ convergent³ lorsque $N \rightarrow \infty$ vers la fonction $-i\lambda^{-iz}\widehat{\xi}_{\lambda}(z)$ où ξ_{λ} est la fonction propre de QW_{λ} pour la plus petite valeur propre, normalisée par $\xi(\lambda) = 1$.
- Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, les fonctions $\widehat{\xi}_{\lambda}(z)$, multipliées par des constantes appropriées, convergent uniformément sur les sous-bandes fermées de la bande ouverte $\Im(z) < \frac{1}{2}$ vers la fonction Ξ de Riemann.

$$\Xi(s) = \xi(1/2 + is), \quad \xi(z) = \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$$

Autrement dit, les déterminants régularisés $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - s)$, convenablement multipliés par un facteur de la forme e^{a+ibs} , convergent vers $\Xi(s)$. Cette convergence impliquerait l'application du théorème de Hurwitz à l'approximation de Riemann sur les zéros des limites de fonctions holomorphes.

Nous allons maintenant détailler davantage cette stratégie. Tout d'abord, à la lecture de l'article de Riemann [11], on constate que, dans la terminologie moderne, il concevait sa fonction Ξ comme la transformée de Fourier de la dualité $\langle \mathbb{R}_+^* | \mathbb{R} \rangle$ de la fonction :

$$k(u) = \mathcal{E}(h)(u), \quad h(u) = \frac{\pi}{2}u^2(2\pi u^2 - 3)e^{-\pi u^2}. \quad (7.1)$$

où l'on utilise l'application suivante \mathcal{E} :

$$\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2} \sum_1^{\infty} f(nu) \quad (7.2)$$

2. lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\lambda \rightarrow \infty$.

3. uniformément sur les sous-ensembles compacts de \mathbb{C} .

	$\lambda = \sqrt{12}$	$\lambda = \sqrt{13}$	$\lambda = \sqrt{14}$
1	3.41×10^{-50}	2.44×10^{-55}	1.07×10^{-60}
2	5.89×10^{-47}	4.5×10^{-52}	2.08×10^{-57}
3	5.18×10^{-45}	4.16×10^{-50}	$2. \times 10^{-55}$
4	4.2×10^{-42}	3.65×10^{-47}	1.89×10^{-52}
5	7.84×10^{-41}	7.11×10^{-46}	3.81×10^{-51}
6	1.07×10^{-38}	1.06×10^{-43}	6.13×10^{-49}
7	9.42×10^{-37}	$1. \times 10^{-41}$	6.17×10^{-47}
8	1.05×10^{-35}	1.19×10^{-40}	7.66×10^{-46}
9	3.25×10^{-33}	4.12×10^{-38}	2.94×10^{-43}
10	2.99×10^{-32}	3.98×10^{-37}	2.96×10^{-42}
11	3.76×10^{-31}	5.5×10^{-36}	4.42×10^{-41}
12	1.87×10^{-29}	3.04×10^{-34}	2.68×10^{-39}
13	1.28×10^{-27}	2.29×10^{-32}	2.19×10^{-37}
14	4.47×10^{-27}	8.46×10^{-32}	8.43×10^{-37}
15	2.18×10^{-25}	4.82×10^{-30}	5.48×10^{-35}
16	2.76×10^{-24}	6.61×10^{-29}	8.02×10^{-34}
17	2.3×10^{-23}	6.08×10^{-28}	8.02×10^{-33}
18	1.59×10^{-22}	4.66×10^{-27}	6.73×10^{-32}
19	1.59×10^{-20}	5.5×10^{-25}	9.11×10^{-30}
20	9.55×10^{-20}	3.54×10^{-24}	6.19×10^{-29}
21	2.36×10^{-19}	9.75×10^{-24}	1.86×10^{-28}
22	6.7×10^{-18}	3.31×10^{-22}	7.38×10^{-27}
23	5.24×10^{-17}	2.86×10^{-21}	6.89×10^{-26}
24	8.4×10^{-16}	5.32×10^{-20}	1.45×10^{-24}
25	1.94×10^{-15}	1.33×10^{-19}	3.89×10^{-24}
26	2.42×10^{-14}	2.07×10^{-18}	7.23×10^{-23}
27	6.05×10^{-13}	5.94×10^{-17}	2.33×10^{-21}
28	1.26×10^{-12}	1.34×10^{-16}	5.58×10^{-21}
29	3.15×10^{-12}	4.09×10^{-16}	2.01×10^{-20}
30	2.72×10^{-11}	4.21×10^{-15}	2.39×10^{-19}
31	3.57×10^{-10}	6.61×10^{-14}	4.33×10^{-18}
32	1.7×10^{-9}	3.6×10^{-13}	2.62×10^{-17}
33	2.33×10^{-9}	5.66×10^{-13}	4.6×10^{-17}
34	1.2×10^{-7}	4.03×10^{-11}	4.23×10^{-15}
35	2.89×10^{-7}	1.04×10^{-10}	1.16×10^{-14}
36	4.1×10^{-7}	1.85×10^{-10}	2.45×10^{-14}
37	9.11×10^{-7}	4.92×10^{-10}	7.53×10^{-14}

38	2.78×10^{-6}	1.94×10^{-9}	3.61×10^{-13}
39	3.53×10^{-5}	3.24×10^{-8}	7.44×10^{-12}
40	1.83×10^{-4}	$2. \times 10^{-7}$	5.24×10^{-11}
41	1.67×10^{-4}	2.12×10^{-7}	6.22×10^{-11}
42	2.97×10^{-4}	5.66×10^{-7}	2.23×10^{-10}
43	2.19×10^{-3}	5.49×10^{-6}	2.64×10^{-9}
44	4.35×10^{-3}	1.35×10^{-5}	7.51×10^{-9}
45	1.19×10^{-2}	5.3×10^{-5}	3.8×10^{-8}
46	1.27×10^{-2}	6.88×10^{-5}	5.65×10^{-8}
47	2.87×10^{-2}	3.01×10^{-4}	3.66×10^{-7}
48	1.43×10^{-1}	$2. \times 10^{-3}$	2.98×10^{-6}
49	1.98×10^{-1}	3.01×10^{-3}	5.34×10^{-6}
50	9.02×10^{-2}	2.04×10^{-3}	4.78×10^{-6}

La fonction $h(u)$ peut être caractérisée comme suit. On considère l'opérateur d'Hermite (oscillateur harmonique).

$$\mathbf{H}f(u) := -f''(u) + 4\pi^2 u^2 f(u) \quad (7.3)$$

Soit h_n la fonction propre normalisée associée à la valeur propre $2\pi(1 + 2n)$. Ces fonctions sont paires pour n pair et, pour n multiple de 4, invariantes par transformation de Fourier pour la dualité $\langle \mathbb{R} | \mathbb{R} \rangle$ qui est définie par :

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(f)(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i xy} dx.$$

Lemme 7.1. *La fonction Ξ de Riemann est la transformée de Fourier de $k = \mathcal{E}(h)$, où h est, à un facteur scalaire multiplicatif près, l'unique combinaison linéaire de h_0 et h_4 dont l'intégrale est nulle. Plus précisément, on a, en termes de h_n normalisé :*

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2^{11/4}} h_4 - \frac{3}{2^{17/4}} h_0, \quad \text{et} \quad \|h\| = \frac{\sqrt{33}}{2^{17/4}}. \quad (7.4)$$

Démonstration. Les formes normalisées de h_0 et h_4 sont

$$h_0(x) = 2^{1/4} e^{-\pi x^2}, \quad h_4(x) = \left(\frac{16\pi^2 x^4 - 24\pi x^2 + 3}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{3}} \right) e^{-\pi x^2}$$

Par conséquent

$$\frac{3}{2^{17/4}} h_0(x) = \frac{3}{16} e^{-\pi x^2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2^{11/4}} h_4(x) = \left(\pi^2 x^4 - \frac{3\pi x^2}{2} + \frac{3}{16} \right) e^{-\pi x^2}$$

ce qui donne le résultat souhaité en utilisant (7.1). \square

Nous rappelons la construction de [4] d'une approximation éclairée de k_λ pour un multiple scalaire de ξ_λ . Elle repose sur la déformation de l'oscillateur harmonique appelée opérateur d'onde prolate :

$$PW_\lambda := -\partial_x ((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2. \quad (7.5)$$

Les fonctions propres $h_{n,\lambda}(u)$ de PW_λ ont le même étiquetage que les fonctions d'Hermite h_n , elles sont paires pour n pair et invariantes par transformée de Fourier pour n multiple de 4. Conformément au lemme 7.1, l'approximation k_λ est :

$$k_\lambda(u) := \mathcal{E}(h_\lambda)(u), \quad \forall u \in [\lambda^{-1}, \lambda] \quad (7.6)$$

où h_λ est, à un facteur scalaire multiplicatif près, la seule combinaison linéaire de $h_{0,\lambda}$ et $h_{4,\lambda}$ dont l'intégrale est nulle. On se réfère à [4], section 3, pour la motivation de la formule de k_λ et les résultats numériques qui montrent qu'elle fournit une approximation d'un multiple scalaire de ξ_λ . Justifier rigoureusement cette étape constitue le principal obstacle restant à notre approche de l'hypothèse de Riemann.

Nous utilisons maintenant l'approximation éclairée (7.6) et évaluons sa convergence dans le lemme ci-après 7.3. Nous décrirons d'abord une estimation tirée de [9].

Lemme 7.2. (i) *Les fonctions propres $h_{n,\lambda}$ de PW_λ , convenablement normalisées, satisfont pour $n = 0, 4$ une estimation de la forme (avec $c < \infty$)*

$$\max_{x \in [-\lambda, \lambda]} |h_{n,\lambda}(x) - h_n(x)| \leq c \lambda^{-2} \quad (7.7)$$

(ii) *Soit h_λ la combinaison linéaire convenablement normalisée de $h_{0,\lambda}$, $h_{4,\lambda}$ avec intégrale nulle. On dispose d'une estimation de la forme (avec $c < \infty$) :*

$$\max_{x \in [-\lambda, \lambda]} |h_\lambda(x) - h(x)| \leq c \lambda^{-2} \quad (7.8)$$

Démonstration. (i) Cela découle de [9], phrase 9, page 243, Section 3.2. L'article intitulé "Die Sphäroidfunktionen $\text{ps}_n^m(z; \gamma^2)$ " affirme que, uniformément pour $z \in [-1, 1]$, on a l'estimation suivante :

$$\text{ps}_n^m(z; \gamma^2) = (-1)^m \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{(n+m)!}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (1-z^2)^{m/2} D_{n-m} \left((2\gamma)^{\frac{1}{2}} z \right) + O \left(\gamma^{-\frac{3}{4}} \right)$$

Il convient d'expliquer attentivement les notations de [9]. L'équation différentielle définissant les fonctions sphéroïdales prolates utilise l'opérateur

$$F_\gamma y \equiv \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dy}{dz} \right] + \left[\frac{-m^2}{1-z^2} + \gamma^2 (1-z^2) \right] y$$

et nous nous intéressons uniquement au cas où le paramètre angulaire $m = 0$. Dans ce cas, l'opérateur se simplifie en

$$F_\gamma y \equiv \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dy}{dz} \right] + \gamma^2 (1 - z^2) y$$

Nous établissons d'abord un lien entre cet opérateur (pour $m = 0$) et l'opérateur d'onde prolate de (7.5). On pose $z = x/\lambda$, ce qui donne :

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^2 \mapsto \lambda^2 (\partial_x)^2, \quad -\gamma^2 z^2 \mapsto -\gamma^2 / \lambda^2 x^2$$

Il faut donc un signe moins global et aussi :

$$\gamma^2 / \lambda^2 = 4\pi^2 \lambda^2 \implies \gamma = 2\pi \lambda^2 \quad (7.9)$$

Les fonctions sphériques prolates $\text{ps}_n := \text{ps}_n^0$ sont liées à celles de **Mathematica** par :

$$\text{ps}_n(s; \gamma^2) = PS(n, 0, \gamma, s)$$

L'énoncé de la phrase 9 de [9] se simplifie pour $m = 0$ en l'estimation, uniforme pour $z \in [-1, 1]$,

$$\text{ps}_n(z; \gamma^2) = \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{(2n+1)n!} \right)^{\frac{1}{2}} D_n \left((2\gamma)^{\frac{1}{2}} z \right) + O \left(\gamma^{-\frac{3}{4}} \right)$$

qui donne uniformément sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$

$$\left(\frac{4\gamma}{\pi} \right)^{-\frac{1}{4}} \text{ps}_n(x/\lambda; \gamma^2) = \left(\frac{1}{(2n+1)n!} \right)^{\frac{1}{2}} D_n \left((2\gamma)^{\frac{1}{2}} x/\lambda \right) + O \left(\gamma^{-1} \right) \quad (7.10)$$

Les fonctions d'Hermite D_n sont définies dans [9] par l'équation :

$$D_p(x) = (-1)^p e^{\frac{x^2}{4}} \frac{d^p}{dx^p} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad D_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Dans notre cas, nous avons $\gamma = 2\pi \lambda^2$, ce qui donne :

$$(2\gamma)^{\frac{1}{2}}/\lambda = (4\pi)^{\frac{1}{2}} \implies D_n \left((2\gamma)^{\frac{1}{2}} x/\lambda \right) = D_n \left((4\pi)^{\frac{1}{2}} x \right)$$

On a en particulier :

$$D_0 \left((4\pi)^{\frac{1}{2}} x \right) = e^{-\pi x^2}, \quad D_4 \left((4\pi)^{\frac{1}{2}} x \right) = e^{-\pi x^2} (16\pi^2 x^4 - 24\pi x^2 + 3)$$

Ainsi, en termes des fonctions d'Hermite normalisées h_n , on a

$$D_0 \left((4\pi)^{\frac{1}{2}} x \right) = 2^{-1/4} h_0(x), \quad D_4 \left((4\pi)^{\frac{1}{2}} x \right) = 2^{5/4} \sqrt{3} h_4(x) \quad (7.11)$$

On peut ainsi utiliser (7.10) pour normaliser les produits $h_{n,\lambda} = c_n \lambda^{-1/2} \text{ps}_n(x/\lambda; \gamma^2)$ de sorte que :

$$\max_{x \in [-\lambda, \lambda]} |h_{n,\lambda}(x) - h_n(x)| \leq c \lambda^{-2}, \quad n = 0, 4. \quad (7.12)$$

(ii) Grâce à (i), on contrôle les valeurs de $h_{n,\lambda}(0)$ pour $n = 0, 4$. La propriété fondamentale des fonctions d'onde prolates est qu'elles sont des fonctions propres de la compression de la transformée de Fourier par la projection orthogonale P_λ de $L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}}$ sur le sous-espace des fonctions à support dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. De plus, pour de petites valeurs de n telles que $n = 0, 4$, les valeurs propres $\chi(\lambda)$ sont telles que $1 - \chi(\lambda)$ décroît extrêmement rapidement lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Par exemple, pour $n = 4$, d'après le théorème 1 de Fuchs, on a :

$$1 - \chi(\lambda) \sim \frac{2^{14}}{3} \sqrt{2} \pi^5 e^{-4\pi\lambda^2 + 9\log(\lambda)}$$

De plus, on a

$$\int h_{n,\lambda}(x) dx = \widehat{h_{n,\lambda}}(0) = \chi_n(\lambda) h_{n,\lambda}(0)$$

D'après l'estimation, on contrôle les différences $|h_{n,\lambda}(0) - h_n(0)|$ et donc les différences :

$$\left| \int h_{n,\lambda}(x) dx - h_n(0) \right| = O(\lambda^{-2})$$

Il s'ensuit que l'on obtient une combinaison linéaire h_λ de $h_{0,\lambda}$ et $h_{4,\lambda}$ dont l'intégrale est nulle et qui satisfait l'estimation (7.8).

En fait, nous illustrons dans les deux figures suivantes le comportement des fonctions

$$e_n(\lambda^2) := \lambda^2 \max_{x \in [-\lambda, \lambda]} |h_{n,\lambda}(x) - h_n(x)|$$

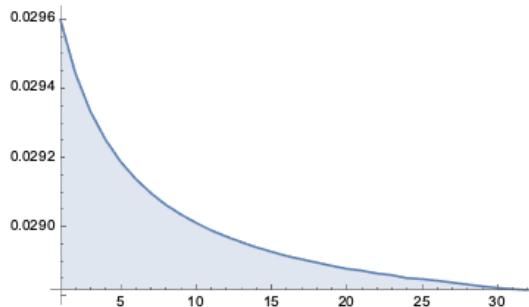


FIGURE 2 – Graphe de $e_0(\mu)$ pour $\mu \leq 36$.

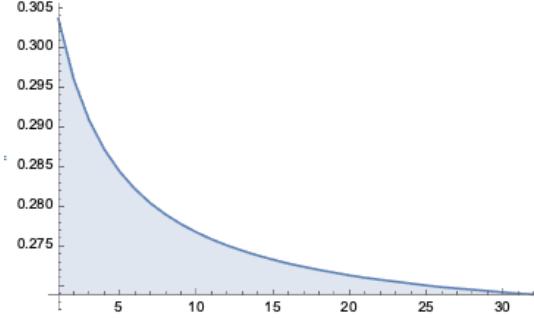


FIGURE 3 – Graphe de $e_4(\mu)$ pour $\mu \leq 36$.

Nous démontrons maintenant la convergence suivante :

Lemme 7.3. *La transformée de Fourier de k_λ converge, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, vers la fonction Ξ de Riemann uniformément sur les sous-bandes fermées de la bande ouverte $|\text{Im}(z)| < \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Nous étudions maintenant ce qui se passe lorsque nous faisons agir l’application \mathcal{E} en restreignant la variable à l’intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. Pour u dans cet intervalle, le nombre d’entiers n tels que $nu \leq \lambda$ est au plus λ/u , donc avec

$$\delta(\lambda) := \max_{x \in [-\lambda, \lambda]} |h_\lambda(x) - h(x)|$$

on obtient, en utilisant la définition de \mathcal{E} dans laquelle intervient $u^{1/2}$

$$|\mathcal{E}(h_\lambda)(u) - \mathcal{E}(h)(u)| \leq u^{1/2} \delta(\lambda) \frac{\lambda}{u}$$

Nous évaluons maintenant la transformée de Mellin de k_λ sur la bande critique, c’est-à-dire :

$$\mathcal{M}(k_\lambda)(s) = \int_0^\infty u^{s-1} k_\lambda(u) du, \quad \Re(s) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Nous utilisons l’estimation suivante, où l’exposant -2 dans u^{-2} provient de deux sources, et $\alpha = \Re(s)$

$$|\mathcal{M}(k_\lambda)(s) - \int_{\lambda^{-1}}^\lambda k(u) u^{s-1} du| \leq \lambda \delta(\lambda) \int_{\lambda^{-1}}^\lambda u^\alpha u^{1/2} u^{-2} du$$

On a

$$\int_{\frac{1}{\lambda}}^\lambda \frac{u^{\alpha+\frac{1}{2}}}{u^2} du = \frac{2(\lambda^{\frac{1}{2}-\alpha} - \lambda^{\alpha-\frac{1}{2}})}{1-2\alpha}$$

et puisque $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a $1 - 2\alpha > 0$, $\frac{1}{2} - \alpha > \alpha - \frac{1}{2}$ qui donne, en utilisant (7.8), i.e. $\delta(\lambda) \leq c\lambda^{-2}$

$$\left| \mathcal{M}(k_\lambda)(s) - \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} k(u)u^{s-1}du \right| \leq 2c\lambda^{-1}\lambda^{\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)^{-1} = 2c\lambda^{-\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)^{-1}$$

Par conséquent, puisque $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a $\frac{1}{2} + \alpha > 0$ et on obtient, pour α fixé

$$\left| \mathcal{M}(k_\lambda)(s) - \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} k(u)u^{s-1}du \right| = O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)$$

Il reste à contrôler le reste dans la transformée de Mellin de k . D'après la formule de Poisson, on a $k(u) = k(u^{-1})$ et il suffit donc de contrôler :

$$\int_{\lambda}^{\infty} k(u)u^{s-1}du$$

mais cette expression tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ en raison de la convergence de l'intégrale. \square

8 Les étapes manquantes

Deux étapes essentielles restent à franchir pour justifier notre démonstration provisoire de l'hypothèse de Riemann. Premièrement, pour appliquer le théorème 5.10 à la forme quadratique de Weil QW_λ , il faut démontrer que sa plus petite valeur propre – dont l'existence est assurée par le théorème 3.6 – est simple et que son vecteur propre correspondant ξ_λ est pair. Deuxièmement, il faut établir que k_λ fournit une approximation suffisamment précise de (un multiple scalaire de) ξ_λ , afin de justifier la convergence des zéros de $\widehat{\xi}_\lambda$ vers les zéros non triviaux de $\zeta(\frac{1}{2} + is)$.

Il existe cependant trois indications qui confirment la faisabilité de ces étapes.

- (1) Toutes les valeurs de λ de l'opérateur d'onde prolate PW_λ sont “paires-simples”.
- (2) Les valeurs extrêmement petites de ε_λ qui apparaissent comme valeurs propres de la forme quadratique de Weil QW_λ se retrouvent également (voir figure 4) lorsqu'on évalue la divergence pour que h_λ appartienne simultanément à P_λ et à \widehat{P}_λ .
- (3) La proximité numérique entre k_λ et ξ_λ s'étend aux fonctions propres d'ordre supérieur de la forme quadratique de Weil.

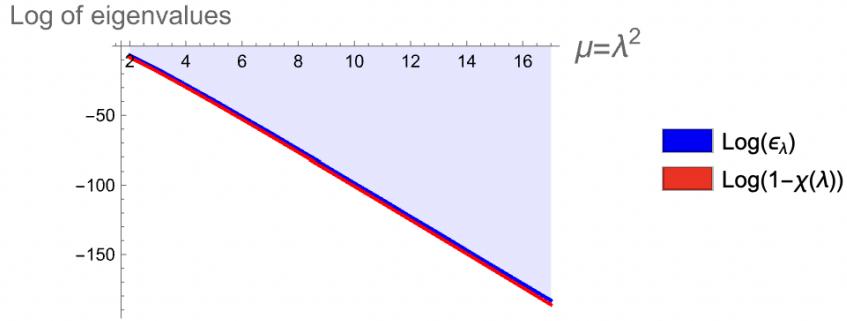


FIGURE 4 – Graphes de $\log(\epsilon_\lambda)$ et $\log(1 - \chi(\lambda))$ comme des fonctions de $\mu = \lambda^2$.

Il demeure possible que notre stratégie pour démontrer la convergence vers les zéros de $\zeta(\frac{1}{2} + is)$ se heurte à des obstacles importants. Néanmoins, elle constitue une forte motivation pour approfondir la relation, initialement mise en évidence dans [3], entre la forme quadratique de Weil QW_λ et l'opérateur d'onde prolate PW_λ . La pierre angulaire de ce développement est la formule de trace établie dans [3], qui relie P_λ , \widehat{P}_λ et l'application \mathcal{E} à QW_λ . Cependant, quelle que soit l'ampleur des progrès réalisés dans cette voie, l'approche actuelle ouvre naturellement la voie à une exploration plus approfondie de la relation inattendue entre deux mondes mathématiques apparemment éloignés.

Le monde de la forme quadratique de Weil. Une découverte majeure d'André Weil est le fait remarquable suivant : l'hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité de certaines formes quadratiques qui ne font intervenir qu'un nombre fini de nombres premiers. Ce résultat est frappant, car on pourrait s'attendre à ce que la résolution de l'hypothèse de Riemann exige la maîtrise de l'ensemble infini des nombres premiers. Or, ici, le problème acquiert un caractère local, se réduisant successivement à des ensembles finis. De plus, dans ce cadre, comme nous l'avons vu, on peut exploiter notre construction générale de fonctions dont les zéros sont entièrement situés sur la droite critique.

Le monde des fonctions d'onde prolate. Développée par David Slepian et ses collaborateurs, et s'appuyant sur les travaux de Claude Shannon sur la théorie de la communication, cette théorie met en évidence la relation miraculeuse entre les projections orthogonales qui définissent les limitations en temps et en fréquence dans l'analyse du signal et un opérateur différentiel classique du second ordre sur la droite réelle : l'opérateur d'onde prolate, lui-même obtenu comment une confluence de l'équation de Heun – un objet parfaitement familier dans l'univers mathématique de Riemann.

L'opérateur prolate joue un double rôle. Dans le domaine infrarouge, il permet d'approximer le vecteur propre minimal de la forme quadratique de Weil. À l'opposé, dans l'ultraviolet,

il fournit également, cf. [6], un modèle d'opérateur autoadjoint dont le spectre reflète le comportement haute fréquence (ultraviolet) des zéros de la fonction zêta de Riemann. Cette dualité souligne la convergence, au sein d'un cadre unifié, des concepts issus de la théorie de l'information, de l'analyse spectrale et de la théorie des nombres, faisant de la relation entre QW_λ et PW_λ un terrain fertile pour des recherches ultérieures.

Références

- [1] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, in : *The Millennium Prize Problems*, J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles (eds.), Clay Math. Inst./AMS, 2006, 107–124.
- [2] C. Carathéodory und L. Fejér, *über den Zusammenhang der Extreme von Harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz*. Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911)218-239.
- [3] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [4] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and ζ -cycles*. Enseign. Math. **69** (2023), no. 1–2, 93–148.
- [5] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta zeros and prolate wave operators*, ArXiv :2310.18423.
- [6] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), no. 22.
- [7] A. Connes and W. van Suijlekom, *Quadratic Forms, Real Zeros and Echoes of the Spectral Action*, Commun. Math. Phys. (2025) 406 :312, volume dedicated to H. Araki.
- [8] Fuchs, W. H. J. *On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band-limited signals* J. Math. Anal. Appl. 9 (1964), 317-330.
- [9] J. Meixner and F. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*. Springer, Berlin, 1954.

- [10] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1859), 671–680.
- [11] B. Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (On the Representability of a Function by a Trigonometric Series) Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol. 13 (1867), pp. 87-132.
- [12] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics **265**. Springer.
- [13] S. G. Scott and K. P. Wojciechowski, *The ζ -Determinant and Quillen determinant for a Dirac operator on a manifold with boundary*. GAFA, Geom. funct. anal. Vol. 10 (2000) 1202 – 1236.
- [14] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Adv. Math., **137** (1998), 82-203.
- [15] D. Slepian and H. Pollack, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, Bell Syst. Tech. J. (1961), 43–63.
- [16] A. Weil, *Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, 1952, 252–265.