

# Formes quadratiques, zéros réels et échos d'actions spectrales

Alain Connes, Walter D. van Suijlekom

*Dédié à Huzihiro Araki  
avec gratitude et admiration*

**Résumé :** Pour une distribution réelle  $\mathcal{D}$  sur l'intervalle  $[0, L]$ , munie de la distribution paire associée  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur l'intervalle  $[-L, L]$ , nous démontrons que si la forme quadratique associée, munie d'un noyau de Schwartz,  $\tilde{\mathcal{D}}(x - y)$ , définit un opérateur auto-adjoint minoré sur  $L^2\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ , dont la plus petite valeur spectrale  $\lambda$  est une valeur propre simple et isolée, associée à la fonction propre paire  $\xi$ , alors tous les zéros de la transformée de Fourier de  $\xi$ ,  $\hat{\xi}(z)$ , appartiennent à la droite réelle. La démonstration se déroule en cinq étapes.

- (1) Nous donnons une preuve  $C^*$ -algébrique d'un corollaire du théorème de structure de Carathéodory-Fejér (1911) pour les matrices de Toeplitz : si  $T \in M_n(\mathbb{C})$  est une matrice de Toeplitz hermitienne, semi-définie positive, de rang  $n - 1$ , et si  $\xi \in \text{Ker } T$ , alors le polynôme  $P(z) = \sum \xi_j z^j$  a tous ses zéros sur le cercle unité.
- (2) Nous formulons et démontrons un analogue continu de ce résultat, en remplaçant la matrice de Toeplitz par un opérateur de convolution à noyau continu  $h(x - y)$ , et le polynôme  $P(z)$  par la transformée de Fourier de la fonction propre associée à la plus grande valeur propre.
- (3) Nous analysons les troncatrices de dimension finie des formes quadratiques définies par des distributions réelles paires  $\mathcal{D}$  sur  $[-L, L]$ , et observons que les matrices résultantes présentent une structure déjà rencontrée dans les développements perturbatifs de l'action spectrale.
- (4) Nous établissons un analogue du corollaire de Carathéodory-Fejér pour les matrices de cette structure particulière, étendant ainsi le résultat de localisation des zéros au-delà du cadre classique de Toeplitz.
- (5) Enfin, nous appliquons un théorème classique de Hurwitz concernant les zéros des limites uniformes de fonctions holomorphes pour en déduire le résultat général énoncé ci-dessus.

## 1 Introduction

Le théorème de Carathéodory-Fejér de 1911 [5] (voir aussi [4, Théorème 1.3.6]) décrit la structure des matrices de Toeplitz hermitiennes semi-définies positives comme suit. Soit

$$T = \begin{bmatrix} c_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_n \\ c_1 & c_0 & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_{n-1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & \bar{c}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Alors, si  $T$  est semi-définie positive de rang  $r$ , il existe des points distincts  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$  (le cercle unité) et des poids positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$  tels que :

$$T = VDV^*,$$

---

Traduction de la version arxiv : <https://arxiv.org/pdf/2511.23257>, Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

où  $V \in \mathbb{C}^{(n+1) \times r}$  est la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_r \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n & \cdots & z_r^n \end{bmatrix},$$

et  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  est une matrice diagonale à coefficients réels positifs.

Dans notre travail sur les systèmes d'opérateurs [10], nous avons montré comment le théorème ci-dessus peut être déduit de la théorie de la dualité des systèmes d'opérateurs. Cette factorisation joue également un rôle central dans la démonstration de la positivité de Weil tronquée dans [7].

Un corollaire direct du théorème de Carathéodory-Fejér est le suivant :

**Corollaire 1.1 :** *Soit  $T \in M_{n+1}(\mathbb{C})$  une matrice de Toeplitz hermitienne, semi-définie positive, de rang  $n$ , et soit  $\xi \in \text{Ker } T$ . Alors, tous les zéros du polynôme*

$$P(z) := \sum_{j=0}^n \xi_j z^j$$

*se trouvent sur le cercle unité.*

Ce corollaire présente une saveur remarquable de théorie des nombres, faisant écho à l'analogie de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions ; voir [12] pour une discussion plus approfondie de ce lien. En théorie des nombres, les matrices de Toeplitz de ce type apparaissent naturellement, et le corollaire s'applique pour montrer que les zéros du polynôme  $P(z)$  associé à un vecteur propre de la plus petite valeur propre d'une telle matrice sont tous situés sur le cercle unité. La principale difficulté dans ce contexte devient alors la vérification que zéro est bien la plus petite valeur propre (simple) de  $T$ .

Dans le présent article, nous étudions un analogue distributionnel du corollaire, motivé par sa pertinence potentielle pour l'hypothèse de Riemann elle-même. Notre approche se déroule en plusieurs étapes :

1. Nous présentons une démonstration  $C^*$ -algébrique du corollaire 1.1.
2. Nous formulons et démontrons un analogue continu du corollaire 1.1, dans lequel la matrice de Toeplitz est remplacée par un opérateur de convolution à noyau continu  $h(x - y)$  et où le polynôme  $P(z)$  est remplacé par la transformée de Fourier de la fonction propre associée à la plus grande valeur propre.
3. Nous analysons les troncatures finies des formes quadratiques définies par des distributions paires réelles  $\mathcal{D}$  à support sur  $[-L, L]$  et observons que les matrices résultantes présentent une structure déjà rencontrée dans les développements perturbatifs de l'action spectrale.
4. Nous démontrons un analogue du corollaire 1.1 pour des matrices de ce type particulier. Enfin, en utilisant un résultat classique de Hurwitz sur les zéros des limites uniformes des fonctions

holomorphes, nous déduisons le théorème général suivant :

**Théorème 1.2.** : Soit  $L > 0$ ,  $\mathcal{D}$  une distribution réelle sur l'intervalle  $[0, L]$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  la distribution paire associée sur  $[-L, L]$ . Supposons que la forme quadratique à noyau de Schwartz  $\tilde{\mathcal{D}}(x - y)$  définisse un opérateur auto-adjoint minoré  $A$  sur  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ , et que le minimum de son spectre soit une valeur propre simple et isolée  $\lambda$ , avec une fonction propre paire  $\xi$ . Alors, tous les zéros de la transformée de Fourier de la fonction  $\hat{\xi}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , sont situés sur la droite réelle.

Pour la formulation précise, nous renvoyons au théorème principal ; la formulation ci-dessus est légèrement imprécise, comme indiqué dans la remarque 4.3. Au cours de la démonstration, nous rencontrons plusieurs exemples illustratifs et cas particuliers. Une vérification matricielle détaillée du théorème est fournie en annexe.

**Remerciements** : WvS remercie Teun van Nuland pour ses discussions fructueuses. Les auteurs sont reconnaissants à un relecteur anonyme pour ses nombreuses suggestions et commentaires.

## 2 Cas de Toeplitz :

Rappelons le système d'opérateurs  $C^*(\mathbb{Z})_{(n+1)} \subseteq C^*(\mathbb{Z})$  défini par troncatures de Fourier sur l'intervalle  $[-n, n] \subset \mathbb{Z}$  de [10]. Il s'agit du système d'opérateurs dual du système d'opérateurs des matrices de Toeplitz, qui permet en particulier d'associer une forme linéaire positive  $\mathcal{L}_T$  à toute matrice de Toeplitz positive  $T$  :

$$\mathcal{L}_T : C^*(\mathbb{Z})_{(n+1)} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f \mapsto \sum_{k=-n}^n f_k c_k.$$

Notons qu'une matrice de Toeplitz réelle positive  $T$  de taille  $n + 1$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_n & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}; \quad (c_k \in \mathbb{R}).$$

Le point de départ de notre démonstration du corollaire 1 est le résultat purement \*-algébrique suivant :

**Proposition 2.1.** : Soit  $T = (c_k)$  une matrice de Toeplitz réelle positive de dimension  $(n + 1)$  et de rang  $n$ , et soit  $(a_j)_{j=0}^n$  un vecteur réel de  $\text{Ker } T$ .

1. L'idéal  $J$  de  $A = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$  engendré par  $P = \sum_0^n a_j X^j$  est stable par involution canonique,  $(aX^n)^* := \bar{a}X^{-n}$ , de  $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ .
2. Les monômes  $X^j$  ( $j = 0, \dots, n - 1$ ) forment une base de  $A/J$ .
3. Il existe une unique forme linéaire  $\phi$  sur le quotient  $A/J$  telle que :

$$\phi(X^j) = c_j, \forall j \in \{0, \dots, n - 1\} \tag{1}$$

La forme linéaire  $\phi$  est positive sur la  $*$ -algèbre  $A/J$ .

Preuve : (1) On a  $J^* = J$  puisque  $P(X)$  est soit palindromique, soit antipalindromique, c'est-à-dire  $a_{n-j} = \pm a_j$  pour tout  $j = 0, \dots, n$ . En effet, du fait de la structure de  $T$  en tant que matrice de Toeplitz, si  $(a_j)_j$  appartient au noyau de  $T$ , alors  $(a_{n-j})_j$  en fait partie. De plus, ce noyau étant unidimensionnel, on a  $a_{n-j} = \lambda a_j$ , d'où  $a_j = \lambda^2 a_j$ , ce qui implique  $\lambda = \pm 1$ . Mais alors

$$P^*(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^{-j} = \pm X^{-n} P(X)$$

comme affirmé.

(2) Puisque  $T$  est de rang  $n$ , on a  $a_0 \neq 0$  (voir [12, Lemme 33] ou en montrant directement que si  $a_0 = 0$ , alors  $(a_{j+1})_{j=0}^n$  avec  $a_{n+1} \equiv 0$  appartient également à  $\text{Ker } T$ ). Ainsi,  $X$  est inversible dans  $\mathbb{C}[X]/J'$  où  $J' = PC[X]$ , car modulo  $P$ , on a  $a_0 + XQ = 0$  pour  $Q = (P - a_0)/X$ . L'anneau  $A = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$  est la localisation de  $\mathbb{C}[X]$  en  $X$ , et la localisation commute avec les quotients [2, Proposition 3.3 et Corollaire 3.4], puisque  $X$  n'est pas un diviseur de zéro modulo  $J'$ . Comme  $X$  est inversible dans  $\mathbb{C}[X]/J'$ , la localisation en  $X$  ne modifie pas  $\mathbb{C}[X]/J'$ , et on obtient ainsi l'égalité  $A/J = \mathbb{C}[X]/J'$ , ce qui démontre la conclusion.

(3) Découle de (2).

(4) Soit  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  l'unique forme linéaire qui s'annule sur l'idéal  $J$  et vérifie (1). Afin de montrer que  $\phi$  est positif, nous montrons d'abord que  $\phi(X^{-j}) = c_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n-1$ . On a

$$\phi(X^{-1}P) = 0 \implies a_0\phi(X^{-1}) + \sum_{j=1}^n a_j\phi(X^{j-1}) = 0 \implies a_0\phi(X^{-1}) + \sum_{j=1}^n a_j c_{j-1} = 0.$$

Puisque  $(a_j) \in \text{Ker } T$ , on a, en fonction de la deuxième ligne de  $T$ , que :

$$\sum_{j=0}^n c_{j-1} a_j = 0$$

et donc  $\phi(X^{-1}) = c_{-1} = c_1$ . Ce raisonnement peut être répété en considérant les lignes suivantes de  $T$  pour obtenir par récurrence que  $\phi(X^{-k}) = c_{-k} = c_k$ . Notons que, d'après la première ligne de  $T$ , il découle également que  $\phi(X^n) = c_n$ . On conclut que  $\phi(X^j) = c_{|j|}$  pour tout  $j = -n, \dots, n$ .

Pour montrer que  $\phi$  est positif, c'est-à-dire que  $\phi(f^* * f) \geq 0$  pour tout  $f \in A$ , remarquons que la valeur de  $\phi(f^* * g)$  ne dépend que des classes de  $f$  et  $g$  dans  $A/J$ . Ainsi, en posant  $f = \sum_0^{n-1} f_j X^j$ , on obtient alors

$$\phi(f^* * f) = \sum f_j \bar{f}_k \phi(X^{j-k}) = \sum f_j \bar{f}_k c_{|j-k|} = \langle f \mid Tf \rangle \geq 0$$

ce qui montre (4). □

**Proposition 2.2.** : Soit  $T = (c_k)$  une matrice de Toeplitz positive de dimension  $(n + 1)$  et de rang  $n$ . Si  $(a_j)_{j=0}^n$  est un vecteur de  $\text{Ker } T$ , alors le polynôme  $P(z) = \sum_j a_j z^j$  a tous ses zéros sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ .

*Preuve* : La forme linéaire positive  $\phi$  sur  $A$  s'annulant sur  $J$  définit une forme linéaire positive sur la  $C^*$ -algèbre enveloppante  $C^*(\mathbb{Z})$  de l'algèbre involutive  $A$ , c'est-à-dire une mesure positive sur le dual de Pontrjagin  $U(1)$  de  $\mathbb{Z}$ . Cette mesure est supportée par les  $n$  valeurs propres de l'élément unitaire  $\pi(X)$  associé à  $X$  dans la GNS-représentation  $\pi$  de  $(A, \phi)$ , qui est de dimension  $n$  par construction. Puisque  $P \in J \subset \text{Ker } \pi$ , ces valeurs propres correspondent aux racines du générateur  $P$  de  $J$ , qui sont donc toutes de module un.  $\square$

**Remarque 2.3.** : En général, lorsque le noyau de  $T$  est de dimension supérieure à 1 (autrement dit, lorsque la valeur propre extrême n'est pas simple), la décomposition de Carathéodory-Fejér établit une équivalence entre l'appartenance au noyau et l'annulation du polynôme correspondant sur les nombres complexes de module 1 apparaissant dans cette décomposition. Ainsi, si le nombre de ces nombres complexes est strictement inférieur à  $n$ , cette condition sera satisfaite par des polynômes ayant ces nombres complexes particuliers comme zéros, mais pouvant avoir par ailleurs des zéros quelconques. Cela signifie que, de manière générale, le théorème n'est pas vérifié si la valeur propre n'est pas simple. La formulation correcte du théorème est la suivante : l'intersection des zéros des différentes fonctions propres se situe sur le cercle unité. Ceci rappelle la notion de radical (noyau) d'une forme quadratique.

### 3 Le cas du noyau continu

Dans cette section, nous étendrons le cas de Toeplitz au cas continu.

**Théorème 3.1.** : Soit  $h \in C([-L, L])$  une fonction réelle continue paire. Soit  $K$  l'opérateur sur  $L^2([0, L])$  défini par :

$$(Kf)(x) = \int h(x - y)f(y)dy. \quad (2)$$

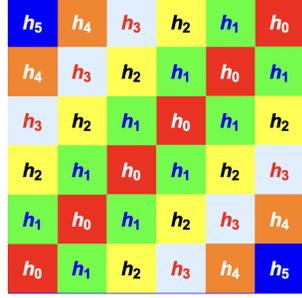
Alors  $K$  est un opérateur auto-adjoint compact. Supposons que sa valeur propre de plus grand module soit simple et soit  $\xi \in L^2([0, L])$  son vecteur propre. Si l'on prolonge  $\xi$  à un élément de  $L^2(\mathbb{R})$  de sorte qu'il s'annule en dehors de  $[0, L]$ , alors tous les zéros de la fonction  $\widehat{\xi}$  appartiennent à  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

*Preuve* : L'opérateur  $K$  de (2) est de classe de Hilbert-Schmidt puisque  $h(x - y)$  est de carré intégrable. On approche d'abord  $K$  par des opérateurs de rang fini comme suit. Puisque la fonction  $h$  est continue réelle et même sur  $[-L, L]$ , on peut trouver, étant donné  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$  et des scalaires  $h_j \in \mathbb{R}$  pour  $j = 0, \dots, L/\alpha = N \in \mathbb{N}$ , tels que, avec  $j(x)$  désignant la partie entière de  $x/\alpha$ , on a

$$|h(x - y) - h_{|j(x) - j(y)|}| \leq \epsilon, \quad \forall x, y \in [0, L].$$

---

\*. représentation de Gelfand-Naimark-Segal.



$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1 : Approximation de  $h(|x - y|)$  et matrice de Toeplitz réfléchie (par symétrie par rapport à l'axe  $x$ ).



FIGURE 2 : Contour d'intégration pour la définition de la projection  $P$  dans l'équation (3).

Ceci découle du choix de  $\alpha > 0$  et des scalaires  $h_j \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in [0, L]$

$$|h(x) - h_j| \leq \epsilon, \quad \forall j \mid |j - j(x)| \leq 1,$$

comme on le voit en comparant  $j(|x - y|)$  avec  $|j(x) - j(y)|$ .

Soit  $\chi_j$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $I_j := \{x \mid j(x) = j\}$  et  $T$  la matrice de Toeplitz  $T_{n,m} := h_{|n-m|}$ , on obtient ainsi l'inégalité

$$|h(x - y) - \sum T_{n,m} \chi_n(x) \chi_m(y)| \leq \epsilon, \quad \forall x, y \in [0, L].$$

Il découle du contrôle de Hilbert-Schmidt de la norme que l'on obtient ainsi une suite  $R_n$  d'opérateurs de rang fini convergeant en norme vers  $K$ , chacun de la forme  $\dagger$ , avec  $T$  une matrice de Toeplitz symétrique réelle et  $\chi_j$  des fonctions caractéristiques d'intervalles :

$$R_n = \sum T_{i,j} |\chi_i\rangle \langle \chi_j|, \quad \|K - R_n\| \rightarrow 0.$$

Soit alors  $\xi$  un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $K$  de plus grand module ; sans perte de généralité, on suppose que  $\lambda > 0$ . La projection spectrale  $P$ , obtenue par intégrale de Cauchy de la résolvante de  $K$  le long du contour  $C$  (voir figure 3), isole  $\lambda$  du reste de  $\text{Spec } K$ .

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_C (z - K)^{-1} dz \tag{3}$$

$\dagger$ . Note de la traductrice : ici, il semblerait qu'il manque quelque chose.

est de rang un, et  $P\xi = \xi$ . Définissons  $P_n$  par la même formule en remplaçant  $K$  par  $R_n$ . Ceci est cohérent pour  $n$  suffisamment grand, car  $\|K - R_n\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On a alors  $P_n \rightarrow P$  en norme, et donc  $P_n$  est de rang un pour  $n$  suffisamment grand. Posons  $\xi_n = P_n\xi$ . On a alors  $\xi_n \rightarrow \xi$  en norme. Montrons que pour  $n$  suffisamment grand,  $\xi_n$  est un vecteur propre de  $R_n$  associé à la plus grande valeur propre.

Par construction, pour  $n$  suffisamment grand, il s'agit d'un vecteur propre non nul de  $R_n$  et le seul sur l'intervalle compris entre la borne inférieure et la borne supérieure de  $C$ . Puisque nous avons choisi  $\|K\| + 1$  comme borne supérieure, il s'ensuit que, pour  $n$  suffisamment grand, il s'agit de la plus grande valeur propre de  $R_n$ . On peut donc affirmer que  $\xi$  est la limite de la norme de la suite  $\xi_n$  où, pour chaque  $n$ ,  $\xi_n$  est de la forme :

$$\xi_n = \sum a_j \chi_j, \quad \sum a_j z^j = 0 \quad \mathbb{R} \implies |z| = 1$$

et où les  $\chi_j$  sont les fonctions caractéristiques des  $N = L/\alpha$  intervalles  $I_j = I_0 + j\alpha$ ,  $0 \leq j < N$  formant une partition de  $[0, L)$ . On calcule maintenant la transformée de Fourier de  $\xi_n$ . La transformée de Fourier de  $\chi_0$  est

$$\widehat{\chi}_0(s) = \int_0^\alpha \exp(-isx) dx = \frac{i(-1 + e^{-i\alpha s})}{s}.$$

On a  $\chi_j(x) = \chi_0(x - j\alpha)$ , et cela donne  $\widehat{\chi}_j(s) = \exp(-i\alpha sj)\widehat{\chi}_0(s)$  de telle façon que l'on obtient

$$\widehat{\xi}_n(s) = P(\exp(-i\alpha s))\widehat{\chi}_0(s), \quad P(z) := \sum a_j z^j$$

Ainsi, les zéros de  $\widehat{\xi}_n$  sont l'union de l'ensemble  $\{\frac{2n\pi}{\alpha} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  des zéros de  $\widehat{\chi}_0$  avec l'ensemble des nombres complexes  $s$  tels que  $\exp(-i\alpha s)$  soit une des racines de  $P(z)$ . Or, nous savons (d'après le cas de Toeplitz, Proposition 2.2) que toutes ces racines sont de module 1. Pour chaque racine  $z_k$  de  $P(z) = 0$ , soit  $s_k \in \mathbb{R}$  tel que  $\exp(-is_k\alpha) = z_k$ , l'ensemble  $Z$  des zéros de  $\widehat{\xi}_n$  est alors :

$$Z = \left\{ \frac{2n\pi}{\alpha} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \cup_k \left\{ s_k + \frac{2n\pi}{\alpha} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Puisque la suite  $\xi_n$  converge vers  $\xi$  dans  $L^2[0, L]$ , on trouve pour les fonctions entières  $\widehat{\xi}_n(s)$  et  $\widehat{\xi}(s)$  que :

$$|\widehat{\xi}(s) - \widehat{\xi}_n(s)| \leq \|\xi - \xi_n\|_{L^2} \int_0^L e^{2\Im(s)x}.$$

On en déduit que la suite  $\widehat{\xi}_n(s)$  converge uniformément vers  $\widehat{\xi}(s)$  sur les sous-ensembles compacts de  $\mathbb{C}$ . Ainsi, le théorème de Hurwitz montre que tous les zéros de  $\widehat{\xi}(s)$  sont réels.  $\square$

## 4 Forme quadratique $Q$ associée à une distribution

Soit  $L > 0$ . On part d'une distribution  $\mathcal{D}$  sur l'intervalle  $[0, L]$ , c'est-à-dire une forme linéaire continue sur  $C^\infty([0, L])$ , formellement définie par :

$$\mathcal{D}(f) = \int_0^L f(x)\mathcal{D}(x), \quad \forall f \in C^\infty([0, L])$$

et on l'utilise pour définir une distribution paire  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur  $[-L, L]$  par symétrisation :

$$\tilde{\mathcal{D}}(f) := \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(\tilde{f}), \quad \tilde{f}(x) := f(-x), \quad \forall x \in [-L, L]. \quad (4)$$

Notons que  $\tilde{\mathcal{D}}(f)$  reste défini lorsque  $f$  est lisse sur  $[0, L]$  et  $[-L, 0]$ , mais pas nécessairement lisse en 0. On considère l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2([0, L], dx)$  muni d'une base orthonormée

$$U_n(x) := L^{-\frac{1}{2}} \exp(2\pi i n x / L), \quad \forall x \in [0, L], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Ces fonctions sont étendues à  $x \in \mathbb{R}$  de sorte qu'elles s'annulent pour  $x \notin [0, L]$ . On utilise alors l'involution  $f^*(x) := \overline{f(-x)}$  et la convolution

$$(f * g)(y) := \int f(x)g(y-x)dx.$$

On utilise ensuite  $\mathcal{D}$  pour obtenir une forme hermitienne dense  $Q$  sur les polynômes trigonométriques par :

$$\langle f|g \rangle_Q := \tilde{\mathcal{D}}(f^* * g) = \int_0^L ((f^* * g)(x) + (f^* * g)(-x)) \mathcal{D}(x), \quad (6)$$

dont la matrice dans la base orthonormée  $U_n$  est donnée par :

$$\langle U_m|U_n \rangle_Q := \int_0^L ((U_m^* * U_n)(y) + (U_m^* * U_n)(-y)) \mathcal{D}(y)dy. \quad (7)$$

On suppose que cette expression définit une forme quadratique auto-adjointe minorée dont le spectre possède une valeur propre isolée à son minimum et nous nous intéressons au vecteur propre  $\eta$  associé à cette plus petite valeur propre (supposée simple).

Pour  $\mathcal{D} = \delta_0$  la masse de Dirac en  $y = 0$ , on a :

$$\int_0^L ((U_m^* * U_n)(y) + (U_m^* * U_n)(-y)) \mathcal{D}(y)dy = 2(U_m^* * U_n)(0) = 2 \int_0^L U_n(x) \overline{U_m(x)} dx = 2 \langle U_m|U_n \rangle$$

Ce qui montre qu'en ajoutant à  $\mathcal{D}$  un multiple de  $\delta_0$ , on peut supposer que la forme quadratique  $Q$  est positive et que le vecteur propre  $\eta$  appartient au radical (i.e. au noyau) de cette forme quadratique, c'est-à-dire que l'on a :

$$\langle U_n|\eta \rangle_Q = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Par analogie avec le cas de Toeplitz, on souhaite obtenir une forme linéaire positive sur le quotient de l'algèbre de convolution des fonctions sur  $\mathbb{R}$  par l'idéal engendré par  $\eta$ , permettant ainsi de prolonger la forme quadratique  $Q$ . On obtiendrait alors un analogue du corollaire 1 en montrant

que les zéros de la fonction  $\widehat{\eta}$  sont tous réels.

Au lieu de traiter directement cette situation de dimension infinie, notre stratégie consiste à calculer d'abord la matrice (7), à observer qu'elle possède une forme particulière déjà rencontrée dans la théorie des perturbations de l'action spectrale, et à démontrer une forme matricielle de la réalité des zéros des transformées de Fourier des vecteurs propres les plus bas. Le résultat de dimension infinie s'en déduit ensuite par approximation à l'aide du théorème de Hurwitz, comme dans la démonstration du théorème 3.

#### 4.1 Matrice de la forme quadratique $Q$

Pour  $y \in [0, L]$ , on a, pour  $n \neq m$ , en utilisant  $U_m(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $U_n(x) = 0$  pour  $x > L$ ,

$$\begin{aligned}
(U_m^* * U_n)(y) &= \int U_m^*(y-x)U_n(x)dx = \int \overline{U_m(x-y)}U_n(x)dx \\
&= \frac{1}{L} \int_y^L \exp(2\pi im(y-x)/L + 2\pi inx/L)dx \\
&= \frac{\exp(2\pi imy/L)}{L} \int_y^L \exp(2\pi i(n-m)x/L)dx \\
&= \frac{\exp(2\pi imy/L)}{2\pi i(n-m)} (\exp(2\pi i(n-m)x/L))_y^L \\
&= \frac{\exp(2\pi imy/L) - \exp(2\pi iny/L)}{2\pi i(n-m)}.
\end{aligned}$$

De plus, et toujours avec  $y \in [0, L]$ , on a :

$$(U_m^* * U_n)(-y) = \overline{(U_m^* * U_n)^*(y)} = \overline{(U_n^* * U_m)(y)}.$$

Ainsi, puisque la formule  $\frac{\exp(2\pi imy/L) - \exp(2\pi iny/L)}{2\pi i(n-m)}$  est symétrique en  $n, m$ , on obtient pour  $n \neq m$  et  $y \in [0, L]$  :

$$\begin{aligned}
(U_m^* * U_n)(y) + (U_m^* * U_n)(-y) &= 2 \Re \left( \frac{\exp(2\pi imy/L) - \exp(2\pi iny/L)}{2\pi i(n-m)} \right) \\
&= \frac{\sin(2\pi my/L) - \sin(2\pi ny/L)}{\pi(n-m)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Pour  $m = n$ , le même calcul donne

$$(U_n^* * U_n)(y) = \frac{1}{L} \int_y^L \exp(2\pi in(y-x)/L + 2\pi inx/L)dx = (1-y/L) \exp(2\pi iny/L)$$

et

$$(U_n^* * U_n)(y) + (U_n^* * U_n)(-y) = 2 \Re ((1-y/L) \exp(2\pi iny/L)) = 2(1-y/L) \cos(2\pi ny/L). \tag{9}$$

On peut résumer le calcul ci-dessus comme suit :

**Proposition 4.1** : Soit  $\mathcal{D}$  défini ci-dessus et  $Q$  la forme quadratique  $Q$  de (7).

Soit  $\psi(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^L \sin(2\pi x(1-y/L)) \mathcal{D}(y) dy$ . Les éléments  $q_{m,n}$  de la matrice  $Q$  sont donnés comme suit :

$$q_{m,n} = \begin{cases} \frac{\psi(m) - \psi(n)}{m - n} & \text{si } n \neq m, \\ \psi'(n), & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (10)$$

*Preuve* : On a, pour  $n \neq m$ , en utilisant (7), (8) et l'égalité

$$\begin{aligned} \langle U_m | U_n \rangle_Q &= \int_0^L ((U_m^* * U_n)(y) + (U_m^* * U_n)(-y)) \mathcal{D}(y) dy \\ &= \int_0^L \frac{\sin(2\pi my/L) - \sin(2\pi ny/L)}{\pi(n - m)} \mathcal{D}(y) dy = \frac{\psi(n) - \psi(m)}{n - m}. \end{aligned}$$

Pour  $n = m$ , on a, en utilisant (7), (9)

$$\langle U_n | U_n \rangle_Q = 2 \int_0^L (1 - y/L) \cos(2\pi ny/L) \mathcal{D}(y) dy = \partial_x \psi(x)|_{x=n}$$

ce qui donne l'égalité recherchée. □

## 4.2 Les valeurs diagonales

La proposition 4.1 donne les valeurs diagonales de la matrice de forme quadratique  $Q$ , mais contrairement aux valeurs hors diagonale qui ne dépendent que des premières composantes de Fourier de la distribution  $\mathcal{D}$ , les valeurs diagonales impliquent toutes les composantes de Fourier de  $\mathcal{D}$ . Ceci découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 (1 - x) \exp(2\pi i k x) \cos(2\pi n x) dx &= \frac{ik}{\pi k^2 - \pi n^2}, & \forall k \neq \pm n; \\ 2 \int_0^1 (1 - x) \exp(2\pi i n x) \cos(2\pi n x) dx &= \frac{1}{2} + \frac{i}{4\pi n}, & \forall n \neq 0. \end{aligned}$$

En effet, ces égalités montrent que le coefficient de Fourier  $a_k$  de  $\mathcal{D}(x)$  apparaît dans le terme diagonal  $q_{n,n}$  car, pour  $n \neq 0$ ,

$$q_{n,n} = \sum_{k \neq \pm n} a_k \frac{ik}{\pi k^2 - \pi n^2} + \frac{1}{2}(a_n + a_{-n}) + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{i}{n} a_n - \frac{i}{n} a_{-n} \right).$$

Puisque la distribution  $\mathcal{D}(x)$  est à valeurs réelles, on a  $a_{-k} = \bar{a}_k$  de sorte que les termes  $ika_k$  et  $i(-k)a_{-k} = \overline{ika_k}$  s'additionnent pour donner une contribution réelle pour  $k \neq \pm n$ . Avec  $a_k = x_k + iy_k$  pour  $k > 0$ , on obtient pour  $k \neq n$  :

$$ika_k + i(-k)a_{-k} = -2ky_k$$

ce qui donne la première contribution à  $q_{n,n}$  :

$$\sum_{k>0, k \neq n} y_k \frac{2k}{\pi n^2 - \pi k^2}.$$

Pour  $k = n$ , on obtient les deux termes

$$\frac{1}{2}(a_n + a_{-n}) + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{i}{n}a_n - \frac{i}{n}a_{-n} \right) = x_n - y_n \frac{1}{2\pi n}.$$

Pour  $n = 0$

$$q_{0,0} = \sum_{k \neq 0} a_k \frac{ik}{\pi k^2} + a_0 = x_0 - \sum_{k>0} y_k \frac{2}{\pi k}.$$

**Proposition 4.2.** : Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Les matrices  $(q_{i,j})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$ , obtenues à partir des distributions  $\mathcal{D}$  par la proposition 4.1, sont toutes des matrices de la forme suivante, où  $a_i$  et  $b_j$  sont des nombres réels tels que  $a_{-i} = a_i$  et  $b_{-i} = -b_i$ ,  $\forall i \in \{-N, \dots, N\}$

$$q_{i,i} = a_i, \quad \forall i, \quad q_{i,j} = \frac{b_i - b_j}{i - j}, \quad \forall j \neq i; \quad i, j \in \{-N, \dots, N\}. \quad (11)$$

De plus, étant donné une matrice  $Q = (q_{i,j})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$  de la forme ci-dessus, il existe une unique distribution réelle  $\mathcal{D}(x)$  dont toutes les composantes de Fourier  $a_n = 0$  pour  $n \notin \{-N, \dots, N\}$  et dont la matrice associée est  $Q$ .

*Preuve* : La proposition 4.1 montre que les matrices  $(q_{i,j})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$  obtenues à partir des distributions  $\mathcal{D}$  par la proposition 4.1 sont de la forme donnée par (11). Montrons que, réciproquement, toute matrice de la forme (11) apparaît.

L'égalité  $\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^L \sin(2\pi x(1 - y/L)) \mathcal{D}(y) dy$  de la proposition 4.1 donne, en termes des coefficients de Fourier  $a_k = x_k + iy_k$  de  $\mathcal{D}(x)$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , en prenant  $L = 1$  par souci de simplicité :

$$\psi(n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(2\pi ny) \mathcal{D}(y) dy = \frac{1}{2\pi i} a_n - \frac{1}{2\pi i} a_{-n} = \frac{1}{\pi} y_n.$$

Ainsi, les coefficients de la matrice  $q_{i,j}$  pour  $i \neq j$  déterminent les nombres réels  $y_j$  qui sont les parties imaginaires des coefficients de Fourier  $a_k$  de  $\mathcal{D}$ . Ces parties imaginaires contribuent ensuite comme suit à la valeur diagonale, pour  $n \neq 0$  :

$$q_{n,n} = x_n - y_n \frac{1}{2\pi n} + \sum_{k>0, k \neq n} y_k \frac{2k}{\pi n^2 - \pi k^2} \quad (12)$$

On peut ainsi choisir la partie réelle  $x_n$  des coefficients de Fourier  $a_n$  de  $\mathcal{D}$  pour obtenir des valeurs diagonales arbitraires  $a_i$ , selon les besoins. De plus, les valeurs hors diagonale déterminent de manière unique les parties imaginaires  $y_n$  des coefficients de Fourier de  $\mathcal{D}(x)$  pour  $n \in \{-N, \dots, N\}$ , et les valeurs diagonales déterminent alors de manière unique les parties réelles  $x_n$  des coefficients de Fourier de  $\mathcal{D}(x)$  pour  $n \in \{-N, \dots, N\}$ .

**Remarque 4.3.** Il est important de partir d'une distribution  $\mathcal{D}$  sur  $[0, L]$  et de définir ensuite la forme quadratique associée à l'aide de (6), plutôt que de partir d'une distribution paire sur  $[-L, L]$ . Par exemple, la dérivée  $\delta'_0$  de la distribution de Dirac en  $0 \in [0, L]$  donne lieu à une forme quadratique non nulle, tandis que la distribution paire associée, obtenue par symétrisation, est égale à 0.

### 4.3 Relation avec l'action spectrale

Il existe une analogie étroite entre la forme quadratique dans (11) et la dérivée seconde par rapport aux perturbations de l'action spectrale [6], comme nous allons l'expliquer. Supposons que l'on considère un opérateur auto-adjoint linéaire  $D$  dans un espace de Hilbert de dimension finie, dont le spectre simple est étiqueté par  $\{\lambda_j\}_{j=-N}^N$ , avec des vecteurs propres correspondants  $\{e_j\}$ . Supposons que nous ayons une matrice réelle symétrique positive  $Q = (q_{ij})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$  définie comme suit :

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{b_i - b_j}{\lambda_i - \lambda_j} & i \neq j \\ a_i & i = j \end{cases} \quad (13)$$

pour certains  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . La forme quadratique  $Q$  est donnée en termes du produit scalaire de Hilbert comme suit :

$$Q(f, g) = \langle Qf \mid g \rangle = \langle f \mid Qg \rangle. \quad (14)$$

Considérons maintenant une fonction paire et régulière  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sous les perturbations  $D \mapsto D + A$ , on peut calculer que la forme quadratique donnée par la dérivée seconde de Gateaux de l'action spectrale est de la forme [13, 20, 19, 15, 16].

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (f(D + tA)) \Big|_{t=0} = \sum_{i,j} A_{ij} A_{ji} q_{ij}$$

où  $q_{ij}$  est exactement comme dans (11) pour  $b_i = f'(\lambda_i)$ ,  $a_i = f''(\lambda_i)$  et  $\lambda_i = i$ , le spectre de l'opérateur de Dirac  $D = D_{S^1}$  sur le cercle.

## 5 Cas pair de dimension finie

Dans cette section, nous traitons le cas pair général de dimension finie. On considère une matrice réelle symétrique positive  $Q = (q_{i,j})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$  de la forme (11), i.e.

$$q_{i,i} = a_i, \quad \forall i, \quad q_{i,j} = \frac{b_i - b_j}{i - j}, \quad \forall j \neq i; \quad i, j \in \{-N, \dots, N\}$$

où les scalaires  $a_i$  vérifient  $a_{-j} = a_j$  et  $b_{-j} = -b_j$  pour tout  $j \in \{-N, \dots, N\}$ .

Soit  $e_j$ ,  $j \in \{-N, \dots, N\}$ , la base orthonormée canonique donnée par les vecteurs  $(\delta(k, j))$  dont toutes les composantes sont nulles sauf une. En utilisant le produit scalaire canonique  $\langle \alpha | \beta \rangle$ , la forme quadratique  $Q$  est donnée par :

$$Q(f, g) = \langle Qf | g \rangle = \langle f | Qg \rangle. \quad (15)$$

**Lemme 5.1.** : (i) Soit  $\gamma$  tel que  $\gamma(e_j) := e_{-j}$  pour tout  $j \in \{-N, \dots, N\}$ . On a alors  $\gamma^2 = \text{Id}$  et  $Q\gamma = \gamma Q$ .

(ii) Soit  $D$  défini par  $D(e_j) := j e_j$  pour tout  $j \in \{-N, \dots, N\}$ . On a  $D\gamma = -\gamma D$  et

$$DQ - QD = |\beta\rangle\langle\eta| - |\eta\rangle\langle\beta|, \quad \beta = \sum b_j e_j, \quad \eta = \sum e_j. \quad (16)$$

*Preuve* : (i) On a  $q_{-i, -j} = q_{i, j}$  pour tout  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$ .

(ii) Les éléments diagonaux de la matrice diagonale  $D$  sont antisymétriques, ce qui donne  $D\gamma = -\gamma D$ . Démontrons (16). On a  $(DQ)_{i, j} = i q_{i, j}$  et  $(QD)_{i, j} = j q_{i, j}$ , de sorte que

$$(DQ - QD)_{i, j} = b_i - b_j \text{ quels soient } i, j \in \{-N, \dots, N\}.$$

De même, on a :

$$(|\beta\rangle\langle\eta|)_{i, j} = |\beta\rangle_i \langle\eta|_j = b_i, \quad (|\eta\rangle\langle\beta|)_{i, j} = |\eta\rangle_i \langle\beta|_j = b_j$$

ce qui donne l'égalité recherchée.  $\square$

**Lemme 5.2.** : Supposons  $Q \geq 0$  et  $Q\xi = 0$  où  $\gamma\xi = \xi$  et  $\langle\xi | \eta\rangle = 1$ .

(i) On a  $QD\xi = -\beta$ .

(ii) L'opérateur  $D' := D - |D\xi\rangle\langle\eta|$  est auto-adjoint par rapport au produit scalaire défini par  $Q$ .

*Preuve* : (i) On applique (16) et on obtient, en utilisant  $Q\xi = 0$  et  $\langle\beta|\xi\rangle = 0$  puisque les deux espaces propres de  $\gamma$  sont orthogonaux,

$$-QD\xi = (DQ - QD)\xi = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle - |\eta\rangle\langle\beta|\xi\rangle = \beta.$$

(ii) Le produit intérieur défini par  $Q$  est donné par (14), i.e.

$$\langle f | g \rangle_Q = \langle Qf | g \rangle.$$

Ainsi nous voulons montrer que  $\langle D'f | g \rangle_Q = \langle f | D'g \rangle_Q$  pour tout  $f, g$ . On a, avec  $R = -|D\xi\rangle\langle\eta|$

$$\langle D'f | g \rangle_Q = \langle QD'f | g \rangle = \langle QDf | g \rangle + \langle QRf | g \rangle.$$

Par (i), on a  $QR = -|QD\xi\rangle\langle\eta| = |\beta\rangle\langle\eta|$ . De plus par (16), on a  $QD - DQ = -|\beta\rangle\langle\eta| + |\eta\rangle\langle\beta|$ . Ainsi

$$\langle D'f | g \rangle_Q = \langle DQf | g \rangle + \langle R'f | g \rangle, \quad R' = |\eta\rangle\langle\beta|.$$

De plus, en utilisant le fait que  $Q$  et  $D$  sont auto-adjoints,

$$\langle f | D'g \rangle_Q = \langle Qf | Dg \rangle + \langle Qf | Rg \rangle = \langle DQf | g \rangle + \langle f | QRg \rangle$$

et l'égalité requise découle de :

$$\langle f | QRg \rangle = \langle f | \beta \rangle \langle \eta | g \rangle = \langle R'f | g \rangle.$$

□

**Lemme 5.3.** : Soient  $Q$ ,  $D$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  et  $D'$  comme dans le Lemme 5. Alors

(i) Soit  $s \notin \{-N, \dots, N\}$ . Alors

$$\text{Det}(D' - s) = 0 \iff \sum_{j=-N}^N \frac{\xi_j}{s - j} = 0. \quad (17)$$

(ii) On a  $\text{Det}(D') = 0$ , et pour  $j \in \{-N, \dots, N\}$ ,  $j \neq 0$ ,  $\text{Det}(D' - j) = 0 \iff \xi_j = 0$ .

*Preuve* : (i) On commence par écrire, en fonction de  $R = -\langle D\xi \rangle \langle \eta |$  :

$$D' - s = D + R - s = (D - s) (\text{Id} + (D - s)^{-1}R)$$

Par conséquent

$$\text{Det}(D' - s) = \text{Det}(D - s) \text{Det}(\text{Id} + (D - s)^{-1}R).$$

Pour calculer le second déterminant, on utilise l'identité

$$\text{Det}(\text{Id} + A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\wedge^k A)$$

Appliquée à l'opérateur de rang un  $A = (D - s)^{-1}R$ , les puissances extérieures d'ordre supérieur  $\wedge^k A$  s'annulent pour  $k > 1$ , d'où :

$$\text{Det}(\text{Id} + (D - s)^{-1}R) = 1 - (|(D - s)^{-1}D\xi\rangle\langle\eta|) = -s\langle\eta|(D - s)^{-1}\xi\rangle,$$

en utilisant  $(D - s)^{-1}D\xi = \xi + s(D - s)^{-1}\xi$  et  $\langle\eta|\xi\rangle = 1$ . Par conséquent,

$$\text{Det}(D' - s) = -s \text{Det}(D - s) \langle\eta|(D - s)^{-1}\xi\rangle = -s \prod_{i=-N}^N (i - s) \sum_{j=-N}^N (j - s)^{-1} \xi_j. \quad (18)$$

On conclut que si  $s \neq j$  pour  $j = -N, \dots, N$ , alors  $\text{Det}(D' - s) = 0$  si et seulement si  $\sum_{j=-N}^N (j - s)^{-1} \xi_j = 0$ .

Pour (ii), on a  $D'\xi = 0$ , donc  $\text{Det}(D') = 0$ . Pour  $s = j \neq 0$ , on constate que le seul terme non nul du membre de droite de (18) est  $j \prod_{i \neq j} (i - j) \xi_j$ , qui est nul si et seulement si  $\xi_j = 0$ .  $\square$

**Remarque 5.4.** : L'expression (18) pour  $\text{Det}(D' - s)$  est liée au polynôme d'interpolation de Lagrange ordinaire pour la fonction  $f(\lambda)$  aux points  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier des fonctions définies sur  $[0, L]$ , translatées sur  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  et prolongées de 0 à la droite  $\mathbb{R}$ . La transformée de Fourier est définie par :

$$\mathbb{F}(f)(s) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-isx) dx.$$

La proposition suivante est une reformulation du théorème d'échantillonnage de Shannon ([18]).

**Proposition 5.5.** : Soit  $f \in L^2([0, L])$  et  $f^\sigma(x) := f(x + \frac{L}{2})$  pour  $|x| \leq \frac{L}{2}$ , prolongée par 0 sur  $\mathbb{R}$ .

(i) La restriction de la transformée de Fourier de  $f^\sigma$  à  $\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$  est donnée par la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  de  $f \in L^2(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$  comme suit

$$\mathbb{F}(f^\sigma)\left(\frac{2\pi}{L}n\right) = (-1)^n \widehat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

(ii) La transformée de Fourier de  $f^\sigma$  est donnée par

$$\mathbb{F}(f^\sigma)(s) = \sin(Ls/2) \sum_{\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \frac{1}{Ls/2 - n\pi}. \quad (20)$$

*Preuve* : (i) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On a par définition  $\widehat{f}(n) = \int_0^L f(x) \exp(-2\pi inx/L) dx$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(f^\sigma)\left(\frac{2\pi}{L}n\right) &= \int_{\mathbb{R}} f^\sigma(x) \exp(-2\pi inx/L) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f\left(x + \frac{L}{2}\right) \exp(-2\pi inx/L) dx = \\ &= (-1)^n \int_0^L f(x) \exp(-2\pi inx/L) dx = (-1)^n \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

(ii) On a  $f(x) = \frac{1}{L} \sum_{\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \exp(2\pi inx/L)$ , par conséquent, cela suffit à traiter le cas  $f(x) =$

$\exp(2\pi inx/L)$ . Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(f^\sigma)(s) &= \int_{\mathbb{R}} f^\sigma(x) \exp(-isx) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(2\pi in \left(x + \frac{L}{2}\right) / L\right) \exp(-isx) dx \\
&= (-1)^n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i \left(\frac{2\pi}{L}n - s\right) x\right) dx \\
&= (-1)^n \frac{1}{i\left(\frac{2\pi}{L}n - s\right)} \left(\exp\left(i \left(\frac{2\pi}{L}n - s\right) x\right)\right)_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= 2L \frac{\sin(Ls/2)}{Ls - 2\pi n}
\end{aligned}$$

qui donne (20) en utilisant  $f(x) = \frac{1}{L} \sum_{\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \exp(2\pi inx/L)$ . □

Après ces préliminaires, on obtient

**Théorème 5.6.** : Soit  $Q$  une matrice symétrique positive de la forme (11) avec un noyau unidimensionnel qui est pair par rapport à  $\gamma$ . Soit  $\xi \in \text{Ker } Q$ .

(i) Toutes les racines du polynôme suivant sont réelles :

$$P(s) = \sum_{k \in \{-N, \dots, N\}} \xi_k \times \left( \prod_{j \in \{-N, \dots, N\}, j \neq k} (j - s) \right). \quad (21)$$

(ii) La transformée de Fourier  $\widehat{\xi}(z)$  de la fonction

$$\xi(x) := \sum \xi_k \exp(2\pi ikx), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \xi(x) = 0, \quad \forall x \notin [0, 1]$$

est entière et tous ses zéros appartiennent à la droite réelle.

*Preuve* : (i) Rappelons  $D, \gamma$  du lemme 5 et notons que  $D$  a un noyau unidimensionnel. Si  $e_0 \in \text{Ker } Q$ , on vérifie directement (i) et (ii). On suppose donc que  $e_0 \notin \text{Ker } Q$ . Soit  $\xi \in \text{Ker } Q$ ,  $\xi \neq 0$ . La matrice réelle symétrique positive  $Q$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^{2N+1}$  et son radical (i.e. son noyau) est le sous-espace unidimensionnel engendré par  $\xi$ . On a  $D\xi \neq 0$  car sinon  $e_0 \in \text{Ker } Q$ . On a  $QD\xi \neq 0$  car  $D\xi$  est impair et donc linéairement indépendant de  $\xi$ , tandis que  $\text{Ker } Q$  est unidimensionnel. Par (16), on a

$$0 \neq (DQ - QD)(\xi) = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle - |\eta\rangle\langle\beta|\xi\rangle = |\beta\rangle\langle\eta|\xi\rangle.$$

On peut donc normaliser  $\xi$  de sorte que  $\langle\eta|\xi\rangle = 1$ . Soit alors  $D' := D - |D\xi\rangle\langle\eta|$  comme dans le lemme 5. On a  $D'(\xi) = 0$  et donc  $D'$  induit un opérateur  $D''$  sur l'espace euclidien  $E$  obtenu comme quotient séparé de  $(\mathbb{R}^{2N+1}, Q)$ . D'après le lemme 5, (ii), l'opérateur  $D''$  est auto-adjoint dans  $E$ . Le théorème spectral réel (voir [3], théorème 7.29) s'applique donc et montre que le polynôme

caractéristique de  $D''$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $v_j$  une base orthonormée de  $E$  des vecteurs propres de  $D''$  associés aux valeurs propres  $\lambda_j$ . Soient  $w_j \in \mathbb{R}^{2N+1}$  les relèvements des  $v_j$ . On a  $D''(v_j) = \lambda_j v_j$  et donc  $D'(w_j) = \lambda_j w_j + s_j \xi$  pour certains scalaires réels  $s_j$ . Ainsi, dans la base de  $\mathbb{R}^{2N+1}$  formée par  $\xi$  et les  $w_j$ , la matrice de  $D'$  est triangulaire, avec 0 et  $\lambda_j$  sur la diagonale. On obtient ainsi :

$$\text{Det}(D' - s) = -s \prod (\lambda_j - s).$$

En comparant cette formule avec (18), on constate que le polynôme  $P(s)$  de (21) a tous ses zéros dans  $\mathbb{R}$ .

(ii) La transformée de Fourier de la fonction à support  $[0, 1]$  définie par  $\exp(2\pi i k x)$  est :

$$\int_0^1 \exp(2\pi i k x) \exp(-i s x) dx = \frac{2e^{-\frac{is}{2}} \sin\left(\frac{s}{2}\right)}{s - 2\pi k}.$$

Ainsi, la transformée de Fourier de  $\xi(x)$  est :

$$\widehat{\xi}(z) = 2e^{-\frac{iz}{2}} \sin\left(\frac{z}{2}\right) \left( \sum_{\{-N, \dots, N\}} \frac{\xi_j}{z - 2\pi j} \right).$$

Les zéros  $z \in 2\pi\mathbb{Z}$  de  $\sin\left(\frac{z}{2}\right)$  annulent le pôle en  $2\pi j$  qui apparaît lorsque  $\xi_j \neq 0$  et restent des zéros de  $\widehat{\xi}(z)$  sinon. Les autres zéros sont donnés par les racines de  $P(z/2\pi) = 0$  où  $P(z)$  est défini dans (21). Ainsi, d'après (i), tous ces zéros sont réels.  $\square$

## 5.1 Opérateur général de dimension finie $D$

Considérons, comme précédemment, le cas plus général d'un opérateur linéaire auto-adjoint  $D$  dans un espace de Hilbert de dimension finie, supposé posséder un spectre simple étiqueté par  $\{\lambda_j\}_{j=-N}^N$ , avec les vecteurs propres correspondants  $\{e_j\}$ . Considérons alors la matrice réelle symétrique positive  $Q = (q_{ij})$ ,  $i, j \in \{-N, \dots, N\}$  définie dans (13).

Les lemmes suivants sont analogues aux lemmes 5.1, 5.2 et 5.3, dont les démonstrations suivent *mutatis mutandis*.

**Lemme 5.7.** : Supposons que  $\lambda_{-i} = -\lambda_i$  et  $b_{-i} = -b_i$  pour tout  $i \in \{-N, \dots, N\}$ .

(i) Soit  $\gamma$  tel que  $\gamma(e_i) := e_{-i}$  pour tout  $i \in \{-N, \dots, N\}$ . On a  $\gamma^2 = \text{Id}$  et  $Q\gamma = \gamma Q$ .

(ii) On a  $D\gamma = -\gamma D$  et

$$DQ - QD = |\beta\rangle\langle\eta| - |\eta\rangle\langle\beta|, \quad \beta = \sum b_i e_i, \quad \eta = \sum e_i, \quad (22)$$

de sorte que  $\beta$  soit impair et  $\eta$  pair par rapport à la  $\mathbb{Z}_2$ -gradation donnée par  $\gamma$ .

**Lemme 5.8.** : Soient  $D, Q, \gamma$  comme dans le Lemme 5.7, supposons  $Q \geq 0$  et  $Q\xi = 0$  où  $\gamma\xi = \xi$  et  $\langle\xi | \eta\rangle = 1$

(i) On a  $QD\xi = -\beta$ .

(ii) L'opérateur  $D' := D - |D\xi\rangle\langle\eta|$  est auto-adjoint par rapport au produit scalaire défini par  $Q$ .

**Lemme 5.9.** : Soient  $Q$ ,  $D$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  et  $D'$  définis comme dans les lemmes 5.7 et 5.8, et supposons que  $D$  ait un spectre simple. Alors :

(i) Soit  $s \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_N, \dots, \lambda_N\}$  et  $s \neq 0$ . Alors

$$\text{Det}(D' - s) = 0 \iff \sum_{j=-N}^N \frac{\xi_j}{s - \lambda_j} = 0. \quad (23)$$

(ii) On a  $\text{Det}(D') = 0$ , et si  $\lambda_j \neq 0$ , on a  $\text{Det}(D' - \lambda_j) = 0 \iff \xi_j = 0$ .

Par conséquent, nous avons également l'analogie suivant du théorème 5.6 (i) :

**Proposition 5.10.** : Soit  $D$  un vecteur à spectre simple et soit  $Q$  une matrice réelle symétrique positive de la forme (13) à noyau pair de dimension 1. Soit  $\xi \in \text{Ker } Q$ . Alors toutes les racines du polynôme suivant sont réelles :

$$P(s) = \sum_{k \in \{-N, \dots, N\}} \xi_k \times \left( \prod_{j \in \{-N, \dots, N\}, j \neq k} (\lambda_j - s) \right). \quad (24)$$

On obtient alors le théorème 5.6 (ii) comme corollaire de ce résultat, lorsqu'il est appliqué au cas  $D = D_{S^1}$  tel que  $\lambda_j = j$ .

## 6 Cas de dimension infinie

Dans cette section, nous démontrons le résultat annoncé dans l'Introduction :

**Théorème 6.1.** : Soit  $L > 0$ , et soit  $\mathcal{D}$  une distribution réelle sur l'intervalle  $[0, L]$ . Soit  $Q$  la forme quadratique définie sur les polynômes trigonométriques par (6). Supposons que  $Q$  définisse un opérateur essentiellement auto-adjoint minoré et que le minimum de son spectre soit une valeur propre simple et isolée  $\lambda$ , dont la fonction propre paire est  $\xi^\ddagger$ . Alors, tous les zéros de la fonction  $\widehat{\xi}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , la transformée de Fourier de  $\xi$ , sont situés sur la droite réelle.

*Preuve* : Par hypothèse, les polynômes trigonométriques forment un noyau pour l'opérateur  $A$  défini par :

$$\langle \alpha | A\beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle_Q.$$

On normalise le vecteur propre  $\xi$  par  $\|\xi\| = 1$ . Pour  $\epsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique pair  $\eta_\epsilon$  tel que :

$$\|\eta_\epsilon\| = 1, \quad \|\xi - \eta_\epsilon\| < \epsilon, \quad \langle \eta_\epsilon | \eta_\epsilon \rangle_Q < \lambda + \epsilon. \quad (25)$$

---

‡. c'est-à-dire invariante par la symétrie  $x \mapsto L - x$  de  $[0, L]$ .

Soit  $N$  un entier fini tel que le support de  $\eta_\epsilon$  soit inclus dans  $\{-N, \dots, N\}$ . D'après la proposition 4.1, la matrice de restriction  $Q_N$  de la forme quadratique  $Q$  à l'espace  $E_N$  des polynômes trigonométriques à support  $\{-N, \dots, N\}$  est de la forme (11). Puisque  $Q_N$  est une restriction de  $Q$  à un sous-espace, son minimum est  $\geq \lambda$  et les inégalités précédentes montrent qu'il est compris entre  $\lambda$  et  $\lambda + \epsilon$ . Par hypothèse, le spectre de l'opérateur  $A$  est inclus, à l'exception de la valeur propre simple  $\lambda$ , dans l'intervalle  $[\lambda + \delta, \infty)$  pour un certain  $\delta > 0$ . Ainsi la restriction de  $Q$  au complément orthogonal de  $\xi$  remplit

$$\langle \alpha | \alpha \rangle_Q \geq (\lambda + \delta) \|\alpha\|^2, \quad \forall \alpha \mid \langle \alpha | \xi \rangle = 0.$$

Ceci est notamment vrai dans le sous-espace de codimension un  $F_N$  de  $E_N$  défini par  $\langle \alpha | \xi \rangle = 0$  (notons que  $F_N$  ne peut pas être tous les  $E_N$ , car alors on aurait également  $\xi \perp \eta_\epsilon$ , ce qui contredit (25)). La plus petite valeur propre de  $Q_N$  satisfait  $\lambda \leq \lambda_N \leq \lambda + \epsilon$ . D'après le théorème du min-max, la valeur propre suivante  $\mu_N \geq \lambda_N$  de  $Q_N$  est donnée par :

$$\mu_N = \max_{\substack{\mathcal{M} \subset E_N \\ \text{codim}(\mathcal{M})=1}} \min_{x \in \mathcal{M}, \|x\|=1} Q_N(x)$$

En utilisant  $\mathcal{M} = F_N$ , on obtient  $\mu_N \geq \lambda + \delta$ . Ceci montre que pour  $\epsilon < \delta/2$ , la valeur propre  $\lambda_N$  de  $Q_N$  est simple et unique dans l'intervalle  $[\lambda, \lambda + \delta]$ . Soit alors  $P$  la projection spectrale de  $Q_N$  pour le sous-espace propre associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_N$ . En décomposant

$$\eta_\epsilon = P\eta_\epsilon + (1 - P)\eta_\epsilon = \alpha + \beta \implies Q(\eta_\epsilon) = \lambda_N \|\alpha\|^2 + Q(\beta)$$

où  $Q(\beta) \geq (\lambda + \delta) \|\beta\|^2$ . Ainsi, par (25), on obtient que la combinaison convexe de poids  $\|\alpha\|^2$  et  $\|\beta\|^2$  de  $\lambda$  et de  $Q(\beta)/\|\beta\|^2 \geq (\lambda + \delta)$  est inférieure à  $\lambda + \epsilon$ . Il s'ensuit de cela que  $\|\beta\|^2 = 1 - \|\alpha\|^2 \leq \epsilon/\delta$ . Soit alors  $\xi_N$  le vecteur propre de  $Q_N$  associé à la valeur propre  $\lambda_N$  donnée par  $P\eta_\epsilon$ . On contrôle

$$\|\eta_\epsilon - P\eta_\epsilon\| \leq \sqrt{\epsilon/\delta}, \quad \|\xi - \eta_\epsilon\| < \epsilon \implies \|\xi - \xi_N\| \leq \epsilon + \sqrt{\epsilon/\delta}.$$

Puisque les fonctions paires forment un sous-espace fermé de  $L^2[0, L]$ , et que  $\xi$  est paire, pour  $\epsilon$  suffisamment petit, le vecteur  $\xi_N$  est également pair. Ainsi, d'après le théorème 5, tous les zéros de la transformée de Fourier  $\widehat{\xi}_N$  sont réels. De plus, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , les vecteurs  $\xi_N$  convergent en norme vers  $\xi$ , de sorte que la suite  $\widehat{\xi}_N(z)$  converge vers  $\widehat{\xi}(z)$  uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\mathbb{C}$  (comme dans la preuve du théorème 3). Mais alors le théorème de Hurwitz s'applique, ce qui nous permet de conclure que tous les zéros de  $\widehat{\xi}(z)$  sont réels.  $\square$

## 7 Action spectrale et différences divisées

Comme nous l'avons déjà observé, il existe une relation étroite entre la forme quadratique dans (14) et l'action spectrale  $f(D)$  introduite dans [6]. On va maintenant analyser cette relation plus en détail pour les perturbations de type  $D \mapsto D + R$  avec  $R = -|D\xi\rangle\langle\eta|$  comme dans le lemme 5, en étendant à ce cas les développements de Taylor obtenus dans [13,20,19,15,16].

Tout d'abord, afin d'interpréter l'action spectrale des perturbations bornées (pas nécessairement auto-adjointes ou normales) d'un opérateur auto-adjoint, on exprime  $f(x)$  sous forme de transformée

de Fourier, puis on utilise les développements de Araki [1] – ou séries de Dyson – pour donner un sens à  $e^{i(H_0+V)}$  pour la perturbation bornée  $V$  d'un opérateur auto-adjoint  $H_0$  (plus précisément, il s'agit de [1, Eq. 5.16]).

$$e^{i(H_0+V)} := \text{Exp}_r \left( \int_0^1 ; i e^{isH_0} V e^{-isH_0} ds \right) e^{iH_0} := \sum_{n \geq 0} i^n \int_{\Delta_n} e^{is_0 H_0} V e^{is_1 H_0} \dots V e^{is_n H_0} d^n s. \quad (26)$$

où le  $n$ -simplexe  $\Delta_n$  est paramétré par des  $n$ -uplets  $(s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$  satisfaisant  $\sum_k s_k = 1$ . Dans le cas qui nous intéresse, ces développements sont donnés par des séries de la forme suivante :

$$e^{i\xi(D+tR)} := \sum_{n \geq 0} (it\xi)^n \int_{\Delta_n} e^{is_0 \xi D} R e^{is_1 \xi D} \dots R e^{is_n \xi D} d^n s. \quad (27)$$

Remarquons que puisque  $|\Delta_n| = 1/n!$ , le  $n$ -ième terme de la série est borné en norme par  $t^n |\xi|^n \|R\|^n / n!$ , ce qui assure la convergence en norme du développement. Ceci suggère de définir, pour des fonctions  $f$  appropriées :

$$f(D + tR) := \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(D+tR)} d\xi. \quad (28)$$

Plus précisément, on a

**Lemme 7.1.** : Soit  $D$  un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ ,  $R$  un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$  et soit  $f$  tel que  $\|\widehat{f^{(n)}}\|_1 \leq C^{n+1} n!$  pour tout  $n \geq 0$  et un certain  $C \geq 1$ . Alors, pour  $t$  suffisamment petit, l'expression dans (28) est un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ .

*Preuve* : On estime :

$$\|f(D + tR)\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \|R\|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi) \xi^n| d\xi \leq \frac{C}{1 - tC\|R\|}$$

qui est bornée pour  $t < 1/(C\|R\|)$ . □

Afin de définir l'action spectrale comme la trace de cet opérateur, nous avons besoin d'une classe de fonctions plus restrictive. Plus précisément, comme dans [16], nous définissons :

$$\mathcal{E}^s := \left\{ f \in C^\infty : \text{il existe } C \geq 1 \text{ tel que } \|(\widehat{f u^m})^{(n)}\|_1 \leq C^{m+1} n! \text{ pour tout } m \leq s \text{ et } n \geq 0 \right\},$$

où  $u(x) = x - i$ .

**Lemme 7.2.** : Si  $D$  est  $s$ -sommable, c'est-à-dire si  $(D - i)^{-s}$  est de classe trace pour un certain  $s \geq 0$ , et si  $f \in \mathcal{E}^s$ , alors  $f(D + tR)$  est de classe trace pour  $t$  suffisamment petit.

*Preuve* : La démonstration des estimations requises suit ligne par ligne celle du théorème 6 de [16] après avoir précisé la signification (27) des exponentielles apparaissant dans les intégrales à

opérateurs multiples (c'est-à-dire la définition 2 dans loc. cit.). □

On rappelle la définition des différences divisées. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$  des points distincts de  $\mathbb{R}$ . La différence divisée d'ordre  $n$  est définie par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

Notons également la représentation utile suivante, due à Hermite [14] : pour tout  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \int_{\Delta_n} f^{(n)}(s_0 x_0 + s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) d^n s.$$

Ceci permet également d'étendre la définition de la différence divisée aux points coïncidants.

**Lemme 7.3.** : Soit  $D$  un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$  tel que  $(D - i)^{-s}$  soit de classe trace pour un certain  $s \geq 0$ ,  $R$  un opérateur borné dans  $\mathcal{H}$  et  $f \in \mathcal{E}^s$ . Alors  $t \mapsto f(D + tR)$  est lisse au voisinage de 0 et possède une dérivée  $n$ -ième.

$$\frac{d^n}{dt^n} f(D + tR)|_{t=0} = n! \sum R_{i_1 i_2} \cdots R_{i_n i_1} f'[\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}].$$

en fonction des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $D$ .

*Preuve* : Puisque  $f(D + tR)$  est définie à l'aide de la formule d'expansion de Araki, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} f(D + tR)|_{t=0} &= \int \frac{d^n}{dt^n} (\widehat{f}(\xi) e^{i\xi(D+tR)})|_{t=0} d\xi \\ &= n! \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} R_{i_1 i_2} \cdots R_{i_n i_1} \int (i\xi)^n \exp[i\xi \lambda_{i_1}, \dots, i\xi \lambda_{i_n}, i\xi \lambda_{i_1}] \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= n! \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} R_{i_1 i_2} \cdots R_{i_n i_1} f[\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}, \lambda_{i_1}]. \end{aligned}$$

□

**Remarque 7.4.** : Il serait intéressant d'étendre la définition ci-dessus de l'action spectrale, pour des perturbations non nécessairement auto-adjointes, au cas où l'hypothèse d'auto-adjonction de l'opérateur  $D$  est également relâchée. Ceci a des applications potentielles aux triplets spectraux lorentziens.

Considérons maintenant une fonction  $f$  telle que  $f''(\lambda_j) = a_j$  et  $f'(\lambda_j) = b_j$ , où  $a_j$  et  $b_j$  sont les coefficients de la forme quadratique définie dans 13. On a alors :

$$\frac{d}{dt} f(D + tR)|_{t=0} = \sum R_{jj} b_j; \quad \frac{d^2}{dt^2} f(D + tR)|_{t=0} = \sum R_{ij} R_{ji} a_{ij}.$$

**Proposition 7.5.** : Soit  $\mathcal{H}$  un espace de dimension finie. Dans les notations du lemme 5.1, supposons  $Q = (q_{ij}) \geq 0$  et  $Q\xi = 0$  où  $\gamma\xi = \xi$  et  $\langle \xi | \eta \rangle = 1$ . Soit  $R = -|D\xi\rangle\langle \eta|$  de sorte que  $R_{ij} = -(D\xi)_i$ . Alors nous avons :

$$\frac{d}{dt}f(D + tR)|_{t=0} = \langle D\xi, D\xi \rangle_Q; \quad \frac{d^2}{dt^2}f(D + tR)|_{t=0} = \langle D\xi, D\xi \rangle_Q.$$

*Preuve* : La dérivée seconde se réduit à la dérivée première car  $QD\xi = -\beta$  (cf. Lemme 5.1 (i)). En effet, on obtient :

$$\sum_j R_{ji} f'[\lambda_i, \lambda_j] = - \sum_j f'[\lambda_i, \lambda_j] (D\xi)_j = -(QD\xi)_i = b_i = f'(\lambda_i).$$

Il s'ensuit que

$$\sum R_{ij} R_{ji} f'[\lambda_i, \lambda_j] = \sum_i R_{ii} f'(\lambda_i) = - \sum_i (D\xi)_i f'(\lambda_i) = \sum_i (D\xi)_i \overline{(QD\xi)_i} = \langle D\xi, D\xi \rangle_Q.$$

□

## A Un exemple de matrices de troncature

Dans cette annexe, nous décrivons un exemple où les matrices de troncature admettent des valeurs propres maximales et minimales simples, mais cette propriété n'est plus valable à la limite, où les valeurs propres maximales et minimales sont de multiplicité 2.

On pose  $L = 1$  et on considère la distribution  $\mathcal{D}$  de la forme :

$$\mathcal{D}(x) = \delta_0(x) + 2\pi b \sin(2\pi x). \tag{29}$$

Calculons ensuite  $\psi(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(2\pi x(1-y)) \mathcal{D}(y) dy$  comme

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x) + 2b \int_0^1 \sin(2\pi y) \sin(2\pi x(1-y)) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x) + b \frac{\sin(2\pi x)}{\pi - \pi x^2} = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} \left( 1 + \frac{b}{1-x^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\psi(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , sauf pour  $n = \pm 1$ . De plus, on obtient  $\psi(-1) = b$  et  $\psi(1) = -b$ . La dérivée est

$$\psi'(x) = \frac{2bx \sin(2\pi x)}{\pi(1-x^2)^2} + \frac{2b \cos(2\pi x)}{1-x^2} + 2 \cos(2\pi x).$$

On constate que pour  $n \in \mathbb{Z}$  différent de  $\pm 1$ , on a

$$\psi'(n) = 2 + \frac{2b}{1-n^2}$$

tandis que pour  $n = \pm 1$ , on a  $\psi'(n) = \frac{b}{2} + 2$ .

**Lemme A.1.** : Soit  $L = 1$  et  $\mathcal{D}$  défini par (29),  $Q$  la forme quadratique  $Q$  de (10). Les éléments  $q_{n,m}$  de la matrice  $Q$  sont donnés par  $q_{n,m} = 2\delta_{n,m} + b\mu_{n,m}$ , où la matrice  $\mu$  est indépendante de  $b$  et sont donnés par  $\mu_{n,m} = 0$ ,  $\forall n, m \notin \{-1, 0, 1\}$ ,  $n \neq m$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_{n,m})_{n,m \in \{-1,0,1\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \mu_{n,n} = \frac{2}{1-n^2}, \quad \forall n \notin \{-1, 0, 1\}, \\ \mu_{n,-1} = \mu_{-1,n} = \frac{1}{-1-n}, \quad \forall n \notin \{-1, 0, 1\}, \\ \mu_{n,1} = \mu_{1,n} = \frac{1}{-1+n}, \quad \forall n \notin \{-1, 0, 1\}. \end{array} \right.$$

*Preuve* : Ceci découle de la Proposition 4.1 et de la détermination ci-dessus de  $\psi(n)$  et  $\psi'(n)$ .  $\square$

Les éléments  $\mu_{n,m}$  de la matrice  $\mu$ , pour  $|n| \leq 4$  et  $|m| \leq 4$ , sont les suivants

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Soit  $\xi$  le vecteur de coordonnées  $\xi(n) = \frac{1}{1+n}$  pour  $n \neq -1$  et  $\xi(-1) = 0$ , et  $\eta$  celui de coordonnées  $\eta(n) = \frac{1}{-1+n}$  pour  $n \neq 1$  et  $\eta(1) = 0$ . Soit également  $U_n$  la base orthonormée canonique. On a alors :

$$\xi = \sum_{n \neq -1} \frac{1}{1+n} U_n, \quad \eta = \sum_{n \neq 1} \frac{1}{-1+n} U_n.$$

Les fonctions correspondant à ces vecteurs sont :

$$\xi(x) = -2\pi i \left( x - \frac{1}{2} \right) \exp(-2\pi i x), \quad \eta(x) = -2\pi i \left( x - \frac{1}{2} \right) \exp(2\pi i x).$$

On a :  $\overline{\xi(x)} = -\eta(x)$

$$\sum_{-k}^k \xi(n)\eta(n) = \frac{k^2 - 3k - 2}{2k(k+1)}, \quad \langle \xi | \eta \rangle = \frac{1}{2}.$$

On considère la matrice de rang 4 donnée par

$$R := |\eta\rangle\langle U_1| + |U_1\rangle\langle\eta| - |\xi\rangle\langle U_{-1}| - |U_{-1}\rangle\langle\xi|.$$

Ses éléments matriciels  $R_{n,m}$  vérifient  $R_{n,m} = 0$ ,  $\forall n, m \notin \{-1, 1\}$ , tandis que :

$$R_{n,1} = R_{1,n} = \eta(n), \quad R_{n,-1} = R_{-1,n} = -\xi(n), \quad \forall n \notin \{-1, 1\}.$$

Le noyau de Schwartz correspondant  $r(x, y)$  est donné par :

$$r(x, y) = \eta(x) \exp(-2\pi iy) - \exp(2\pi ix)\xi(y) - \xi(x) \exp(2\pi iy) + \exp(-2\pi ix)\eta(y).$$

**Lemme A.2.** : (i) Soit  $D$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $d_n = \frac{2}{1-n^2}$  pour  $n^2 \neq 1$  et  $d_n = \frac{1}{2}$  pour  $n^2 = 1$ . On a alors  $\mu = D + R$ .

(ii) L'opérateur  $D$  est donné par la convolution de fonctions périodiques de période 1 par la fonction

$$\alpha(x) := -4\pi \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1).$$

*Preuve* : (i) découle du lemme A.1.

(ii) Pour  $n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1$ ,

$$2\pi \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi x) \cos(2\pi nx) dx = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

tandis que la valeur de cette intégrale est  $-\frac{1}{4}$  pour  $n = \pm 1$ . □

Notons que la fonction  $\alpha(x)$  doit être considérée comme une fonction périodique de période 1, ce qui nécessite de réinterpréter le terme  $x - \frac{1}{2}$  comme  $x - E(x) - \frac{1}{2}$ , où  $E(x)$  est la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ . Ceci intervient dans la formule de la convolution, qui est :

$$D(f)(x) = \int_0^1 \alpha(x - y)f(y)dy.$$

On a

$$\sin(2\pi(x - y)) = -\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

pour que

$$\alpha(x - y) = -4\pi \left(x - y - E(x - y) - \frac{1}{2}\right) (-\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y))$$

et le seul terme qui ne se sépare pas comme produit de fonctions de  $x$  par une fonction de  $y$  est celui contenant  $E(x - y)$ , qui vaut 0 si  $y \leq x$  et  $-1$  si  $y > x$ . En réalité, il est plus symétrique

d'ajouter  $\frac{1}{2}$  à  $E(x - y)$ , ce qui correspond à  $\frac{1}{2}\text{Sign}(x - y)$ . Les autres contributions sont données par les 4 termes qui, à un facteur global  $-2\pi$  près, sont :

$$(-i)xe^{-2i\pi(y-x)} + ixe^{2i\pi(y-x)} - iye^{2i\pi(y-x)} + iye^{-2i\pi(y-x)}$$

qui, en tenant compte du facteur  $-2\pi$ , peut se réécrire comme suit :

$$-\eta(x) \exp(-2i\pi y) + \xi(x) \exp(2i\pi y) - \exp(-2i\pi x)\eta(y) + \exp(2i\pi x)\xi(y)$$

On constate ainsi que ces termes annulent la contribution additionnelle  $R$  de rang 4 et on obtient donc la formule simple suivante pour le noyau de Schwartz  $\mu(x, y)$  de l'opérateur  $\mu$ ,

**Proposition A.3.** : (i) L'opérateur  $\mu$  est donné par la formule

$$\mu(f)(x) = 2\pi \int_0^1 \text{Sign}(x - y) \sin(2\pi(x - y))f(y)dy.$$

(ii) En général, le noyau de Schwartz de l'opérateur associé à la distribution  $\mathcal{D}$  est égal à la restriction à  $x, y \in [0, L]$  de  $\mathcal{D}(|x - y|)$ .

*Preuve* : (i) Découle du calcul précédent.

(ii) D'après (7), pour des fonctions régulières  $f, g$  à support dans  $[0, L]$ , on a :

$$Q(f, g) = \int_0^L ((g^* * f)(y) + (g^* * f)(-y)) \mathcal{D}(y)dy = \int_{-L}^L (g^* * f)(y) \mathcal{D}(|y|)dy$$

où il faut être prudent lorsqu'on double le coefficient de  $\delta_0$  dans  $\mathcal{D}(|y|)$ . Cette formule reste inchangée si l'on remplace  $f(x)$  par  $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  et  $g(x)$  par  $g\left(x + \frac{1}{2}\right)$ , décalant ainsi leurs supports sur l'intervalle symétrique  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ . Alors  $Q(f, g) = 0$  lorsque  $f$  et  $g$  ont des parités opposées. On utilise ensuite la formule pour trois fonctions  $f, g, h$ ,  $h$  étant paire.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (g^* * f)(y)h(-y)dy &= \int_{x+y+z=0} g^*(x)f(y)h(z)\omega \\ &= \int_{x=y+z} \overline{g(x)}f(y)h(z)dx dy \\ &= \int \overline{g(x)} \int k(x, y)f(y)dy dx, \end{aligned}$$

$$k(x, y) = h(x - y)$$

où  $\omega$  est la mesure sur le plan  $x + y + z = 0$  donnée par  $|dx \wedge dz| = |dx \wedge dy|$ . □

On peut alors étudier numériquement les zéros des polynômes  $P_n^\pm(s)$  associés par (21) aux vecteurs propres des plus grandes et plus petites valeurs propres de la matrice  $\mu(n)$  de taille  $2n + 1$ , qui est la compression de la matrice  $\mu$ ,

$$\mu(n)_{i,j} := \mu_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{-n, \dots, n\}.$$

Pour  $n = 1$ , cette matrice est simplement

$$\mu(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ses trois valeurs propres sont

$$\left\{ \frac{1}{4} (\sqrt{57} + 3), \frac{3}{2}, \frac{1}{4} (3 - \sqrt{57}) \right\}$$

et les vecteurs propres correspondant à ces valeurs propres sont

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3-\sqrt{57}}{\sqrt{57}-9} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{-\sqrt{57}-3}{\sqrt{57}+9} & 1 \end{pmatrix}$$

Les polynômes  $P_1^\pm(s)$  sont donnés par

$$P_1^+(s) = 3 (\sqrt{57} - 7) s^2 - \sqrt{57} + 3, \quad P_1^-(s) = 3 (\sqrt{57} + 7) s^2 - \sqrt{57} - 3$$

et leurs racines sont réelles et sont des nombres algébriques.

L'étude numérique des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\mu(n)$  indique que les valeurs propres maximale et minimale sont simples pour  $n$  fini, et qu'à la limite, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient le résultat suivant :

**Fait A.4 :** (i) *Les fonctions réalisant le maximum de la matrice  $\mu$  sont :*

$$f^+(x) = \sin(\pi x), \quad f^-(x) = \cos(\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

(ii) *Les fonctions réalisant le minimum de la matrice  $\mu$  sont :*

$$g^+(x) = \sin(3\pi x), \quad g^-(x) = \cos(3\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

On peut alors déduire les propriétés pertinentes des transformées de Fourier comme suit.

**Proposition A.5.** : (i) Les transformées de Fourier  $h^\pm$  des fonctions  $f^\pm \left( x + \frac{1}{2} \right)$  sont données par :

$$h^+(s) = \frac{2\pi \cos\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^2 - s^2}, \quad h^-(s) = \frac{2is \cos\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^2 - s^2}.$$

(ii) Les transformées de Fourier  $k^\pm$  des fonctions  $g^\pm \left( x + \frac{1}{2} \right)$  sont données par :

$$k^+(y) = \frac{6\pi \cos\left(\frac{y}{2}\right)}{9\pi^2 - y^2}, \quad k^-(y) = -\frac{2iy \cos\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2 - 9\pi^2}.$$

(iii) Les fonctions  $h^\pm$  et  $k^\pm$  sont des fonctions entières dont tous les zéros sont réels et sont données par tous les multiples impairs de  $\pi$ , sauf  $\pm\pi$  pour  $h^+$ ,  $\pm 3\pi$  pour  $k^+$  et 0 inclus pour  $h^-$  et  $k^-$ . (iv) Les valeurs propres maximale et minimale de la matrice  $\mu$  sont respectivement  $\frac{8}{3}$  et  $-\frac{8}{5}$ .

## B Vérifications explicites pour $N = 1, 2$

On fournit des démonstrations concrètes du théorème 5 dans les cas les plus simples  $N = 1, 2$ .

### B.1 Cas $N = 1$

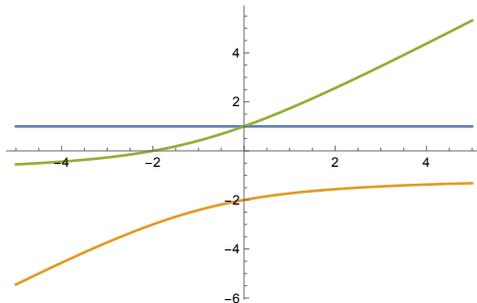
Pour  $N = 1$ , il suffit de traiter la matrice  $M(c)$  suivante pour  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$M(c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & c & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Les trois valeurs propres sont

$$\left\{ 1, \frac{1}{2} \left( -\sqrt{c^2 + 2c + 9} + c - 1 \right), \frac{1}{2} \left( \sqrt{c^2 + 2c + 9} + c - 1 \right) \right\}$$

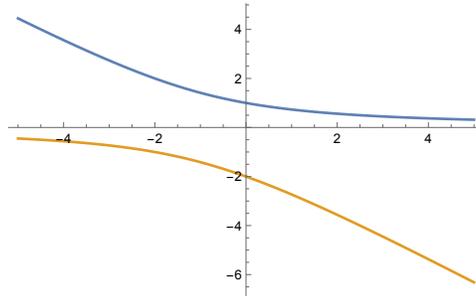
et le graphe montrant la façon dont elles dépendent de  $c$  est le suivant :



Les vecteurs propres correspondant sont

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & X(c) & 1 \\ 1 & Y(c) & 1 \end{pmatrix}, \quad X(c) = -\frac{-\sqrt{c^2 + 2c + 9} + c - 3}{\sqrt{c^2 + 2c + 9} + c + 3}, \quad Y(c) = -\frac{-\sqrt{c^2 + 2c + 9} - c + 3}{\sqrt{c^2 + 2c + 9} - c - 3}$$

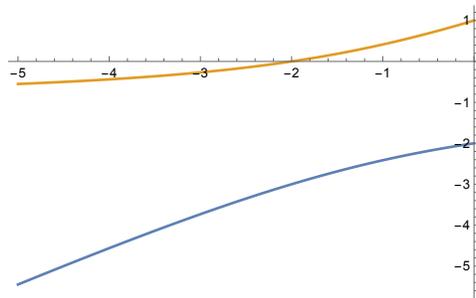
et le graphe montrant la façon dont  $X(c), Y(c)$  dépendent de  $c$  est le suivant :



La transformée de Fourier du vecteur  $(1, x, 1)$  est donnée par la fonction  $s$  égale à  $s^2(-x) - 2s^2 + 4\pi^2x$ , et ses racines sont donc réelles exactement lorsque  $x(x + 2) \geq 0$ . Ceci n'est plus vrai lorsque  $-2 < x < 0$ , et cela se traduit par  $Y(c)$  pour  $c < 0$ . Mais la valeur propre correspondante  $y(c)$  vérifie, pour  $c < 0$  :

$$\frac{1}{2} \left( -\sqrt{c^2 + 2c + 9} + c - 1 \right) = x(c) < y(c) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{c^2 + 2c + 9} + c - 1 \right) < 1$$

comme le montrent les graphiques pour  $c < 0$ , où  $x(c)$  apparaît en bleu et  $y(c)$  reste compris entre  $x(c)$  et 1.



On obtient ainsi :

**Proposition B.1.** : Pour toute distribution  $\mathcal{D}$ , la matrice  $3 \times 3$   $q_{n,m}$ , où  $n, m \in \{-1, 0, 1\}$ , a la propriété que les zéros des transformées de Fourier des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres extrêmes sont réels.

*Preuve* : Notons d'abord qu'il suffit de démontrer le résultat pour la matrice spécifique  $M(c)$  de (30). En effet, de manière générale, la matrice  $3 \times 3$   $R = q_{n,m}$  où  $n, m \in \{-1, 0, 1\}$  possède tous ses

éléments hors diagonale donnés par la proposition 4.1, et ceux-ci ne dépendent que de  $\psi(1) =: a$  puisque  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(-1) = -\psi(1) = -a$ . Ceci montre que :

$$\frac{\psi(n) - \psi(m)}{n - m} = a, \quad \forall n, m \in \{-1, 0, 1\}, |n \neq m.$$

Si  $a = 0$ , les vecteurs propres associés aux valeurs propres extrêmes de  $R$  appartiennent à la base, et leur transformée de Fourier est, d'après (20), un multiple de :

$$\frac{\sin(s/2)}{s/2 - n\pi}, \quad n \in \{-1, 0, 1\}$$

dont les zéros sont tous réels. On peut donc supposer que  $a = -1$ . Les valeurs diagonales de  $R$  sont une fonction paire de  $n \in \{-1, 0, 1\}$  et, en ajoutant un multiple scalaire de la matrice identité, on peut supposer qu'elles sont de la forme  $\{0, c, 0\}$  pour un certain  $c \in \mathbb{R}$ . Démontrons maintenant le résultat pour la matrice particulière  $M(c)$  de (30). La valeur de  $X(c)$  est toujours positive et donc la transformée de Fourier du vecteur  $(1, X(c), 1)$  a toutes ses racines réelles pour toute valeur de  $c$ . La valeur de  $Y(c)$  appartient à l'intervalle interdit  $(-2, 0)$  si et seulement si  $c < 0$ , mais dans ce cas, la valeur propre correspondante  $y(c)$  n'est pas extrémale car elle est strictement comprise entre les deux autres  $x(c)$  et 1.  $\square$

## B.2 Démonstration de convexité de la proposition B.1

On considère le cône positif  $\mathbf{C}_+$  dans l'espace vectoriel  $\mathbf{C}$  des matrices de la forme :

$$\mu(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & b & c \\ c & c & a \end{pmatrix}.$$

On réécrit d'abord cette matrice en fonction des deux projections orthogonales.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et la matrice identité  $1_3$ . On obtient :

$$(b - a)P + 3cQ + (a - c)1_3 = \mu(a, b, c)$$

Les images des projections  $P$  et  $Q$  engendrent le sous-espace bidimensionnel  $S$ , orthogonal au vecteur  $v = (1, 0, -1)$  appartenant au noyau de  $P$  et  $Q$ .

L'angle formé par les deux projections  $P$  et  $Q$  est déterminé par son sinus carré :

$$(P - Q)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}E, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

où  $E$  désigne la projection orthogonale sur  $E^\S$ . Par construction,  $E$  commute avec  $\mu(a, b, c)$ . On considère la base orthonormée de  $E$  donnée par les vecteurs  $v_1 = (0, 1, 0)$  et  $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Dans cette base, les projections  $P$  et  $Q$  sont données par les matrices  $\mu(a, b, c)$ .

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Toute matrice symétrique réelle  $2 \times 2$  peut s'écrire comme

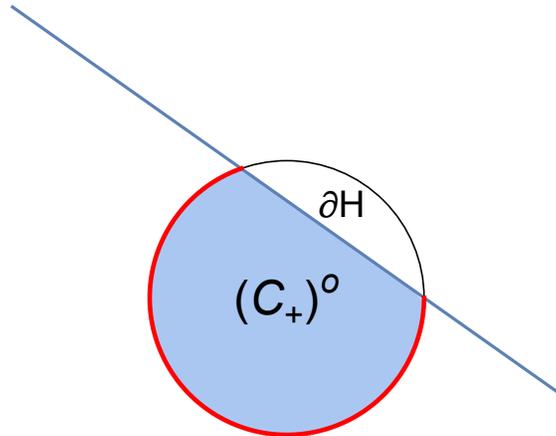
$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (2x + \sqrt{2}y - 2z) p + \frac{3y}{\sqrt{2}} q + (z - \sqrt{2}y) 1_2.$$

**Lemme B.2.** : (i) L'application  $\rho : \mathbf{C} \rightarrow \text{End}(E)$  définie par  $\rho(T) := ETE$  est un isomorphisme entre  $\mathbf{C}$  et l'espace vectoriel  $S(E)$  des matrices réelles auto-adjointes de  $E$ .

(ii) L'image  $\rho(\mathbf{C}_+)$  est l'intersection du cône  $S(E)_+$  des éléments positifs de  $S(E)$  avec le demi-espace  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \mid z \geq \sqrt{2}y \right\}.$$

(iii) Les rayons extrêmes de  $\mathbf{C}_+$  sont transformés par l'isomorphisme  $\rho$  en rayons extrêmes de  $S(E)_+$  inclus dans  $\mathbf{H}$ .



**Proposition B.3.** : Les éléments  $T = \mu(a, b, c) \in \mathbf{C}_+$  ayant un noyau non nul sont de trois sortes :

§. Note de la traductrice : cette phrase est étonnante.

1. Si  $a > 0$ , alors  $T$  appartient à un rayon extrême de  $\mathbf{C}_+$ , et sa restriction à  $E$  est un multiple positif d'une projection de rang un dont le noyau coïncide avec celui de  $T$ .
2. Si  $a = 0$  et  $T$  n'appartient pas à un rayon extrême de  $\mathbf{C}_+$ , le noyau de  $T$  est de dimension 1, égal à  $\mathbb{R}v$ ,  $v = (1, 0, -1)$ .
3. Si  $a = 0$  et  $T$  appartient à un rayon extrême de  $\mathbf{C}_+$ , le noyau de  $T$  est de dimension 2.

À partir de cette proposition, on obtient une autre démonstration de la proposition B.1.

### B.3 Cas $N = 2$

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbf{C}$  des matrices symétriques réelles de la forme

$$\mu(a, b, y, z, t) = \begin{pmatrix} t+z & b-a & \frac{b}{2} & \frac{a+b}{3} & \frac{b}{2} \\ b-a & t+y & a & a & \frac{a+b}{3} \\ \frac{b}{2} & a & t & a & \frac{b}{2} \\ \frac{a+b}{3} & a & a & t+y & b-a \\ \frac{b}{2} & \frac{a+b}{3} & \frac{b}{2} & b-a & t+z \end{pmatrix}$$

La décomposition par blocs utilisant le sous-espace  $E$  pour  $N = 1$  fonctionne en général et correspond à la restriction aux vecteurs pairs et impairs, découlant de la commutativité de  $\mu(a, b, y, z, t)$  avec la symétrie.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \text{Id}.$$

On considère la base orthonormée des vecteurs pairs,  $E := \{\xi \mid J\xi = \xi\}$ , définie par :

$$e_1 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On obtient ainsi la matrice suivante pour la restriction de  $\mu(a, b, y, z, t)$  à  $E$  :

$$\sigma(a, b, y, z, t) = \begin{pmatrix} t & \sqrt{2}a & \frac{b}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}a & a+y+t & -\frac{2}{3}(a-2b) \\ \frac{b}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}(a-2b) & \frac{b}{2} + z + t \end{pmatrix}.$$

Pour les vecteurs impairs, on considère la base orthonormée donnée par :

$$n_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad n_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

et on obtient la matrice suivante pour la restriction de  $\mu(a, b, y, z, t)$

$$\alpha(a, b, y, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2z - b) + t & -\frac{2}{3}(2a - b) \\ -\frac{2}{3}(2a - b) & -a + t + y \end{pmatrix}$$

Étudions maintenant les matrices positives  $\mu(a, b, y, z, t)$  dont le noyau contient le vecteur  $\xi = ue_1 + ve_2 + we_3 \in E$ . Cette condition spécifie un sous-espace bidimensionnel  $K(u, v, w)$  de  $\mathbf{C}$  de la forme :

$$K = \left\{ \eta = (a, b, y, z, t) \mid y \rightarrow \frac{bw(3\sqrt{2}v - 8u)}{6uv} - \frac{a(3\sqrt{2}u^2 + 3uv - 2uw - 3\sqrt{2}v^2)}{3uv}, \right. \\ \left. z \rightarrow \frac{av(2u + 3\sqrt{2}w)}{3uw} - \frac{b(3\sqrt{2}u^2 + 8uv + 3uw - 3\sqrt{2}w^2)}{6uw}, t \rightarrow -\frac{\sqrt{2}av}{u} - \frac{bw}{\sqrt{2}u} \right\}$$

et il faut déterminer si ce sous-espace contient un élément positif de  $\mathbf{C}$ . Une matrice hermitienne  $2 \times 2$  est positive si et seulement si ses deux valeurs propres réelles sont positives, ce qui équivaut à la positivité de sa trace et de son déterminant. On applique ce résultat à la matrice  $\alpha(\eta)$  et à la restriction de  $\sigma(\eta)$  à l'orthogonal du vecteur  $\xi$ . On obtient ainsi les 4 conditions de positivité suivantes :

1. Trace de  $\alpha \geq 0$

$$-\frac{3\sqrt{2}au + 6av - 2aw + 4bw}{3v} - \frac{-4av + 3\sqrt{2}bu + 8bv + 6bw}{6w} \geq 0.$$

2. Det de  $\alpha \geq 0$ .

$$\frac{-2a^2v(\sqrt{2}u + 2(v+w)) + ab(3u^2 + \sqrt{2}u(7v+2w) + 8v^2 + 6vw - 2w^2) + 2b^2w(\sqrt{2}u + 2(v+w))}{3vw} \geq 0.$$

3. Trace de  $\sigma \geq 0$

$$\frac{2a(-3u^2w + \sqrt{2}u(v^2 + w^2) - 3v^2w) - b(3u^2v + 4\sqrt{2}u(v^2 + w^2) + 3vw^2)}{3\sqrt{2}uvw} \geq 0$$

4. Det de  $\sigma \geq 0$ .

$$-\frac{(u^2 + v^2 + w^2)(2\sqrt{2}a^2v + ab(\sqrt{2}(w-4v) - 3u) - 2\sqrt{2}b^2w)}{3uvw} \geq 0.$$

D'autre part, le polynôme associé à  $\xi = ue_1 + ve_2 + we_3 \in E$  est :

$$P(s) = s^4u + \sqrt{2}s^4v + \sqrt{2}s^4w - 20\pi^2s^2u - 16\sqrt{2}\pi^2s^2v - 4\sqrt{2}\pi^2s^2w + 64\pi^4u$$

qui ne dépend que de  $s^2$  et qui a des racines réelles lorsque le polynôme de degré 2 :

$$ux^2 - 20\pi^2ux + 64\pi^4u + \sqrt{2}vx^2 - 16\sqrt{2}\pi^2vx + \sqrt{2}wx^2 - 4\sqrt{2}\pi^2wx$$

a des racines positives, c'est-à-dire que la somme et le produit des racines sont positifs, ce qui donne les deux conditions suivantes : <sup>¶</sup>

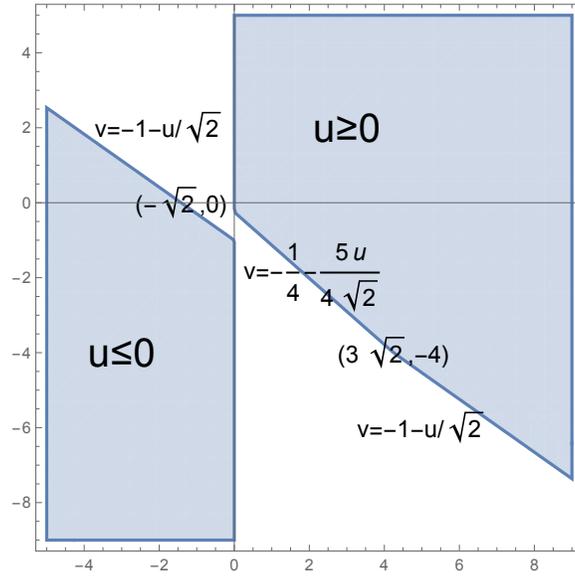
$$\frac{5u + \sqrt{2}(4v + w)}{u} > 0, \quad \frac{u + \sqrt{2}v + \sqrt{2}w}{u} > 0. \quad (31)$$

---

<sup>¶</sup>. On utilise le polynôme réciproque.

En fait, on peut supposer que  $w \neq 0$ , car sinon on se réduit au cas  $n = 1$ . Ainsi, on prend  $w = 1$ , et (31) se réduit aux cas suivants :

$$\left(u < 0 \wedge v < \frac{-u - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \vee \left(0 < u < 3\sqrt{2} \wedge v > \frac{-5u - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right) \vee \left(u \geq 3\sqrt{2} \wedge v > \frac{-u - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right). \quad (32)$$



Le graphique ci-dessus illustre la région du plan  $(u, v)$  proche de l'origine qui garantit que les zéros du polynôme associé  $P$  sont réels.

Réduisons maintenant les quatre conditions de positivité ci-dessus et comparons-les à (32).

Cas  $u \leq -\sqrt{2}$ . Dans ce cas, la réduction des quatre conditions de positivité ci-dessus donne  $\parallel$  :

$$\left(v < 0 \vee 0 < v < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}(-u) - 2\right)\right) \parallel u = -\sqrt{2} \wedge v < 0$$

ce qui implique (32).

Cas  $-\sqrt{2} < u < 0$ . Dans ce cas, la réduction des 4 conditions de positivité ci-dessus donne :

$$-\sqrt{2} < u < 0 \wedge v < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}(-u) - 2\right)$$

ce qui implique (32).

---

$\parallel$ . Note de la traductrice : dans cette ligne, que signifie la double barre verticale ?

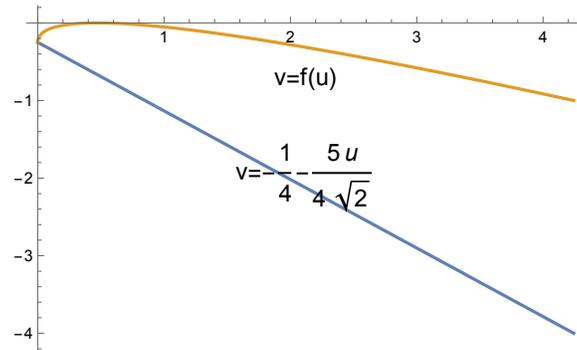
Cas  $0 < u < 3\sqrt{2}$ . Dans ce cas, la réduction des 4 conditions de positivité ci-dessus donne :

$$\left(0 < u < \frac{\sqrt{2}}{3} \wedge \left(\frac{1}{8}(-3\sqrt{2}u - 2) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{u}}{2\sqrt[4]{2}} < v < 0 \vee v > 0\right)\right) \vee \left(u = \frac{\sqrt{2}}{3} \wedge v > 0\right) \\ \vee \left(\frac{\sqrt{2}}{3} < u \leq 3\sqrt{2} \wedge \left(\frac{1}{8}(-3\sqrt{2}u - 2) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{u}}{2\sqrt[4]{2}} < v < 0 \vee v > 0\right)\right)$$

et les solutions forment la partie supérieure du graphe de la fonction :

$$f(u) = \frac{1}{8}(-3\sqrt{2}u - 2) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{u}}{2\sqrt[4]{2}}.$$

Ainsi, pour comparer avec (32), il faut vérifier que le graphe de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 3\sqrt{2}]$  est situé au-dessus du graphe de la fonction  $v = -\frac{5u}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$ . Ceci se voit sur le graphe ci-dessous.



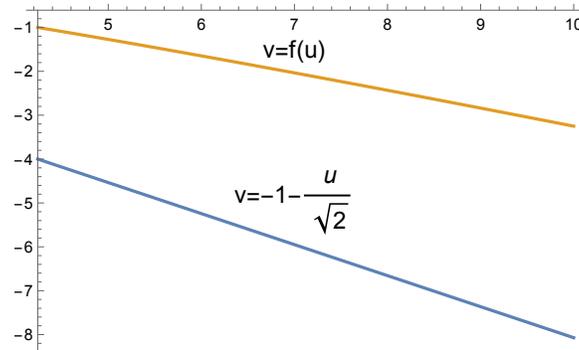
Cas  $u > 3\sqrt{2}$ . Dans ce cas, la réduction des quatre conditions de positivité ci-dessus donne :

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}(-u) - 2) < v < \frac{1}{8}(-3\sqrt{2}u - 2) - \frac{\sqrt{3}\sqrt{u}}{2\sqrt[4]{2}} \vee \frac{1}{8}(-3\sqrt{2}u - 2) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{u}}{2\sqrt[4]{2}} < v < 0 \vee v > 0\right).$$

Dans la première partie, la condition  $-1 - u/\sqrt{2} < v$  implique (32). La seconde condition signifie que l'on se trouve au-dessus du graphe de la fonction  $f(u)$ . Il nous faut donc montrer que pour  $u > 3\sqrt{2}$ , le graphe de  $f$  est situé au-dessus de celui de  $-1 - u/\sqrt{2}$ . Ceci découle de l'inégalité entre les pentes :

$$-3\sqrt{2}/8 > -1/\sqrt{2}$$

et de ce qui suit :



On peut ainsi conclure que si un vecteur pair  $\xi = ue_1 + ve_2 + we_3 \in E$  appartient au noyau d'une matrice positive  $\mu(a, b, y, z, t)$ , alors les zéros du polynôme associé sont réels. Cependant, il convient d'examiner la possibilité qu'un vecteur impair non trivial appartienne au noyau d'une matrice positive  $\mu(a, b, y, z, t)$ .

Considérons maintenant le cas où un vecteur impair  $\eta = un_1 + vn_2$  est dans le noyau d'une matrice positive  $\mu(a, b, y, z, t)$ . Dans ce cas, la restriction à la partie impaire sera un multiple d'une projection unidimensionnelle  $P_1$  et nous devons donc d'abord résoudre l'équation :

$$\alpha(a, b, y, z, t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta) & \sin(\beta) \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cos(\beta) & \sin^2(\beta) \end{pmatrix}$$

La solution est donnée par :

$$\left\{ b \rightarrow 2a + \frac{3}{2} \sin(\beta) \cos(\beta), z \rightarrow \frac{1}{4} (-4 \sin^2(\beta) + 4 \cos^2(\beta) + 3 \sin(\beta) \cos(\beta)) + y, t \rightarrow a + \sin^2(\beta) - y \right\}$$

On considère ensuite la restriction de la matrice solution à sa partie paire.

$$\begin{pmatrix} a + \sin^2(\beta) - y & \sqrt{2}a & \frac{2a + \frac{3}{4} \sin(2\beta)}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}a & 2a + \sin^2(\beta) & 2a + \sin(2\beta) \\ \frac{2a + \frac{3}{4} \sin(2\beta)}{\sqrt{2}} & 2a + \sin(2\beta) & 2a + \frac{3}{4} \sin(2\beta) + \cos^2(\beta) \end{pmatrix}$$

et on calcule son polynôme caractéristique. On applique ensuite la règle suivante :

**Fait B.4.** : Soit  $P(x) = x^n + \sum a_j x^{n-j}$  un polynôme unitaire dont toutes les racines sont réelles. Alors toutes ses racines sont  $\geq 0$  si et seulement si  $(-1)^j a_j \geq 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

On obtient ainsi les 3 doublons de "conditions de positivité" suivants :

1.  $-\mathbf{a}_3 \geq \mathbf{0}$ ,

$$\frac{1}{8} (4a \sin(\beta) + \cos(\beta) (3 \sin^2(\beta) - 2a)) (4 \sin^3(\beta) - 4y \sin(\beta) + \cos(\beta) (8y - 11 \sin^2(\beta))) \geq 0,$$

2.  $\mathbf{a}_2 \geq \mathbf{0}$ ,

$$-\frac{13}{4} a \sin(2\beta) - \left(2a + \frac{1}{2}\right) \cos(2\beta) - 4ay + 5a + \frac{3}{4} \sin(2\beta) - \frac{3}{8} \sin(4\beta) + \frac{33}{64} \cos(4\beta) - \frac{3}{4} y \sin(2\beta) - y - \frac{1}{64} \geq 0,$$

3.  $-\mathbf{a}_1 \geq \mathbf{0}$ ,

$$5a + 2 \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) + \frac{3}{2} \sin(\beta) \cos(\beta) - y \geq 0.$$

La solution de l'existence de  $(a, y)$  satisfaisant ces inégalités pour une valeur donnée de  $\beta$  est donnée par les trois cas suivants. Dans chacun d'eux, nous représentons graphiquement la valeur de  $-\cot(\beta)$  qui donne la composante  $v$  du vecteur  $n_1 + vn_2$  dans le noyau de la matrice positive  $\mu(a, b, y, z, t)$ . On

constate que toutes les valeurs de  $v$  apparaissent, sauf celles de l'intervalle  $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ . Le polynôme associé au vecteur  $un_1 + vn_2$  est :

$$Q(s) = 2\sqrt{2}(-2\pi s^2 u - \pi s^2 v + 8\pi^3 u + 16\pi^3 v)$$

et ses racines sont réelles si et seulement si :

$$\frac{8\pi^2(u + 2v)}{2u + v} \geq 0$$

Ce qui, pour  $u = 1$ , est réalisé si et seulement si  $v \notin \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ , comme le montre le graphique de la fonction  $\frac{2v + 1}{v + 2}$ .

Enfin, l'étude détaillée des valeurs admissibles de  $\beta$  est présentée ci-dessous.

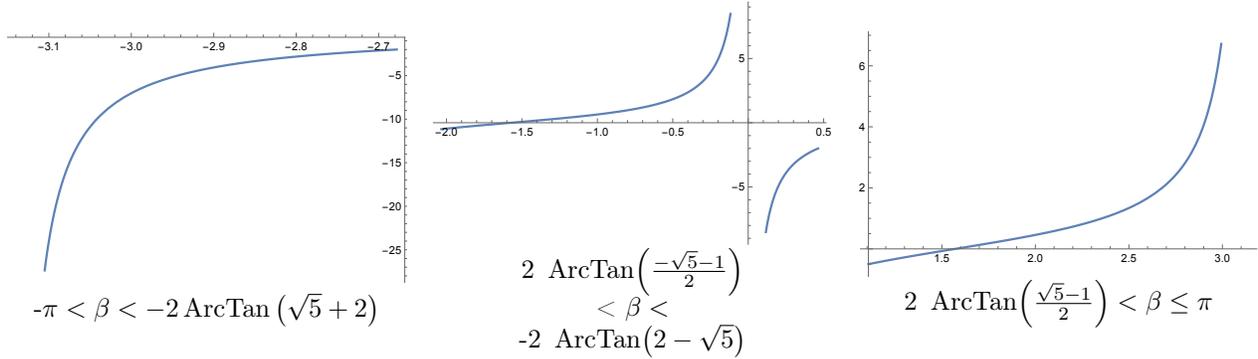


FIGURE 3 : Trois conditions sur  $\beta$  illustrées par les graphiques correspondants.

## Références

- [1] H. Araki. Expansional in banach algebras. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 4*, Volume 6 (1973) 67–84.
- [2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald - *Introduction to Commutative Algebra* Addison-Wesley (1969).
- [3] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Fourth edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2024.
- [4] M. Bakonyi, H. Woerdeman, *Matrix Completions, Moments, and Sums of Hermitian Squares*. Princeton University Press, Princeton (2011).
- [5] C. Carathéodory und L. Fejér, *über den Zusammenhang der Extreme von Harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz*. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 32 (1911)218-239.
- [6] A. H. Chamseddine and A. Connes. Universal formula for noncommutative geometry actions : Unifications of gravity and the Standard Model. *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 4868–4871.
- [7] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*. *Selecta Math. (N.S.)* 27 (2021), no. 4, Paper No. 77.

- [8] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and  $\zeta$ -cycles*. Enseign. Math. 69 (2023), no. 1-2, 93-148.
- [9] A. Connes, C. Consani and H. Moscovici, Zeta zeros and prolate wave operators : semilocal adelic operators, Ann. Funct. Anal. 15 (2024), no. 4, Paper No. 87.
- [10] A. Connes and W.D. van Suijlekom, *Spectral truncations in noncommutative geometry and operator systems*. Comm. Math. Phys. 383 (2021), no. 3, 2021-2067.
- [11] W. F. Donoghue, Jr. *Monotone matrix functions and analytic continuation*. Springer-Verlag, New York, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 207.
- [12] E. Hallouin, M. Perret, *A unified viewpoint for upper bounds for the number of points of curves over finite fields via Euclidean geometry and semi-definite symmetric Toeplitz matrices*. Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), no. 8, 5409–5451.
- [13] F. Hansen. Trace functions as Laplace transforms. *J. Math. Phys.* 47 (2006) 043504, 11.
- [14] C. Hermite. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. *J. Reine Angew. Math.* 84 (1878) 70–79.
- [15] T. D. H. van Nuland and A. Skripka. Spectral shift for relative Schatten class perturbations. *J. Spectr. Theory* 12 (2022) 1347–1382.
- [16] T. D. H. van Nuland and W. D. van Suijlekom. Cyclic cocycles in the spectral action. *J. Noncommut. Geom.* (online 22 December 2021), (arXiv :2104.09899).
- [17] K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*. Grad. Texts in Math. 265, Springer, Dordrecht, 2012.
- [18] C. E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. IRE 37, (1949), 10-21.
- [19] A. Skripka. Asymptotic expansions for trace functionals. *J. Funct. Anal.* 266 (2014) 2845–2866.
- [20] W. D. van Suijlekom. Perturbations and operator trace functions. *J. Funct. Anal.* 260 (2011) 2483–2496.