

Grandes valeurs propres de l'opérateur de Connes-Moscovici

Kouichi Taira, Max Willems, Michał Wrochna

29 septembre 2026

Résumé

Nous démontrons la loi de Weyl logarithmique prédite par Connes et Moscovici pour les grandes valeurs propres positives de l'extension auto-adjointe distinguée de l'opérateur $P = -\partial_x(x^2 - 1)\partial_x - 4\pi^2 x^2$ sur la droite réelle. Plus précisément, nous utilisons la méthode WKB et montrons une règle de quantification de Bohr-Sommerfeld caractérisant les valeurs propres suffisamment grandes. Une difficulté particulière réside dans le fait que les sous-variétés lagrangiennes dépendantes de h associées sont non compactes, ce qui nécessite une renormalisation de l'intégrale d'action. De plus, pour traiter la dégénérescence des coefficients en $x = \pm 1$, nous utilisons un argument d'appariement de quasimodes basé sur des estimations radiales et la régularité lagrangienne.

1 Introduction

1.1 Introduction et résultat principal

Les lois de Weyl relient le terme principal de la fonction asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres d'un opérateur différentiel au volume d'une région appropriée de l'espace des phases. Lorsque les coefficients d'ordre le plus élevé dégénèrent, le volume peut être infini, ou la contribution principale peut se concentrer près d'un ensemble singulier, auquel cas la fonction asymptotique résultante peut faire intervenir des puissances non classiques ou des facteurs logarithmiques. Les opérateurs elliptiques et hypoelliptiques dégénérés, les métriques singulières et les régimes non classiques associés ont été étudiés dans de nombreux contextes, voir § 1.3.2. Cependant, une théorie globale n'est pas disponible actuellement.

Dans cet article, nous étudions l'expression différentielle

$$P = -\partial_x(x^2 - 1)\partial_x - 4\pi^2 x^2 \tag{1}$$

sur la *droite* réelle tout entière. C'est un modèle particulièrement simple dans lequel le coefficient principal a deux zéros simples et change de signe. Du point de vue de la théorie de Sturm-Liouville, la droite réelle est naturellement divisée en trois intervalles $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ et $(1, \infty)$. Près de

KT : Faculté de mathématiques, Université de Kyushu, Fukuoka, Japon ; MW : Institut de mathématiques, Université d'Utrecht, Utrecht, Pays-Bas ; MiW : Institut de mathématiques, Université d'Utrecht, Utrecht, Pays-Bas et Département de mathématiques et science des données, Université Vrije de Bruxelles, Belgique.
Traduction de l'article <https://arxiv.org/pdf/2609.32639>.

$x = \pm 1$, l'équation de Sturm-Liouville associée admet une solution bornée et une solution logarithmique, de sorte que ces extrémités sont de type limite-cercle. À l'infini, les deux solutions indépendantes ont pour forme asymptotique dominante $|x|^{-1}e^{\pm 2\pi i x}$ et sont toutes deux de carré intégrable. Ainsi, spécifier une réalisation auto-adjointe de P dans $L^2(\mathbb{R})$ nécessite des conditions aux limites à la fois en $|x| = 1$ et en $|x| = \infty$.

L'opérateur $-P$ restreint à l'intervalle médian $(-1, 1)$ est l'opérateur *prolate sphéroïdal* bien étudié et possède une théorie spectrale assez simple. À savoir, la condition aux limites

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (1 - x^2) \partial_x u(x) = 0 \quad (2)$$

élimine le terme logarithmique et définit un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte et à valeurs propres croissant quadratiquement. Les fonctions propres sont les fonctions d'onde prolate sphéroïdales, qui apparaissent fréquemment dans les applications car elles diagonalisent la transformée de Fourier tronquée [37, 32].

Comme l'ont observé Connes et Moscovici [12], considérer P sur toute la droite réelle donne lieu à de nouveaux phénomènes spectraux. Bien qu'il existe de nombreuses extensions auto-adjointes, il en existe une distinguée, notée ici P_{sa} , qui jouit de propriétés de commutation particulières avec la transformée de Fourier tronquée. Elle peut être définie en imposant la condition (2) en $x = \pm 1$ et en sélectionnant une fonction asymptotique de type sinus (resp. cosinus) pour la partie paire (resp. impaire) des fonctions du domaine maximal (voir § 2.4). L'opérateur auto-adjoint P_{sa} est démontré dans [12] avoir un spectre discret.

Un rôle particulier dans l'analyse est joué par la fonction

$$I(a) = \int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{x^2 + a - 1}{x^2 - 1}} - 1 \right) dx, \quad a > 0. \quad (3)$$

Cette fonction apparaît comme l'action renormalisée associée à une composante de l'ensemble de zéros $\{p_h = 0\}$ analysé en § 2.1. Notre résultat principal est le théorème suivant, qui caractérise toutes les valeurs propres suffisamment grandes de P_{sa} par une règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.

Théorème 1.1. *Il existe $E_* > 0$ et $R \in C^\infty([E_*, \infty))$ tels que*

$$R(E) = -\frac{1}{16\pi} E^{-\frac{1}{2}} \log E + O(E^{-\frac{1}{2}}), \quad R'(E) = O(E^{-\frac{3}{2}} \log E)$$

lorsque $E \rightarrow \infty$, et ce qui suit est vrai. Le spectre positif de P_{sa} au-dessus de E_* est constitué de valeurs propres simples E_n , $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $n \gg 1$, satisfaisant

$$2I\left(1 + \frac{E_n}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{4} + R(E_n) = n + O(E_n^{-\infty}). \quad (4)$$

Comme corollaire, nous obtenons la loi de Weyl logarithmique suivante pour le spectre positif de P_{sa} ; voir § 5.3 pour l'argument précis.

Corollaire 1.2. Soit $N_+(E)$ le nombre de valeurs propres positives de P_{sa} dans $(0, E]$, comptées avec multiplicité. Alors

$$N_+(E) = 4 \frac{\sqrt{E}}{2\pi} \left(\log \frac{\sqrt{E}}{2\pi} - 1 + 2 \log 2 \right) + O(1), \quad E \rightarrow \infty. \quad (5)$$

La loi de Weyl non classique (5) a été conjecturée par Connes et Moscovici, qui l'ont motivée dans [12, § 5] par un argument heuristique de volume dans l'espace des phases. Nous remarquons que le théorème 1.1 donne des informations plus précises que la loi de Weyl elle-même. Pour démontrer ces résultats, on ne peut pas utiliser les résultats classiques de la théorie de Sturm-Liouville tels que [21, (1.4)], [31, (1.4)], [1, Thm. 1], car les hypothèses ne sont pas satisfaites par l'opérateur de Schrödinger réduit correspondant aux extrémités pertinentes.

Remarque 1.3. Le terme $\frac{1}{4}$ dans la condition de Bohr-Sommerfeld (4) provient de l'indice de Maslov (Morse) dans le calcul de la phase stationnaire en (32). Ni ce terme ni le reste $R(E)$ ne contribuent à la fonction asymptotique de Weyl dominante.

Remarque 1.4. La valeur $4\pi^2$ est distinguée par les propriétés de commutation avec la transformée de Fourier, voir [12], mais elle n'est pas essentielle pour nos arguments. Si $4\pi^2 x^2$ est remplacé par μx^2 , $\mu > 0$, et les conditions à l'infini sont modifiées en remplaçant 2π par $\sqrt{\mu}$, la même démonstration s'applique. La règle de quantification devient

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\pi} \left[I \left(1 + \frac{E_n}{\mu} \right) - 1 \right] + \frac{1}{4} + R_\mu(E_n) = n + O(E_n^{-\infty}),$$

où $R_\mu(E) = -\frac{1}{16\pi} E^{-1/2} \log E + O(E^{-1/2})$ (avec un reste $O(E^{-1/2})$ dépendant de μ). Par conséquent, une répétition des arguments de § 5.3 donne la loi de Weyl plus générale

$$N_{+,\mu}(E) = \frac{2\sqrt{E}}{\pi} \left(\log \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\mu}} - 1 + 2 \log 2 \right) + O(1).$$

Remarque 1.5. Le reste $O(1)$ dans la loi de Weyl (5) ne peut pas être remplacé par $c + o(1)$ pour une constante c . En effet, supposons que $N_+(E) = F(E) + c + o(1)$, où

$$F(E) = 4 \frac{\sqrt{E}}{2\pi} \left(\log \left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi} \right) - 1 + 2 \log 2 \right).$$

Soit $E \gg 1$ une valeur propre de P_{sa} . Comme le spectre est discret et les valeurs propres simples, on peut choisir $0 < \varepsilon_E \leq 1$ tel que E soit la seule valeur propre dans $(E - \varepsilon_E, E + \varepsilon_E)$. Ainsi $N_+(E + \varepsilon_E) - N_+(E - \varepsilon_E) = 1$. D'autre part, la fonction asymptotique supposée et le théorème de la moyenne donnent

$$N_+(E + \varepsilon_E) - N_+(E - \varepsilon_E) = F(E + \varepsilon_E) - F(E - \varepsilon_E) + o(1) = O \left(\varepsilon_E \frac{\log E}{\sqrt{E}} \right) + o(1) = o(1),$$

lorsque $E \rightarrow +\infty$, ce qui est une contradiction.

1.2 Structure de la démonstration

Notre approche a l'avantage de pouvoir traiter directement le problème original et clarifie comment les techniques d'analyse microlocale peuvent être appliquées dans ce cadre singulier.

Notre motivation initiale provient en fait de la relation entre l'opérateur de Connes-Moscovici et la méthode de Vasy [38, 43].

Notre démonstration est suffisamment robuste pour être étendue à des opérateurs plus généraux et d'ordre supérieur (à l'exception d'un argument de Wronskien, qui peut être remplacé par une technique plus robuste, bien que compliquée) et à différentes conditions aux limites.

Nous introduisons d'abord un petit paramètre semiclassique $h > 0$ en posant $E = h^{-2}$ et définissons $P(h) := h^2(P - h^{-2})$. L'ensemble de zéros $\{p_h = 0\}$ du symbole dépendant de h introduit en § 2.1 a quatre composantes $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ étiquetées par $\sigma_1, \sigma_2 \in \{+, -\}$, s'étendant depuis l'infini spatial

$$\sigma_1 x \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 2\pi h \sigma_2,$$

où les solutions ont une fonction asymptotique oscillatoire, jusqu'à la dégénérescence en $x = \sigma_1$, où $\sigma_2 \xi \rightarrow +\infty$ et le flot hamiltonien devient radial. Nous soulignons que bien que chaque $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ soit lagrangienne pour h fixé, la famille dépendante de h n'est ni une lagrangienne fixe du calcul semiclassique standard, ni ne s'étend de manière lisse comme famille lagrangienne de diffusion semiclassique à l'infini spatial ; voir § 2.1.

L'argument est organisé comme suit.

D'abord, sur chaque composante $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$, nous construisons un “quasimode modèle” (c'est-à-dire une solution modulo $O(h^\infty)$ qui n'est pas nécessairement dans le domaine de P_{sa}). Plus précisément, près de l'infini spatial, nous utilisons à cette fin une forme WKB, mais près de la dégénérescence, nous avons plutôt besoin d'une représentation locale en distribution lagrangienne mieux adaptée au comportement radial. Nous utilisons ensuite un argument de phase stationnaire sur un intervalle intermédiaire pour relier les deux représentations et obtenir une formule de connexion impliquant un déphasage et une correction relative $O(h \log(1/h))$.

Nous remarquons qu'en raison de la non-compacité de $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$, les estimations WKB standard sur des ensembles compacts fixes ne fournissent *pas* de contrôle uniforme le long de toute la composante. Nous effectuons les estimations de transport WKB dans une classe de symboles à deux échelles avec des poids logarithmiques, puis la comparaison avec la distribution lagrangienne nous conduit à introduire une action renormalisée qui remplace l'intégrale formellement divergente “ $\int_{\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}} \xi dx$ ”. La décroissance limite $|x|^{-1}$ des termes de transport sur $1 \ll |x| \ll h^{-1}$ produit des puissances successives de $\log(1/h)$ et, en particulier, la correction $h \log(1/h)$.

Ensuite, l'étape cruciale est de démontrer la complétude des quatre quasimodes modèles. Des arguments basés sur le Wronskien nous permettent d'exprimer toute fonction propre exacte comme combinaison linéaire de quasimodes modèles modulo un reste qui décroît rapidement à l'infini spatial et est $O_{C^\infty}(h^\infty)$ sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Pour traiter le problème restant en $x = \pm 1$, nous utilisons d'abord une estimation radiale sous le seuil, sous la forme de [14, Thm.

E.54], pour propager la petitesse $O(h^\infty)$ des restes au sens des normes de Sobolev $H_h^{1/2-0}$. Un argument de régularité de module pour h fixé, dans l'esprit de Haber-Vasy [18] et Dyatlov-Zworski [15], suivi d'une utilisation des équations de transport près de l'infini de la fibre et d'un argument de bootstrap pour le comportement en h , améliore ensuite cela en $O(h^\infty)$ dans un sens plus fort, à savoir, au niveau des données aux limites.

Les quasimodes satisfaisant les conditions aux limites auto-adjointes sont ensuite construits comme combinaisons linéaires des “quasimodes modèles”. Imposer les conditions revient à résoudre un système de dimension finie, et annuler le déterminant correspondant donne lieu à la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld. Enfin, des arguments standard permettent de passer de l'analyse des quasimodes aux énoncés sur le spectre.

1.3 Remarques bibliographiques

Nous commentons ci-dessous divers résultats apparentés dans la littérature, soit sur la théorie spectrale de l'opérateur P_{sa} , soit sur les lois de Weyl non classiques.

1.3.1 L'opérateur de Connes-Moscovici

Nous écrivons $D_x = i^{-1}\partial_x$. Connes et Moscovici montrent que P possède une extension auto-adjointe P_{sa} uniquement déterminée par la propriété de commutation avec l'opérateur de multiplication $\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ et le multiplicateur de Fourier $\mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(D_x)$ [12]. Ils prouvent également que P_{sa} a un spectre discret, non borné dans les deux directions. De plus, il est démontré dans [12] que les fonctions propres de P_{sa} avec valeurs propres positives sont des fonctions propres L^2 de P qui appartiennent à l'espace de Sonin

$$\text{Ker } \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \cap \text{Ker } \mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(D_x). \quad (6)$$

Remarque 1.6. Notons que l'opérateur considéré dans [12] est $W_{\text{sa}} = -P_{\text{sa}}$, donc la terminologie y fait plutôt référence aux valeurs propres *négatives*. Notons aussi que le paramètre noté E dans [12] est la racine carrée de notre variable de valeur propre.

Le travail de Connes et Moscovici est motivé par le problème de trouver une réalisation spectrale des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann dans l'esprit de la conjecture de Hilbert-Pólya. Nous n'abordons pas ce problème ici : bien que le corollaire 1.2 confirme la loi de Weyl prédite par [12], nous soulignons que la comparaison avec les zéros de zêta que l'on peut en déduire à ce stade ne concerne que la fonction asymptotique dominante de leur fonction de comptage, telle que donnée par la formule de Riemann-von Mangoldt. Notre résultat n'identifie ni les (racines carrées des) valeurs propres individuelles de P_{sa} avec les zéros de zêta, ni ne reproduit les oscillations d'ordre inférieur dans la fonction de comptage des zéros. Une réalisation spectrale des zéros de zêta, telle que recherchée dans le programme plus large de Connes et collaborateurs [11, 12], devrait également rendre compte de ces oscillations.

Plusieurs travaux récents développent des aspects complémentaires de l'analyse. L'espace de Sonin apparaît indépendamment dans l'approche de Connes et Consani de la positivité de Weil [10], ce qui a en outre motivé la considération de l'opérateur prolate P_{sa} dans un contexte de théorie des nombres. Dans un travail ultérieur [11], Connes-Consani-Moscovici introduisent des analogues

semi-locaux de l'opérateur prolate P_{sa} et de l'espace de Sonin, incorporant de plus des composantes locales associées à un nombre fini de nombres premiers. Ils montrent que les espaces de Sonin généralisés résultants restent isomorphes lorsque d'autres nombres premiers sont ajoutés, et les réalisent comme espaces de Hilbert de fonctions entières. Ramis-Richard-Jung-Thomann développent une description complexe-analytique alternative des valeurs propres de P_{sa} qui ne proviennent pas du problème restreint $P|_{[-1,1]}$ [33]. Plus précisément, ils construisent des déterminants spectraux, caractérisent ces valeurs propres par des propriétés de décroissance des solutions prolongées analytiquement au plan complexe, prouvent qu'elles sont toutes positives (donc ce sont des valeurs propres *négatives* dans la terminologie pour $W_{\text{sa}} = -P_{\text{sa}}$), et donnent une méthode rapide pour leur calcul numérique. Notre formule de Bohr-Sommerfeld complète cette caractérisation en fournissant la fonction asymptotique à haute énergie (qui prouve en particulier que la borne sur les ordres des déterminants dans [33, Prop. 16] est optimale).

1.3.2 Opérateurs dégénérés et lois de Weyl logarithmiques

Dans cette sous-section, $N(E)$ désigne le nombre de valeurs propres, comptées avec multiplicité, dans $[0, E]$ pour l'opérateur auto-adjoint spécifié dans la phrase environnante. Nous écrivons $N_+(E)$ pour désigner le nombre de valeurs propres positives dans $(0, E]$ lorsque nous voulons souligner que l'opérateur n'est pas borné inférieurement.

Rappelons que pour un opérateur différentiel elliptique positif A d'ordre m sur une variété fermée X de dimension d , la loi de Weyl classique s'écrit

$$N(E) \sim (2\pi)^{-d} \text{vol}\{(x, \xi) \in T^*X \mid a_m(x, \xi) \leq E\},$$

où a_m est le symbole principal de A . L'homogénéité de a_m en ξ est alors responsable de la loi de puissance familière $E^{d/m}$. Si les coefficients d'ordre le plus élevé dégénèrent, cependant, le volume formel de l'espace des phases peut diverger, la contribution principale peut se concentrer près d'une strate singulière, et des puissances ou logarithmes supplémentaires peuvent apparaître.

Il existe désormais une théorie large, mais nécessairement hétérogène. Les fortes dégénérescences de puissance à une frontière ont été étudiées par Vulis-Solomyak [41]; les caractéristiques multiples et les opérateurs hypoelliptiques ont été étudiés par Métivier et Menikoff-Sjöstrand [30, 29], avec une perspective microlocale plus large donnée par Ivrii dans [26]. Les régions classiquement permises non compactes conduisent aux lois non classiques de Simon et Aramaki-Nurmuhammad [35, 2], voir ci-dessous. Des travaux plus récents traitent des géométries sous-riemanniennes et non équire-gulières [8], des laplaciens presque-riemanniens [3], des variétés riemanniennes singulières [4], des espaces métriques-mesurés singuliers [13], et des dégénérescences de frontière à exposant variable [7].

Un travail récent de Colin de Verdière étudie les opérateurs de Laplace à changement de signe définis par un problème de transmission elliptique à travers une hypersurface lisse [6]. L'auteur prouve des lois de Weyl classiques séparées pour les spectres positifs et négatifs et construit des modes concentrés près de l'interface. Le coefficient à changement de signe est une caractéristique partagée avec l'opérateur prolate P , bien que le cadre géométrique et le mécanisme spectral soient en fait assez différents.

Apparemment plus proche du cadre unidimensionnel considéré ici, Hartmann-Lesch-Vertman [19] étudient des opérateurs de Sturm-Liouville sur une demi-droite de la forme $-\partial_x(x^2\partial_x) + \mu^2x^2 - \frac{1}{4} + V(x)$ et, entre autres résultats, prouvent la loi de Weyl logarithmique $N(E) \sim (2\pi)^{-1}\sqrt{E} \log E$. Le signe du potentiel quadratique est cependant *opposé* à celui de P , et x^2 n'a *pas de zéro* sur l'intervalle considéré. Après un changement de variables logarithmique, le modèle se réduit à $-\partial_t^2 + \mu^2e^{2t}$, donc contrairement à notre problème, l'infini est confinant et de type limite avec une solution décroissante distinguée.

Les facteurs logarithmiques sont particulièrement caractéristiques des régimes limites, mais ils proviennent de mécanismes différents. Pour $\alpha > 0$, Simon [35] considère l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + |xy|^\alpha$ sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et prouve que sa fonction de comptage satisfait

$$N(E) = \frac{1}{\pi} E^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \log E + o\left(E^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \log E\right),$$

Pour le laplacien de Dirichlet sur le cornet de volume infini $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| \leq 1\}$, Aramaki-Nurmuhammad montrent que la fonction de comptage satisfait

$$N(E) = \frac{1}{\pi} E \log E + o(E \log E),$$

avec des résultats apparentés en dimension supérieure [2]. Fox-Strichartz considèrent l'opérateur d'onde $\partial_x^2 - \partial_y^2$ sur le tore plat bidimensionnel $\mathbb{T}^2$ et montrent

$$N_+(E) = E \log E + (2\gamma - 1)E + O(E^{1/2})$$

par un argument arithmétique de comptage de réseau [16, Thm. 3.2]. Pour le laplacien sur un espace métrique-mesuré singulier bidimensionnel compact avec une borne synthétique inférieure de courbure de Ricci, construit par Dai-Honda-Pan-Wei, on a

$$N(E) = \frac{1}{4\pi} E \log E + o(E \log E)$$

[13]. Dans le problème à dégénérescence de frontière variable considéré par Colin de Verdière-Dietze-Trélat [7], le régime dominant est déterminé par le fait que l'exposant de dégénérescence maximal se situe en dessous, à, ou au-dessus d'une valeur critique; sous une hypothèse de Morse-Bott sur son ensemble de maximum, la fonction asymptotique acquiert des facteurs logarithmiques dont la forme dépend de la codimension de cet ensemble.

Du point de vue microlocal, le comportement près de $x = \pm 1$ est le plus proche de l'analyse de Vasy des ensembles radiaux conormaux à une hypersurface dans les problèmes asymptotiquement hyperboliques et de Kerr-de Sitter [38, 39]; voir aussi [43]. L'argument de régularité de module que nous utilisons est une version simple de celui de Haber et Vasy [18], tandis que le passage des estimations radiales à une représentation oscillatoire conormale et l'analyse subséquente des équations de transport suivent le schéma de Dyatlov-Zworski [15]. Les classes de symboles dépendantes de h que nous utilisons ne semblent pas être entrées dans la littérature jusqu'à présent, nous remarquons cependant qu'il existe des similitudes avec le calcul des cônes semiclassiques de Hintz et son raffinement microlocal second [22, 23]. Cela suggère une approche alternative basée sur l'éclatement d'un coin de l'espace des phases semiclassique compactifié, que nous ne poursuivons pas ici.

1.4 Organisation de l'article

En §2, nous introduisons les préliminaires sur l'analyse semiclassique de $P(h)$ et les conditions aux limites. En §3, nous construisons les quatre quasimodes modèles et calculons la formule de connexion. En §4, nous prouvons la complétude des quasimodes modèles en utilisant des arguments basés sur le Wronskien, des estimations radiales, la régularité conormale et les équations de transport à l'infini de la fibre. Ensuite, en §5, nous imposons les conditions aux limites, nous prouvons la localisation spectrale et la simplicité, et nous concluons la loi de Weyl. L'annexe A passe en revue la description des extensions auto-adjointes de P sur la droite réelle. Enfin, les estimations symboliques utilisées dans la construction des quasimodes sont rassemblées dans l'annexe B.

2 Préliminaires

2.1 Dynamique semiclassique

Pour étudier le problème aux valeurs propres lorsque $E \rightarrow \infty$, nous introduisons un petit paramètre semiclassique $h > 0$ en posant $E = h^{-2}$ et écrivons

$$P(h) = h^2(P - h^{-2}) = -h^2\partial_x(x^2 - 1)\partial_x - 4\pi^2h^2x^2 - 1. \quad (7)$$

Nous désignons par

$$p_h(x, \xi) = (x^2 - 1)\xi^2 - 4\pi^2h^2x^2 - 1 \quad (8)$$

le symbole réel dépendant de h associé à $P(h)$ qui sera utilisé plus loin dans l'équation eikonale globale. Sur les sous-ensembles compacts de la droite x , il diffère de $O(h^2)$ du symbole principal semiclassique $(x^2 - 1)\xi^2 - 1$, mais le terme supplémentaire $-4\pi^2h^2x^2$ devient pertinent à l'échelle $|x| \sim h^{-1}$.

L'ensemble de zéros $\{p_h = 0\}$ a quatre composantes connexes

$$\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2} = \{(x, \xi) \mid p_h(x, \xi) = 0, \sigma_1x > 1, \sigma_2\xi > 0\}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}. \quad (9)$$

Sur $\{p_h = 0\}$ on a

$$(x^2 - 1)\xi^2 = 1 + 4\pi^2h^2x^2,$$

donc à l'infini spatial dans $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$, $\sigma_1x \rightarrow \infty$ et $\xi \rightarrow 2\pi h\sigma_2$, et d'autre part, en approchant la dégénérescence $x \rightarrow \sigma_1$ on a $\sigma_2\xi \rightarrow +\infty$.

Remarque 2.1. Pour chaque $h > 0$ fixé, $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ est une courbe lagrangienne exacte lisse dans $T^*\mathbb{R}$. La famille n'est néanmoins pas une lagrangienne globale fixe pour le calcul semiclassique standard, ni ne s'étend comme famille lagrangienne de diffusion semiclassique lisse à l'infini spatial. En effet, avec $r = (\sigma_1x)^{-1}$ et la coordonnée de fibre de diffusion $\eta = -\sigma_1\xi$, on a

$$\eta = -\sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{r^2 + 4\pi^2h^2}{1 - r^2}},$$

et le terme dominant $\sqrt{r^2 + 4\pi^2h^2}$ n'est pas lisse au coin $h = r = 0$.

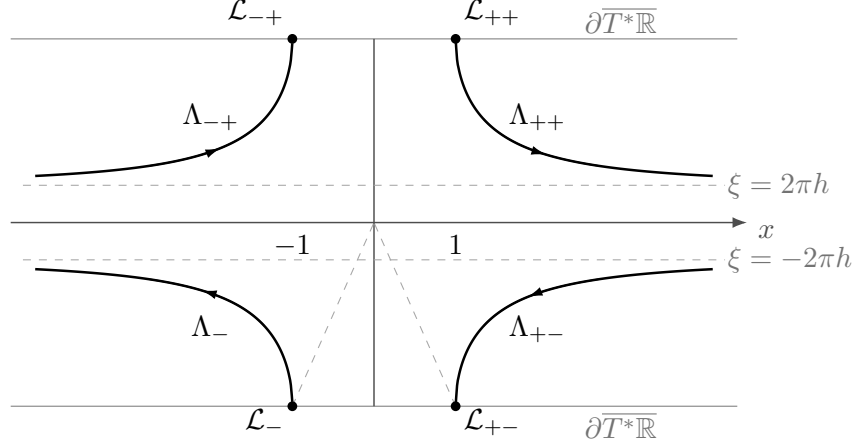


FIGURE 1 – Portrait de phase schématisé de l'ensemble de zéros $\{p_h = 0\}$ dans la compactification radiale de la fibre $\overline{T^*\mathbb{R}}$. Les quatre composantes connexes $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ se trouvent au-dessus de $|x| > 1$ et approchent, lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, les niveaux limites $\xi = 2\pi h$ ou $\xi = -2\pi h$. Les points radiaux $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$ se trouvent au-dessus de $x = \pm 1$ à l'infini de la fibre $\partial\overline{T^*\mathbb{R}}$.

Suivant [14, Appendix E], soit $\overline{T^*\mathbb{R}}$ la compactification radiale de la fibre de $T^*\mathbb{R}$, dont la frontière $\partial\overline{T^*\mathbb{R}}$ représente l'infini de la fibre. Les deux points frontières dans chaque fibre sont étiquetés par $\hat{\xi} := \xi/|\xi| \in \{\pm 1\}$. Nous désignons l'extrémité de $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ à l'infini de la fibre par

$$\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2} := \overline{\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}} \cap \partial\overline{T^*\mathbb{R}} = \{x = \sigma_1, \hat{\xi} = \sigma_2\}, \quad (10)$$

où la fermeture est prise dans $\overline{T^*\mathbb{R}}$. Dans la carte frontière $\sigma_2 \xi > 0$, la fonction

$$\rho = (\sigma_2 \xi)^{-1}$$

est une fonction définissante de $\partial\overline{T^*\mathbb{R}}$, et $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2} = \{x = \sigma_1, \rho = 0\}$.

Le champ de vecteurs hamiltonien est

$$H_{p_h} = 2(x^2 - 1)\xi \partial_x - (2x\xi^2 - 8\pi^2 h^2 x)\partial_\xi. \quad (11)$$

Dans les coordonnées (x, ρ) , sa renormalisation par ρ s'écrit

$$\rho H_{p_h} = 2\sigma_2(x^2 - 1)\partial_x + 2\sigma_2 x \rho (1 - 4\pi^2 h^2 \rho^2)\partial_\rho. \quad (12)$$

Ainsi ρH_{p_h} s'étend de manière lisse à la frontière de la fibre et s'annule en $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$. Sa partie linéaire y est

$$4\sigma_1\sigma_2(x - \sigma_1)\partial_x + 2\sigma_1\sigma_2\rho\partial_\rho.$$

Par conséquent, $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$ est une source radiale lorsque $\sigma_1\sigma_2 = 1$ et un puits radial lorsque $\sigma_1\sigma_2 = -1$, dans la terminologie de [14, Def. E.50]. La direction correspondant au déplacement vers l'avant le long du flot est indiquée par une flèche sur la figure 1.

2.2 Action renormalisée

Dans le cadre standard unidimensionnel de Bohr-Sommerfeld, supposons que la surface d'énergie $\{q = E\}$ ait une composante connexe compacte Λ sur laquelle $dq \neq 0$. Alors Λ est une orbite hamiltonienne périodique. Sur toute portion de Λ qui est localement un graphe $\xi = \xi(x)$, un ansatz WKB a la forme $a(x; h)e^{i\varphi(x)/h}$, et l'équation eikonale implique $\varphi'(x) = \xi(x)$. La phase accumulée sur une période est donc l'action classique $\int_{\Lambda} \xi dx$. Exiger que les solutions WKB locales s'appariant après continuation autour de Λ donne la condition de Bohr-Sommerfeld, avec l'indice de Maslov fournissant la première correction de phase ; voir [40, § 5-7] pour une revue moderne et [5, 25] pour d'autres approches.

Dans le problème présent, les composantes $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ sont non compactes et l'intégrale d'action usuelle le long de chaque composante diverge. Par exemple, sur $\Lambda_{+,+}$, la variable de fibre est

$$\xi(x) = \sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 x^2}{x^2 - 1}},$$

donc $\xi(x) - 2\pi h = O_h(x^{-2})$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Ainsi l'intégrale d'action ordinaire le long de $\Lambda_{+,+}$ diverge linéairement, tandis que soustraire la valeur limite donne l'intégrale convergente

$$\int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 x^2}{x^2 - 1}} - 2\pi h \right) dx = 2\pi h I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \right). \quad (13)$$

Nous appelons cela l'*action renormalisée* associée à $\Lambda_{+,+}$. Les quantités correspondantes sur les autres composantes sont données par la même formule avec le signe approprié.

2.3 Notation

Pour $k \in \mathbb{R}$, $b \in S^k$ signifie que $b \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1]_h)$ et

$$|\partial_\xi^\alpha b(\xi, h)| \lesssim \langle \xi \rangle^{k-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0,$$

uniformément en ξ et h . Nous utilisons la même notation sur des sous-ensembles de la droite ξ . Nous écrivons $f = O_{S(\Omega)}(h^\infty)$ si, pour tout $N \geq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x \in \Omega} \langle x \rangle^\beta |\partial_x^\alpha f(x; h)| \leq C_{N\alpha\beta} h^N.$$

La notation $O(E^{-\infty})$ a la même signification. Pour des quantités non négatives $A = A(h)$ et $B = B(h)$, nous écrivons $A \sim B$ si $C^{-1}B \leq A \leq CB$ pour une constante $C > 0$ indépendante de h ; lorsqu'elle est utilisée pour une série formelle, $\sim$ a sa signification habituelle de développement asymptotique.

2.4 Données aux limites

Pour référence ultérieure, nous écrivons explicitement le domaine $D(P_{\text{sa}})$ de P_{sa} . Nous posons $u_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(-x))$ et $u_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}(u(x) - u(-x))$. Alors $D(P_{\text{sa}})$ est constitué des éléments du domaine maximal

$$D_{\text{max}}(P) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid Pu \in L^2(\mathbb{R})\}$$

qui satisfont

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (x \mp 1) \partial_x u(x) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(x \sin(2\pi x) \partial_x u_{\text{even}}(x) - (2\pi x \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)) u_{\text{even}}(x) \right) = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(x \cos(2\pi x) \partial_x u_{\text{odd}}(x) + (2\pi x \sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)) u_{\text{odd}}(x) \right) = 0. \quad (16)$$

Cette description directe est plus utile pour nos besoins que la caractérisation par l'espace de Sonin esquissée dans l'introduction.

Soit $u \in D_{\max}(P)$. Des données aux limites sont requises aux deux zéros $x = \pm 1$ du coefficient principal et aux deux extrémités de la droite réelle. Près de $x = \sigma \in \{\pm 1\}$, l'identité

$$\partial_x \left((x^2 - 1) \partial_x u \right) = -Pu - 4\pi^2 x^2 u$$

montre que $w = (x^2 - 1) \partial_x u$ appartient à H_{loc}^1 et a donc un représentant continu. Comme $x^2 - 1$ a un zéro simple en $x = \sigma$, soustraire le terme logarithmique déterminé par $w(\sigma)$ et utiliser l'inégalité de Hardy unidimensionnelle donne

$$u(x) = a_{\sigma}^{(0)} \log |x - \sigma| + a_{\sigma}^{(1)} H(x - \sigma) + u_{\sigma}^{\text{reg}}(x), \quad u_{\sigma}^{\text{reg}} \in H_{\text{loc}}^1. \quad (17)$$

La condition (14) est équivalente à $a_{\sigma}^{(0)} = 0$.

À l'infini, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, une base de solutions de $(P - z)u = 0$ sur l'une ou l'autre demi-droite extérieure a pour comportement dominant

$$\frac{\sin(2\pi x)}{|x|} + O_z(|x|^{-2}), \quad \frac{\cos(2\pi x)}{|x|} + O_z(|x|^{-2}),$$

voir [12]. Ainsi (15) sélectionne la fonction asymptotique de type sinus dans le secteur pair, tandis que (16) sélectionne la fonction asymptotique de type cosinus dans le secteur impair.

Lemme 2.2. *Soit $\sigma_2 \in \{\pm 1\}$ et $b \in S^{-1}$. Supposons que $b(\xi, h) = |\xi|^{-1} + O(|\xi|^{-2})$ lorsque $\sigma_2 \xi \rightarrow \infty$ et $\text{supp } b(\cdot, h) \subset \{\xi \mid \sigma_2 \xi > 0\}$. Alors la fonction*

$$v_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} b(\xi, h) e^{\frac{i}{h}(x \mp 1)\xi} d\xi$$

satisfait $\lim_{x \rightarrow \pm 1} (x \mp 1) \partial_x v_{\pm}(x) = -1/\sqrt{2\pi h}$.

Démonstration. Par $(x \mp 1) e^{\frac{i}{h}(x \mp 1)\xi} = h D_{\xi} e^{\frac{i}{h}(x \mp 1)\xi}$ et intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 1} (x \mp 1) \partial_x v_{\pm}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi} (\xi b(\xi, h)) e^{\frac{i}{h}(x \mp 1)\xi} d\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi} (\xi b(\xi, h)) d\xi \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \xi b(\xi, h) \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi h}}. \end{aligned}$$

□

3 Quasimodes modèles et formule de connexion

3.1 Unicité locale des quasimodes

Nous écrivons $g(x) = x^2 - 1$, donc

$$P(h) = -h^2 \partial_x (g(x) \partial_x) - 4\pi^2 h^2 x^2 - 1.$$

Nous utilisons la terminologie de [14, Defs. E.35-E.36]. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, une famille $u = u(h) \in \mathcal{D}'(I)$, $0 < h < h_0$, est h -tempérée si, pour tout $\chi \in C_c^\infty(I)$, il existe $C, N > 0$ tels que

$$\|\chi u\|_{H_h^{-N}(I)} \leq Ch^{-N}.$$

Soit $\Psi_h^m(I)$ le calcul pseudodifférentiel semiclassique local proprement supporté sur l'intervalle ouvert I , obtenu en localisant le calcul uniforme usuel sur $\mathbb{R}$; voir [42, § 4.1] et [14, § E.1.2]. Pour $A \in \Psi_h^m(I)$, nous notons son symbole principal semiclassique par $\sigma_{\text{pr},h}(A)$. Pour une famille h -tempérée, $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}_h(u)$ s'il existe $A \in \Psi_h^0(I)$, elliptique en (x_0, ξ_0) , tel que $Au = O_{C^\infty}(h^\infty)$.

Nous aurons besoin de l'énoncé d'unicité locale suivant pour apparier différentes constructions de quasimodes.

Théorème 3.1. *Soit $I \Subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ connexe et $\sigma \in \{\pm\}$. Supposons que $u = u(h), w = w(h) \in C^\infty(I)$ soient h -tempérées et satisfont*

$$P(h)u = O_{C^\infty(I)}(h^\infty), \quad P(h)w = O_{C^\infty(I)}(h^\infty), \quad \text{WF}_h(u) \cup \text{WF}_h(w) \subset \{\sigma\xi > 0\}$$

et $u(x_0) = w(x_0) + O(h^\infty)$ en un point $x_0 \in I$. Alors nous avons $u(x) = w(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty)$.

Ce résultat est un cas particulier de l'unicité des solutions microlocales pour les opérateurs de type principal réel; comparer [9, Lem. 18] et [36, around (3.10)]. Dans le cas particulier de notre problème unidimensionnel, nous donnons une démonstration directe utilisant une base WKB locale et le Wronskien. Par symétrie, il suffit de travailler avec $\xi > 0$ et $I \Subset (1, \infty)$.

Lemme 3.2. *Soit $I \Subset (1, \infty)$ et $x_0 \in I$. Il existe des phases réelles $S_\pm \in C^\infty((1, \infty))$ avec $\pm S'_\pm > 0$, et des symboles classiques $\zeta_\pm(x; h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j \zeta_{\pm,j}(x)$ tels que, en posant $\gamma_\pm(x) = \zeta_\pm(x; h) e^{\frac{i}{h} S_\pm(x)}$,*

$$P(h)\gamma_\pm = O_{C^\infty(I)}(h^\infty), \quad S_\pm(x_0) = 0, \quad \zeta_\pm(x_0) = 1 + O(h^\infty).$$

En particulier, $\gamma_\pm(x_0) = 1 + O(h^\infty)$.

Démonstration. Ce lemme est bien connu et la démonstration est basée sur la construction WKB standard. Nous omettons les détails. $\square$

Lemme 3.3. *Soit $I \Subset (1, \infty)$ et $x_0 \in I$. Si une famille h -tempérée $u \in C^\infty(I)$ satisfait*

$$P(h)u = O_{C^\infty(I)}(h^\infty),$$

alors il existe des coefficients $c_\pm = c_\pm(h) \in \mathbb{C}$ tels que

$$u(x) = c_+ \gamma_+(x) + c_- \gamma_-(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty)$$

pour $x \in I$. De plus, nous pouvons prendre $c_\pm$ explicitement comme

$$c_+ = \frac{W_h(u, \gamma_-)(x_0)}{W_h(\gamma_+, \gamma_-)(x_0)}, \quad c_- = -\frac{W_h(u, \gamma_+)(x_0)}{W_h(\gamma_+, \gamma_-)(x_0)}. \quad (18)$$

Démonstration. Nous introduisons le Wronskien pondéré

$$W_h(f_1, f_2) = g(x) \left(f_1 h \partial_x f_2 - (h \partial_x f_1) f_2 \right).$$

Alors

$$h \partial_x W_h(f_1, f_2) = (P(h) f_1) f_2 - f_1 P(h) f_2. \quad (19)$$

Nous appliquons cette identité avec $(f_1, f_2) = (u, \gamma_\pm)$. En utilisant la tempérance, nous obtenons que $W_h(u, \gamma_\pm)$ est constant modulo $O(h^\infty)$ sur I , tandis que $W_h(\gamma_+, \gamma_-)(x_0)$ est borné loin de zéro pour h petit puisque $S'_+(x_0) \neq S'_-(x_0)$. En appliquant la règle de Cramer, nous obtenons les formules pour les coefficients, et donc l'expansion affirmée. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. Nous considérons seulement le cas $\sigma = +$. Par le lemme 3.3, nous avons

$$u(x) = c_+ \gamma_+(x) + c_- \gamma_-(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty), \quad w(x) = d_+ \gamma_+(x) + d_- \gamma_-(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty)$$

pour $x \in I$.

À partir des formules de coefficients (18), appliquées à u et w , nous déduisons que $|c_\pm| + |d_\pm| \lesssim h^{-M}$ pour un certain $M > 0$. Par l'hypothèse $\text{WF}_h(u) \cup \text{WF}_h(w) \subset \{(x, \xi) \mid \xi > 0\}$ et $\text{WF}_h(\gamma_-) \subset \{(x, \xi) \mid \xi < 0\}$, nous obtenons $c_- = d_- = O(h^\infty)$. Donc

$$u(x) = c_+ \gamma_+(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty), \quad w(x) = d_+ \gamma_+(x) + O_{C^\infty(I)}(h^\infty).$$

Puisque $\gamma_\pm(x_0) = 1 + O(h^\infty)$, nous avons $u(x_0) = c_+ + O(h^\infty)$ et $w(x_0) = d_+ + O(h^\infty)$. Maintenant notre hypothèse implique $u(x_0) = w(x_0) + O(h^\infty)$ et donc $c_+ = d_+ + O(h^\infty)$, ce qui implique $u = w + O_{C^\infty(I)}(h^\infty)$. Ceci achève la démonstration. $\square$

3.2 Phases et quasimodes modèles

Nous définissons

$$\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x) := \sigma_2 \left(\int_{\sigma_1 \infty}^x \left(\sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 y^2}{y^2 - 1}} - 2\pi h \right) dy + 2\pi h x \right), \quad \sigma_1 x > 1, \quad (20)$$

$$F_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) := \sigma_1 \left(\int_{\sigma_2 \infty}^\xi \left(\sqrt{\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 4\pi^2 h^2}} - 1 \right) d\eta + \xi \right), \quad \sigma_2 \xi > 2\pi h. \quad (21)$$

Notons que $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$, $\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}$ et F_{σ_1, σ_2} dépendent de h (bien que la notation ne l'indique pas explicitement).

Géométriquement, $\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}$ et F_{σ_1, σ_2} engendrent la composante $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$ introduite en (9) dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma_1, \sigma_2} &= \{(x, \partial_x \varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x)) \mid \sigma_1 x > 1\} \\ &= \{(\partial_\xi F_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi), \xi) \mid \sigma_2 \xi > 2\pi h\}. \end{aligned} \quad (22)$$

La première paramétrisation est adaptée à $|x| \rightarrow \infty$, tandis que la seconde est adaptée à l'approche du point radial $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$, c'est-à-dire au régime $x \rightarrow \sigma_1$ et $|\xi| \rightarrow \infty$.

Définition 3.4. Soit $k, \ell \in \mathbb{R}$. Nous écrivons $X = 1 + |x|$, $Y = 1 + h|x|$, et $L_h(x) := 1 + \log(Y/(hX))$. Pour $a \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, 1]_h)$, nous disons que $a \in \mathcal{S}_k^\ell$ si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta a(x, h)| \lesssim h^{-\beta} X^{-\frac{1}{2}-\alpha} Y^k L_h(x)^\ell$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}$ et $0 < h \leq 1$. Nous écrivons $a \in \mathcal{S}_k^\ell$ pour $x \in \Omega$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ lorsque a satisfait ces estimations uniformément sur $x \in \Omega$ et $0 < h \leq 1$.

Proposition 3.5. Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}$, il existe des fonctions $u_{\sigma_1, \sigma_2} \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$P(h)u_{\sigma_1, \sigma_2} = O_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}(h^\infty) \quad (23)$$

ainsi que les propriétés suivantes.

(i) Pour $\sigma_1 x \geq 2$,

$$u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) = \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}(h) a_{\sigma_1, \sigma_2}(x, h) e^{\frac{i}{h} \varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x)} + O_{\mathcal{S}}(h^\infty). \quad (24)$$

Pour $\frac{1}{2} \leq \sigma_1 x \leq 4$,

$$u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} b_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi, h) e^{\frac{i}{h}(x\xi - F_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi))} d\xi + O_{C^\infty}(h^\infty). \quad (25)$$

De plus, $u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) = 0$ lorsque $\sigma_1 x \leq \frac{1}{4}$. Ci-dessus, $a_{\sigma_1, \sigma_2} \in \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}}^0$ et $b_{\sigma_1, \sigma_2} \in S^{-1}$. Il existe des constantes $0 < \xi_0 < \xi_1$, indépendantes de h , telles que

$$\text{supp } b_{\sigma_1, \sigma_2}(\cdot, h) \subset \{\xi \in \mathbb{R} \mid \sigma_2 \xi \geq \xi_0\},$$

et

$$\begin{aligned} a_{\sigma_1, \sigma_2}(x, h) - \frac{1}{|g(x) \varphi'_{\sigma_1, \sigma_2}(x)|^{\frac{1}{2}}} &\in h \mathcal{S}_{-\frac{3}{2}}^1, \\ b_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi, h) - |(\partial_x p_h)(F'_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi), \xi)|^{-\frac{1}{2}} &\in h S^{-2}, \quad \sigma_2 \xi \geq \xi_1, \\ \mathbf{c}_{+,+}(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i I(1 + \frac{1}{4\pi^2 h^2}) + \frac{\pi i}{4}} (1 + r_{+,+}(h)), \\ \mathbf{c}_{+,-} &= \mathbf{c}_{-,+} = \overline{\mathbf{c}_{-,-}} = \overline{\mathbf{c}_{+,+}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Ici $r_{+,+}$ satisfait $|\partial_h^\beta r_{+,+}(h)| \lesssim h^{1-\beta} \log(1/h)$, et nous rappelons que I est définie en (3).

(ii) $\|u_{\sigma_1, \sigma_2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \sim \log(1/h)$.

Remarque 3.6. (1) Microlocalement loin des deux extrémités de $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$, u_{σ_1, σ_2} est une distribution lagrangienne semiclassique associée à $\Lambda_{\sigma_1, \sigma_2}$. Près de $x = \sigma_1$, et pour h fixé, elle est conormale à $\{x = \sigma_1\}$ microlocalement dans la région $\sigma_2 \xi > 0$. Cependant, nous soulignons qu'elle n'est pas globalement décrite par une seule classe lagrangienne semiclassique ou de diffusion standard.

(2) On a $u_{\sigma_1, \sigma_2} \in H^{\frac{1}{2}-0}(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{|x| = 1\})$, mais $u_{\sigma_1, \sigma_2} \notin H_{\text{loc}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Démonstration de la proposition 3.5. Ici, nous construisons $u_{+,+}$. Les autres u_{σ_1, σ_2} peuvent être construits en posant

$$u_{+,-}(x) := \overline{u_{+,+}(x)}, \quad u_{-,+}(x) := \overline{u_{+,+}(-x)}, \quad u_{-,-}(x) = u_{+,+}(-x),$$

où nous avons utilisé que la conjugaison $u \mapsto \bar{u}$ et la réflexion $u(x) \mapsto u(-x)$ commutent toutes deux avec $P(h)$. Dans ce qui suit, nous supprimons l'indice $(+, +)$ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Étape 1 (Représentation en distribution lagrangienne près de $x = 1$). Nous construisons un ansatz sur $\{\frac{1}{2} \leq x \leq 4\}$ en termes d'un symbole $b(\xi, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j b_j(\xi, h)$ avec $b_j \in S^{-1-j}$, supporté loin de l'ensemble singulier $\xi = 2\pi h$. La fonction $F = F_{+,+}$ satisfait l'équation eikonale $p_h(F'(\xi), \xi) = 0$, qui est la paramétrisation graphique de la composante $\Lambda_{+,+}$ en (22). Nous posons

$$J(b)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi - F(\xi))} b(\xi, h) d\xi.$$

Nous vérifions directement la formule de transport utilisée ci-dessous ; comparer [17, Ex. 12.3] et [24, Vol. IV, Thm. 25.2.4] pour le calcul général. Soit $\mathcal{F}_h$ la transformée de Fourier semiclassique unitaire et posons $c = 2\pi h$. Alors

$$\mathcal{F}_h P(h) \mathcal{F}_h^{-1} = -h^2 \partial_{\xi} \left((\xi^2 - c^2) \partial_{\xi} \right) - \xi^2 - 1.$$

En conjuguant cet opérateur par $e^{-iF/h}$ et en utilisant $p_h(F'(\xi), \xi) = 0$, nous obtenons l'identité exacte

$$P(h)J(b_j) = ihJ(\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_j) + h^2 J(r_j), \quad r_j = -\partial_{\xi} \left((\xi^2 - c^2) \partial_{\xi} b_j \right),$$

où

$$\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_j = \alpha b'_j + \frac{1}{2} \alpha' b_j, \quad \alpha(\xi) = \partial_x p_h(F'(\xi), \xi).$$

En particulier, $r_j \in S^{-1-j}$ et $\text{supp } r_j \subset \text{supp } b_j$. Par conséquent, pour chaque $N > 0$,

$$\begin{aligned} P(h)J\left(\sum_{j=0}^N h^j b_j\right)(x) &= ihJ(\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_0) + \sum_{j=0}^{N-1} h^{j+2} \left(iJ(\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_{j+1}) + J(r_j) \right) \\ &\quad + h^{N+2} J(r_N) + O_{C^\infty}(h^\infty). \end{aligned}$$

Ainsi, si nous résolvons les équations $\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_0 = 0$ et $i\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_{j+1} + r_j = 0$ successivement, alors nous obtenons un quasimode de $P(h)$ sur $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$. Ceci sera utilisé plus loin dans le lemme 3.7 et le lemme 3.8. Dans notre cas, après avoir fixé la coupure ci-dessous, nous résolvons ces équations sur la région $\xi > \xi_0$ concrètement comme

$$b_0(\xi) = \chi(\xi) |(\partial_x p_h)(F'(\xi), \xi)|^{-\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

$$b_{j+1}(\xi) = i\chi(\xi) |(\partial_x p_h)(F'(\xi), \xi)|^{-\frac{1}{2}} \int_{\infty}^{\xi} |(\partial_x p_h)(F'(\eta), \eta)|^{-\frac{1}{2}} r_j(\eta, h) d\eta, \tag{28}$$

où nous écrivons $b_j(\xi) = b_j(\xi, h)$; les propriétés symboliques sont prouvées dans le lemme B.1. Ici, nous choisissons χ comme suit. Soit

$$\xi(x) := \sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 x^2}{x^2 - 1}},$$

de sorte que $x = F'(\xi(x))$ pour $x > 1$. Puisque F' est strictement décroissante sur $(2\pi h, \infty)$ et $\xi(4) > 1/4$ pour $h > 0$ petit, nous pouvons fixer

$$\xi_0 = \frac{1}{5}, \quad \xi_1 = \frac{1}{4}, \quad 2\pi h < \xi_0 < \xi_1 < \xi(4) < \xi(2).$$

Nous prenons $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ avec $\chi(\xi) = 0$ pour $\xi \leq \xi_0$ et $\chi(\xi) = 1$ pour $\xi \geq \xi_1$. Alors les points stationnaires pour $x \in [2, 4]$ se trouvent dans la région où $\chi = 1$. De plus, sur $\text{supp } \chi'$ on a $F'(\xi) > 4$, et donc $|x - F'(\xi)| \geq F'(\xi_1) - 4 > 0$ pour $1/2 \leq x \leq 4$. Ainsi tous les termes produits par la différenciation de χ sont $O_{C^\infty([1/2, 4])}(h^\infty)$ par phase non stationnaire. De même, si $x \in [1/2, 2/3]$ et $\xi \geq \xi_1$, alors $F'(\xi) \geq 1$, donc $|x - F'(\xi)| \geq 1/3$. Nous observons que

$$J(b)(x) = O_{C^\infty}(h^\infty) \quad \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \quad (29)$$

par l'argument de phase non stationnaire. Cette estimation sera utilisée dans le recollement final des deux expressions locales.

Étape 2 (Représentation WKB à l'infini). Nous construisons un ansatz WKB sur $\{x \geq 2\}$; les estimations uniformes à travers l'échelle $x \sim h^{-1}$ sont prouvées dans le lemme B.2. Puisque $\varphi = \varphi_{+,+}$ satisfait l'équation eikonale $p_h(x, \varphi'(x)) = 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{h}\varphi(x)} P(h)(a(x)e^{\frac{i}{h}\varphi(x)}) = & -ih \left(2g(x)\varphi'(x)a'(x) + g(x)\varphi''(x)a(x) \right. \\ & \left. + g'(x)\varphi'(x)a(x) \right) \\ & - h^2 \left(g(x)a''(x) + g'(x)a'(x) \right). \end{aligned}$$

où nous écrivons $a(x) = a(x, h) \sim \sum_{j=0}^\infty h^j a_j(x, h)$ avec $a_j \in \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}-j}^j$. Nous résolvons les équations de transport

$$\begin{aligned} 2ig(x)\varphi'(x)a'_0(x) + ig(x)\varphi''(x)a_0(x) + ig'(x)\varphi'(x)a_0(x) &= 0, \\ 2ig(x)\varphi'(x)a'_{j+1}(x) + ig(x)\varphi''(x)a_{j+1}(x) &= -ig'(x)\varphi'(x)a_{j+1}(x) \\ &\quad - g(x)a''_j(x) - g'(x)a'_j(x). \end{aligned}$$

successivement comme

$$a_0(x) = \frac{1}{|g(x)\varphi'(x)|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}(4\pi^2 h^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{4}}} \in \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}}^0. \quad (30)$$

$$a_j(x) = \frac{i}{2} |g(x)\varphi'(x)|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \frac{g(y)a''_{j-1}(y) + g'(y)a'_{j-1}(y)}{|g(y)\varphi'(y)|^{\frac{1}{2}}} dy \in \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}-j}^j. \quad (31)$$

pour $x \geq 2$, $j \geq 1$. Les estimations symboliques des a_j sont prouvées dans le lemme B.2. En particulier, l'estimation $a(x) - a_0(x) \in h\mathcal{S}_{-\frac{3}{2}}^1$ utilise la bornitude uniforme de

$$\frac{hL_h(x)}{Y} = \frac{h}{1 + h|x|} \left(1 + \log \frac{1 + h|x|}{h(1 + |x|)} \right), \quad 0 < h \leq 1, \quad |x| \geq 2.$$

Ensuite, nous obtenons un quasimode de $P(h)$ sur $\{x \geq 2\}$, c'est-à-dire $P(h)(a(x)e^{\frac{i}{h}\varphi(x)}) = O_{S(\mathbb{R})}(h^\infty)$ pour $x \geq 2$.

Étape 3 (Appariement sur $2 \leq x \leq 4$). Pour appairer ces deux quasimodes sur la région $2 \leq x \leq 4$, nous réécrivons $J(b)(x)$ en utilisant la formule de phase stationnaire [42, Thm. 3.11] comme

$$J(b)(x) = e^{\frac{i}{h}(x\xi(x) - F(\xi(x)) + \frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn}(-(F'')(\xi(x))))} \tilde{a}(x, h) + O_{C^\infty}(h^\infty) \quad \text{pour } x \in [2, 4]. \quad (32)$$

Ici $\xi(x)$ est l'unique solution de $x = F'(\xi(x))$ avec $\xi(x) > 0$. Nous notons l'amplitude dominante par

$$\tilde{a}_0(x, h) := b_0(\xi(x), h) |F''(\xi(x))|^{-\frac{1}{2}}.$$

Alors $\tilde{a}$ est lisse pour $x \in [2, 4]$ et $h \in [0, 1]$, et

$$\tilde{a}(x, h) = \tilde{a}_0(x, h) + O_{C^\infty}(h) \quad \text{pour } x \in [2, 4].$$

Nous calculons maintenant l'amplitude dominante et la phase plus explicitement. Par (21), nous voyons $\operatorname{sgn}(-(F'')(\xi(x))) = 1$, où nous rappelons $F = F_{+,+}$.

Par un calcul direct, nous voyons que l'équation $x = F'(\xi(x))$ est équivalente à $\xi(x) = \varphi'(x)$. En différenciant $p_h(F'(\xi), \xi) = 0$ par rapport à ξ , nous avons $F''(\xi) = -(\partial_\xi p_h)(F'(\xi), \xi) \cdot (\partial_x p_h)(F'(\xi), \xi)^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, h) &= |(\partial_\xi p_h)(x, \varphi'(x))|^{-\frac{1}{2}} + O_{C^\infty}(h) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|g(x)\varphi'(x)|^{\frac{1}{2}}} + O_{C^\infty}(h), \quad x \in [2, 4], \end{aligned} \quad (33)$$

puisque $\chi = 1$ sur la région stationnaire. Enfin, nous observons que

$$\begin{aligned} \partial_x(x\xi(x) - F(\xi(x)) - \varphi(x)) &= \xi(x) + x\xi'(x) - \xi'(x)F'(\xi(x)) - \varphi'(x) \\ &= \xi'(x)(x - F'(\xi(x))) = 0 \end{aligned}$$

par $\xi(x) = \varphi'(x)$ et $x = (F')(\xi(x))$, ce qui implique que $x\xi(x) - F(\xi(x)) - \varphi(x)$ est indépendant de x . Puisque $\xi(x) = \varphi'(x) \rightarrow 2\pi h$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et

$$\sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 y^2}{y^2 - 1}} - 2\pi h = O_h(|y|^{-2}),$$

nous avons $x\xi(x) - \varphi(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x\xi(x) - F(\xi(x)) - \varphi(x)) &= - \lim_{x \rightarrow \infty} F(\xi(x)) \\ &= - \int_\infty^{2\pi h} \left(\sqrt{\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 4\pi^2 h^2}} - 1 \right) d\eta - 2\pi h \\ &= \int_{2\pi h}^\infty \left(\sqrt{\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 4\pi^2 h^2}} - 1 \right) d\eta - 2\pi h \\ &= 2\pi h I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \right) - 2\pi h, \end{aligned}$$

où nous rappelons que I est définie en (3). Puisque $e^{-2\pi i} = 1$, le terme $-2\pi h$ ne contribue pas après division par h et exponentiation. Par conséquent,

$$e^{\frac{i}{h}(x\xi(x)-F(\xi(x)))} = e^{\frac{i}{h}\varphi(x)+2\pi iI(1+\frac{1}{4\pi^2 h^2})}.$$

En résumé, nous obtenons

$$J(b)(x) = e^{\frac{i}{h}\varphi(x)+2\pi iI(1+\frac{1}{4\pi^2 h^2})+\frac{\pi}{4}i}\tilde{a}(x, h) + O_{C^\infty}(h^\infty) \quad \text{pour } x \in [2, 4].$$

Maintenant nous prenons $\mathbf{c}_{+,+} = \mathbf{c}_{+,+}(h)$ comme

$$\mathbf{c}_{+,+}(h) := a(3, h)^{-1}\tilde{a}(3, h)e^{2\pi iI(1+\frac{1}{4\pi^2 h^2})+\frac{\pi}{4}i}.$$

Par (30), (31), (33), et l'unicité des solutions microlocales (théorème 3.1), nous voyons que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{+,+}(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi iI(1+\frac{1}{4\pi^2 h^2})+\frac{\pi}{4}i}\left(1 + r_{+,+}(h)\right), \\ J(b)(x) &= \mathbf{c}_{+,+}(h)a(x)e^{\frac{i}{h}\varphi(x)} + O_{C^\infty}(h^\infty). \end{aligned} \tag{34}$$

où $r_{+,+}$ satisfait $|\partial_h^\beta r_{+,+}(h)| \lesssim h^{1-\beta} \log(1/h)$.

Étape 4 (Recollement). Nous définissons $K_1 = [\frac{2}{3}, 2]$, $K'_1 = [\frac{1}{2}, 4]$, $K_2 = [4, \infty)$, et $K'_2 = [2, \infty)$. Nous prenons $\chi_1, \chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ avec $\chi_j = 1$ sur K_j , $\text{supp } \chi_j \subset K'_j$ ($j = 1, 2$), et $\chi_1 + \chi_2 = 1$ sur $[2, 4]$. Nous définissons

$$u_{+,+}(x) = \chi_1(x)J(b)(x) + \mathbf{c}_{+,+}(h)\chi_2(x)a(x)e^{\frac{i}{h}\varphi(x)}.$$

Par (29) et (34), nous avons $P(h)u_{+,+} = O_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}(h^\infty)$. Ceci achève la construction de $u_{+,+}$.

Étape 5 (Taille L^2). Puisque $|g(x)\varphi'_{\sigma_1, \sigma_2}(x)|^{\frac{1}{2}} \sim |x|^{\frac{1}{2}}(1 + h|x|)^{\frac{1}{2}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_{\sigma_1, \sigma_2}\|_{L^2(\{\sigma_1 x \geq 2\})}^2 &\sim \int_{\sigma_1 x \geq 2} |x|^{-1}(1 + h|x|)^{-1} dx \sim \log(1/h), \\ \|u_{\sigma_1, \sigma_2}\|_{L^2(\{|x| \leq 2\})}^2 &= O(1). \end{aligned}$$

□

3.3 Presque orthogonalité

Enfin, nous montrons que les quasimodes construits ci-dessus sont presque orthogonaux entre eux.

Lemme 3.7 (Presque orthogonalité des quasimodes). *Soit u_{σ_1, σ_2} comme dans la proposition 3.5. Alors,*

$$\langle u_{\sigma_1, \sigma_2}, u_{\sigma'_1, \sigma'_2} \rangle_{L^2} = O(h^\infty)$$

lorsque $(\sigma_1, \sigma_2) \neq (\sigma'_1, \sigma'_2)$.

Démonstration. Il suffit de prouver

$$\langle u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2} = O(h^\infty),$$

puisque le cas $\langle u_{-,+}, u_{-,-} \rangle_{L^2}$ s'ensuit en appliquant la symétrie $x \mapsto -x$. Si $\sigma_1 \neq \sigma'_1$, alors les supports des quasimodes correspondants sont disjoints modulo $O_S(h^\infty)$, et la conclusion est immédiate. Nous considérons donc uniquement $\langle u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2}$.

Étape 1 (Région compacte). Soit $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ satisfaisant

$$\chi_0 = 0 \quad \text{sur } (-\infty, \tfrac{1}{2}], \quad \chi_0 = 1 \quad \text{sur } [\tfrac{2}{3}, 3], \quad \text{supp } \chi_0 \subset (\tfrac{1}{2}, 4).$$

Sur $\text{supp } \chi_0$ nous utilisons les représentations en distribution lagrangienne de (25) :

$$\begin{aligned} u_{+,+}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h}(x\xi - F_{+,+}(\xi))} b_{+,+}(\xi, h) d\xi + O_{C^\infty}(h^\infty), \\ u_{+,-}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h}(x\eta - F_{+,-}(\eta))} b_{+,-}(\eta, h) d\eta + O_{C^\infty}(h^\infty). \end{aligned}$$

Par la proposition 3.5,

$$\text{supp } b_{+,+} \subset \{\xi \geq \xi_0\}, \quad \text{supp } b_{+,-} \subset \{\eta \leq -\xi_0\},$$

donc $|\xi - \eta| \geq 2\xi_0$ sur le support des amplitudes. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle \chi_0 u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi h} \iiint e^{\frac{i}{h}(x(\xi - \eta) - F_{+,+}(\xi) + F_{+,-}(\eta))} \chi_0(x) b_{+,+}(\xi, h) \overline{b_{+,-}(\eta, h)} dx d\xi d\eta \\ &\quad + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Nous intégrons par parties en x en utilisant

$$e^{\frac{i}{h}x(\xi - \eta)} = \frac{h}{i(\xi - \eta)} \partial_x e^{\frac{i}{h}x(\xi - \eta)}.$$

Pour tout N , cela donne

$$|\langle \chi_0 u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2}| \leq C_N h^{N-1} \iint \frac{|b_{+,+}(\xi, h) b_{+,-}(\eta, h)|}{|\xi - \eta|^N} d\xi d\eta + O(h^\infty).$$

En prenant N grand, la dernière intégrale est uniformément bornée puisque $b_{+,+}, b_{+,-} \in S^{-1}$ et $|\xi - \eta| \geq 2\xi_0$. Donc

$$\langle \chi_0 u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2} = O(h^\infty).$$

Étape 2 (Estimation WKB à l'infini). Par la construction de recollement et (29), la partie du terme complémentaire avec $x \leq \frac{2}{3}$ est $O(h^\infty)$. Il reste donc à traiter la région $x \geq 3$, où nous utilisons les représentations WKB (24)

$$u_{+,+}(x) = \mathbf{c}_{+,+}(h) a_{+,+}(x, h) e^{\frac{i}{h}\varphi_{+,+}(x)} + O_S(h^\infty),$$

$$u_{+,-}(x) = \mathfrak{c}_{+,-}(h)a_{+,-}(x, h)e^{\frac{i}{h}\varphi_{+,-}(x)} + O_S(h^\infty).$$

Puisque $\varphi_{+,-} = -\varphi_{+,+}$, nous pouvons définir

$$\psi(x) := \varphi_{+,+}(x) - \varphi_{+,-}(x) = 2\varphi_{+,+}(x).$$

Alors

$$\psi'(x) = 2\sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 h^2 x^2}{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

En particulier,

$$\psi'(x) \sim x^{-1}, \quad 3 \leq x \leq 2/h, \quad \psi'(x) \sim h, \quad x \geq 1/h.$$

De plus, les estimations d'amplitude dans la proposition 3.5, avec la règle de Leibniz, donnent directement

$$\partial_x^k \left(a_{+,+}(x, h) \overline{a_{+,-}(x, h)} \right) = O\left((1 + hx)^{-1} x^{-1-k}\right), \quad x \geq 3.$$

Nous choisissons $\chi_2, \chi_3 \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$, dépendant de h , tels que

$$\chi_2 + \chi_3 = 1 - \chi_0 \quad \text{sur } x \geq 3,$$

avec

$$\text{supp } \chi_2 \subset \{3 \leq x \leq 2/h\}, \quad \text{supp } \chi_3 \subset \{x \geq 1/h\},$$

et avec les bornes usuelles $|\partial_x^k \chi_2| + |\partial_x^k \chi_3| \leq C_k x^{-k}$ sur leurs supports. Puisque les coefficients de connexion dans (24) sont uniformément bornés, il suffit d'estimer

$$I_j := \int e^{\frac{i}{h}\psi(x)} \chi_j(x, h) a_{+,+}(x, h) \overline{a_{+,-}(x, h)} dx, \quad j = 2, 3.$$

Estimation de I_2 . Considérons d'abord I_2 . Sur $\text{supp } \chi_2$, nous avons $\psi'(x) \sim x^{-1}$ et

$$\partial_x^k (\psi'(x)^{-1}) = O(x^{1-k}).$$

Soit $L := \frac{h}{i\psi'(x)} \partial_x$, de sorte que $Le^{\frac{i}{h}\psi} = e^{\frac{i}{h}\psi}$. Si $\alpha_2 := \chi_2 a_{+,+} \overline{a_{+,-}}$ alors des intégrations par parties répétées donnent

$$I_2 = \int e^{\frac{i}{h}\psi} (L^t)^N \alpha_2 dx.$$

Les bornes symboliques ci-dessus impliquent $(L^t)^N \alpha_2 = O(h^N x^{-1})$ sur $3 \leq x \leq 2/h$. Par conséquent

$$|I_2| \leq C_N h^N \int_3^{2/h} \frac{dx}{x} \leq C_N h^N \log(1/h) = O(h^\infty),$$

puisque N est arbitraire.

Estimation de I_3 . Considérons maintenant I_3 . Sur $\text{supp } \chi_3$, nous avons $\psi'(x) \sim h$, et

$$\partial_x^k \left(\frac{h}{\psi'(x)} \right) = O(x^{-k}).$$

De plus, puisque $hx \geq 1$,

$$\partial_x^k \alpha_3 = O(h^{-1} x^{-2-k}), \quad \alpha_3 := \chi_3 a_{+,+} \overline{a_{+,-}}.$$

Pour le même opérateur L que précédemment, nous obtenons $(L^t)^N \alpha_3 = O(h^{-1} x^{-2-N})$. Par conséquent, par intégration par parties, nous obtenons

$$|I_3| \leq C_N h^{-1} \int_{1/h}^{\infty} x^{-2-N} dx \leq C_N h^N.$$

Encore une fois N est arbitraire, donc $I_3 = O(h^\infty)$.

En combinant l'estimation de la région compacte avec les deux arguments WKB, nous obtenons

$$\langle u_{+,+}, u_{+,-} \rangle_{L^2} = O(h^\infty).$$

Le même argument après le changement de variables $x \mapsto -x$ donne $\langle u_{-,+}, u_{-,-} \rangle_{L^2} = O(h^\infty)$. Ceci prouve le lemme. $\square$

Compte tenu de la proposition 3.5(ii), le lemme 3.7 montre aussi que les quatre quasimodes modèles sont linéairement indépendants pour tout h suffisamment petit.

3.4 Valeurs aux limites

Lemme 3.8. *Soit $u = u_{\sigma_1, \sigma_2}$, et notons u_{even} et u_{odd} ses parties paire et impaire. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \sin(2\pi x) \partial_x u_{\text{even}}(x) - (2\pi x \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)) u_{\text{even}}(x) \right) &= \mp \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cos(2\pi x) \partial_x u_{\text{odd}}(x) + (2\pi x \sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)) u_{\text{odd}}(x) \right) &= \pm i \sigma_2 \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}, \\ \lim_{x \rightarrow \sigma} (x - \sigma) \partial_x u_{\sigma_1, \sigma_2}(x, h) &= -\frac{\delta_{\sigma, \sigma_1}}{2\sqrt{\pi h}}, \quad \sigma \in \{\pm\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Observons que $\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x) = 2\pi h \sigma_2 x + O_h(|x|^{-1})$ lorsque $\sigma_1 x \rightarrow \infty$. Par (24) et les définitions de g et $\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}$, nous avons

$$\begin{aligned} u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) &= \begin{cases} \frac{\mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}}{\sqrt{2\pi h}} |x|^{-1} e^{2\pi i \sigma_2 x} + O_h(|x|^{-2}) & (\sigma_1 x \rightarrow \infty), \\ O(|x|^{-\infty}) & (\sigma_1 x \rightarrow -\infty), \end{cases} \\ \partial_x u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) &= \begin{cases} 2\pi i \sigma_2 \frac{\mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}}{\sqrt{2\pi h}} |x|^{-1} e^{2\pi i \sigma_2 x} + O_h(|x|^{-2}) & (\sigma_1 x \rightarrow \infty), \\ O(|x|^{-\infty}) & (\sigma_1 x \rightarrow -\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $|x| \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} u_{\text{even}}(x) &= \frac{\mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}}{2\sqrt{2\pi h}} |x|^{-1} e^{2\pi i \sigma_1 \sigma_2 |x|} + O_h(|x|^{-2}), \\ u_{\text{odd}}(x) &= \frac{\sigma_1 \text{sgn}(x) \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}}{2\sqrt{2\pi h}} |x|^{-1} e^{2\pi i \sigma_1 \sigma_2 |x|} + O_h(|x|^{-2}). \end{aligned}$$

La substitution dans les deux fonctionnelles aux limites donne les deux premiers limites.

Pour la limite $x \rightarrow \sigma$, posons

$$q_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = F_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) - \sigma_1 \xi.$$

La formule explicite (21) donne $q_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = O_h(|\xi|^{-1})$ lorsque $\sigma_2 \xi \rightarrow \infty$. Avec la proposition 3.5, cela donne

$$e^{-\frac{i}{h} q_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi)} b_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi, h) = \frac{1}{\sqrt{2}|\xi|} + O_h(|\xi|^{-2}), \quad \sigma_2 \xi \rightarrow \infty.$$

Ainsi la représentation en distribution lagrangienne (25) peut s'écrire près de $x = \sigma_1$ comme

$$u_{\sigma_1, \sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}|\xi|} + O_h(|\xi|^{-2}) \right) e^{\frac{i}{h}(x - \sigma_1)\xi} d\xi + O_{C^\infty}(h^\infty),$$

avec l'amplitude supportée dans $\{\sigma_2 \xi > 0\}$. Le lemme 2.2 implique alors la limite énoncée en $x = \sigma_1$, tandis que u_{σ_1, σ_2} s'annule près de la dégénérescence opposée. $\square$

3.5 Correction de phase

La formule de connexion (26) détermine une correction de phase réelle. Puisque $r_{+,+}(h) = O(h \log(1/h))$, il existe des uniques fonctions lisses $\varrho(h) > 0$ et $d(h) \rightarrow 0$ telles que

$$1 + r_{+,+}(h) = \varrho(h) e^{\pi i d(h)}. \quad (35)$$

La fonction d satisfait $|\partial_h^\beta d(h)| \lesssim h^{1-\beta} \log(1/h)$. Nous posons

$$\text{BS}(h) = 2I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \right) + \frac{1}{4} + d(h), \quad (36)$$

de sorte que

$$\mathbf{c}_{+,+}(h) = \frac{\varrho(h)}{\sqrt{2}} e^{\pi i \text{BS}(h)}. \quad (37)$$

Le calcul suivant est l'analogie de la première correction dans la règle de Bohr-Sommerfeld à tous les ordres de [5]. La nouvelle caractéristique est que la première intégrale de transport a un terme limite x^{-1} sur $1 \ll x \ll h^{-1}$, produisant une correction de phase $h \log(1/h)$.

Lemme 3.9 (Correction logarithmique au reste de Bohr-Sommerfeld). *La fonction $d(h)$ définie par (35) satisfait*

$$d(h) = -\frac{h}{8\pi} \log(1/h) + O(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (38)$$

Démonstration. Nous isolons la seule contribution au coefficient de connexion qui peut être de taille $h \log(1/h)$. Nous travaillons sur la composante $(+, +)$ et posons

$$c = 2\pi h, \quad G(x, h) := |g(x)\varphi'(x)| = ((x^2 - 1)(1 + c^2 x^2))^{1/2}, \quad a_0 = G^{-1/2}.$$

Par (31),

$$\frac{a_1(x, h)}{a_0(x, h)} = \frac{i}{2} \int_{\infty}^x Q(y, h) dy, \quad Q := \frac{ga_0'' + g'a_0'}{G^{1/2}}. \quad (39)$$

Un calcul direct donne

$$Q(x, h) = -\frac{2c^4 x^4 - 3c^4 x^2 + 6c^2 x^4 - 10c^2 x^2 + 2c^2 + x^2 - 2}{4(x^2 - 1)^{3/2}(1 + c^2 x^2)^{5/2}}. \quad (40)$$

Pour $3 \leq x \leq c^{-1}$ cela implique

$$Q(x, h) = -\frac{1}{4x} + O(x^{-3}) + O(c^2 x),$$

et l'intégrale des deux termes d'erreur sur $[3, c^{-1}]$ est $O(1)$. Sur la région restante $x \geq c^{-1}$, le changement de variables $s = cx$ dans (40) donne

$$\int_{c^{-1}}^{\infty} |Q(x, h)| dx = O(1).$$

Ainsi

$$\int_{\infty}^3 Q(y, h) dy = \frac{1}{4} \log(1/c) + O(1) = \frac{1}{4} \log(1/h) + O(1), \quad (41)$$

car $c = 2\pi h$. En combinant (39) et (41), nous obtenons

$$\frac{a_1(3, h)}{a_0(3, h)} = \frac{i}{8} \log(1/h) + O(1). \quad (42)$$

Le développement de phase stationnaire avec le lemme B.1 implique

$$\tilde{a}(3, h) = \tilde{a}_0(3, h)(1 + h\tilde{A}_1(h) + O(h^2)), \quad \tilde{A}_1(h) = O(1). \quad (43)$$

De plus, par la définition de $\tilde{a}_0$ et le calcul menant à (33), $\tilde{a}_0(3, h) = 2^{-1/2}a_0(3, h)$. Par conséquent, en utilisant (42),

$$\frac{\tilde{a}(3, h)}{a(3, h)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{ih}{8} \log(1/h) + O(h) \right). \quad (44)$$

Par la définition de $\mathbf{c}_{+,+}$, cela signifie que le facteur $1 + r_{+,+}(h)$ dans (26) satisfait

$$1 + r_{+,+}(h) = 1 - \frac{ih}{8} \log(1/h) + O(h). \quad (45)$$

Nous utilisons la branche du logarithme près de 1 et obtenons

$$d(h) = \pi^{-1} \operatorname{Im} \log(1 + r_{+,+}(h)) = -\frac{h}{8\pi} \log(1/h) + O(h),$$

ce qui prouve (38). □

4 Complétude des quasimodes modèles

4.1 Énoncé de complétude

L'objectif principal de cette section est de prouver un énoncé de complétude pour les quatre quasimodes modèles construits précédemment. Nous énonçons d'abord le résultat ; la proposition 4.1 est ensuite prouvée en § 4.5 une fois plusieurs résultats auxiliaires établis.

Proposition 4.1. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant $\|u\|_{L^2} = 1$ et $P(h)u = 0$. Il existe des coefficients $c_{\sigma_1, \sigma_2} = c_{\sigma_1, \sigma_2}(h) \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}} |c_{\sigma_1, \sigma_2}|^2 \sim (\log(1/h))^{-1} \quad (46)$$

et si $v = u - \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}} c_{\sigma_1, \sigma_2} u_{\sigma_1, \sigma_2}$, alors

$$\begin{aligned} v &= O_{\mathcal{S}(\{|x| \geq 2\})}(h^\infty), \\ v &= O_{C^\infty(K)}(h^\infty) \quad \text{pour tout } K \Subset \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \\ v &= O_{H_h^{\frac{1}{2}-\delta}(\mathbb{R})}(h^\infty) \quad \text{pour tout } \delta > 0. \end{aligned}$$

De plus, pour chaque $\sigma \in \{\pm\}$ il existe $a_\sigma^{(0)}(h), a_\sigma^{(1)}(h) = O(h^\infty)$ tels que, localement près de $x = \sigma$,

$$v(x) = a_\sigma^{(0)}(h) \log|x - \sigma| + a_\sigma^{(1)}(h) H(x - \sigma) + O_{H^{\frac{3}{2}-\delta}}(h^\infty) \quad (47)$$

pour tout $\delta > 0$.

4.2 Estimations polynomiales à l'infini

Nous commençons par des estimations polynomiales nécessaires pour justifier la décomposition de Wronskien à l'infini. Puisque le coefficient principal $x^2 - 1$ ne s'annule pas sur $(1, \infty)$, toute solution distributionnelle de $P(h)u = 0$ y est lisse. Pour $x > 1$,

$$P(h)u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2(gu')' = (V_h - 1)u,$$

où $V_h(x) = -4\pi^2 h^2 x^2$.

Lemme 4.2. *Soit $x_0 \in (1, \infty)$. Supposons que $u = u_h \in C^\infty((1, \infty))$ satisfait $P(h)u = 0$ et*

$$|u(x_0)| \leq Ch^{-N}, \quad |u'(x_0)| \leq Ch^{-N}$$

pour un certain $N \geq 0$ et $C > 0$ indépendant de h . Alors, pour tout entier $k \geq 0$, il existe $M_k > 0$ tel que

$$\|u^{(k)}\|_{L^\infty([x_0, \infty))} = O(h^{-M_k}).$$

L'énoncé analogue sur $(-\infty, -x_0]$ s'ensuit par la symétrie $x \mapsto -x$.

Démonstration. Nous définissons, pour $x > 1$, la fonctionnelle d'énergie

$$E(x) := |hu'(x)|^2 + \frac{1 - V_h(x)}{g(x)} |u(x)|^2.$$

En utilisant que $h^2 u'' = -h^2 \frac{g'}{g} u' + \frac{V_h - 1}{g} u$ nous calculons

$$\begin{aligned} E'(x) &= 2\operatorname{Re}(\overline{u'(x)} h^2 u''(x)) + \left(\frac{1 - V_h(x)}{g} \right)' |u(x)|^2 + 2 \frac{1 - V_h}{g} \operatorname{Re}(\overline{u(x)} u'(x)) \\ &= -2h^2 \frac{g'(x)}{g(x)} |u'(x)|^2 + \left(\frac{1 - V_h}{g} \right)' |u(x)|^2. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2 - 1} > 0, \quad \left(\frac{1 - V_h(x)}{g(x)} \right)' = -\frac{2(4\pi^2 h^2 + 1)x}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

pour $x > 1$, nous avons $E'(x) \leq 0$. Ainsi $E(x) \leq E(x_0)$ pour $x \geq x_0$. Puisque $x_0 > 1$,

$$E(x_0) \leq h^2 |u'(x_0)|^2 + C_0 |u(x_0)|^2 = O(h^{-2N}).$$

De plus,

$$\frac{1 - V_h(x)}{g(x)} = \frac{1 + 4\pi^2 h^2 x^2}{x^2 - 1} \geq 4\pi^2 h^2, \quad x \geq x_0.$$

Donc

$$\|u\|_{L^\infty([x_0, \infty))} + \|u'\|_{L^\infty([x_0, \infty))} = O(h^{-N-1}).$$

Il reste à borner les dérivées d'ordre supérieur. Nous écrivons

$$u'' = Au' + Bu, \quad A(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)}, \quad B(x) = \frac{V_h(x) - 1}{h^2 g(x)} = B_0(x) + h^{-2} B_1(x),$$

où

$$B_0(x) = -\frac{4\pi^2 x^2}{x^2 - 1}, \quad B_1(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Toutes les dérivées de A, B_0, B_1 sont bornées sur $[x_0, \infty)$, par conséquent

$$\|B^{(\ell)}\|_{L^\infty([x_0, \infty))} \leq C_\ell h^{-2}.$$

En différenciant $u'' = Au' + Bu$ k fois, nous obtenons

$$u^{(k+2)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (A^{(j)} u^{(k-j+1)} + B^{(j)} u^{(k-j)}).$$

Par récurrence, en partant des bornes pour u et u' , nous obtenons

$$\|u^{(k)}\|_{L^\infty([x_0, \infty))} = O(h^{-M_k})$$

pour certains exposants M_k , par exemple $M_{2m} = M_{2m+1} = N + 1 + 2m$. □

Lemme 4.3. *Supposons que $u = u_h \in L^2(\mathbb{R})$ satisfait $P(h)u = 0$ et*

$$\|u\|_{L^2} \leq Ch^{-M}$$

pour un certain $M \geq 0$ fixé et $C > 0$ indépendant de h . Alors, pour chaque $I \Subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ et $k \in \mathbb{N}_0$, il existe $M_k \geq 0$ tel que

$$\|u^{(k)}\|_{L^\infty(I)} \lesssim h^{-M_k}.$$

Démonstration. Pour k fixé, choisissons une suite suffisamment longue d'intervalles emboîtés relativement compacts, dont les fermetures évitent $\{\pm 1\}$. Sur ces intervalles, $|g|$ est borné loin de zéro. Les estimations elliptiques intérieures standard pour l'opérateur différentiel ordinaire $-\partial_x(g\partial_x)$, avec

$$-\partial_x(g\partial_x)u = (4\pi^2x^2 + h^{-2})u,$$

donnent récursivement

$$\|u\|_{H^{m+2}(I_m)} \leq C_m h^{-2} \|u\|_{H^m(I_{m+1})}.$$

Ainsi $\|u\|_{H^{2r}(I)} \lesssim h^{-M-2r}$ pour tout r fixé, et l'injection de Sobolev unidimensionnelle donne le résultat ; par exemple, on peut prendre $M_k = M + 2[(k+1)/2]$. Dans l'application ci-dessous, $\|u\|_{L^2} = 1$, donc $M = 0$. $\square$

4.3 Estimation radiale

En nous concentrant pour l'instant sur des sous-ensembles compacts fixes de la droite x , l'objet pertinent est le symbole principal semiclassique de $P(h)$, que nous notons

$$p := \sigma_{\text{pr},h}(P(h)) = (x^2 - 1)\xi^2 - 1,$$

et son ensemble caractéristique dans $\overline{T^*\mathbb{R}}$ est $\{\langle \xi \rangle^{-2}p = 0\}$. Dans les démonstrations, nous utiliserons [14, Thm. E.54], l'estimation radiale sous le seuil rappelée ci-dessous, appliquée à un opérateur de la forme

$$P_B(h) := P(h) - h^2 B(h), \quad B(h) \in \Psi_h^0,$$

en un puits radial, et à $-P_B(h)$ en une source radiale. Tous les voisinages introduits dans la suite sont indépendants de h .

Proposition 4.4 (Estimation radiale sous le seuil). *Fixons $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm 1\}$, soit $s < 1/2$, et soit $B(h)$ une famille bornée dans Ψ_h^0 . Supposons que $G_1 \in \Psi_h^0$ soit elliptique près de $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$. Pour tout voisinage V suffisamment petit de $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$ dans $\overline{T^*\mathbb{R}}$ avec $\overline{V} \subset \text{ell}_h(G_1)$, il existe $G, G_0 \in \Psi_h^0$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tels que*

$$\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2} \subset \text{ell}_h(G), \quad \text{WF}_h(G) \subset V, \quad \text{WF}_h(G_0) \subset V \setminus \mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2},$$

et, pour tout $N \geq 0$,

$$\|Gv\|_{H_h^s} \lesssim \|G_0v\|_{H_h^s} + h^{-1} \|G_1 P_B(h)v\|_{H_h^{s-1}} + h^N \|\chi v\|_{H_h^{-N}}, \quad (48)$$

avec une constante indépendante de h et v .

Démonstration. Après localisation près de $x = \sigma_1$, nous étendons l'opérateur à une variété compacte unidimensionnelle. Puisque $h^2 B(h) \in h^2 \Psi_h^0$, nous avons $\sigma_{\text{pr},h}(P_B(h)) = \sigma_{\text{pr},h}(P(h)) = p$. Dans la carte frontière $\sigma_2 \xi > 0$, avec $\rho = (\sigma_2 \xi)^{-1}$, son champ de vecteurs hamiltonien renormalisé est

$$\rho H_p = 2\sigma_2(x^2 - 1)\partial_x + 2\sigma_2 x \rho \partial_\rho.$$

Par conséquent, sa linéarisation en $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2} = \{x = \sigma_1, \rho = 0\}$ est

$$4\sigma_1 \sigma_2 (x - \sigma_1) \partial_x + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \partial_\rho,$$

ce qui est en accord avec (12).

Nous vérifions ensuite la condition de seuil dans [14, (E.4.47)]. Puisque l'opérateur est d'ordre deux, le symbole apparaissant là est

$$\tau_s := \sigma_{\text{pr},h} \left(h^{-1} \text{Im } P_B(h) \right) + \left(s - \frac{1}{2} \right) \frac{H_p \langle \xi \rangle}{\langle \xi \rangle}.$$

Comme $P(h)$ est formellement auto-adjoint,

$$h^{-1} \text{Im } P_B(h) = -h \text{Im } B(h) \in h \Psi_h^0.$$

Donc le premier terme dans $\langle \xi \rangle^{-1} \tau_s$ s'annule à l'infini de la fibre. De plus,

$$\langle \xi \rangle^{-1} \frac{H_p \langle \xi \rangle}{\langle \xi \rangle} = \langle \xi \rangle^{-1} H_p \log \langle \xi \rangle = -\frac{2x \xi^3}{\langle \xi \rangle^3} \rightarrow -2\sigma_1 \sigma_2$$

en $\mathcal{L}_{\sigma_1, \sigma_2}$. Ainsi, en un puits radial, c'est-à-dire dans le cas où $\sigma_1 \sigma_2 = -1$,

$$\langle \xi \rangle^{-1} \tau_s \rightarrow 2 \left(s - \frac{1}{2} \right) < 0.$$

Cela signifie que la condition sous le seuil est satisfaite pour $s < 1/2$, donc [14, Thm. E.54] s'applique. Dans le cas d'une source radiale, en inversant le flot hamiltonien en remplaçant $P_B(h)$ par $-P_B(h)$, on réduit l'estimation au cas du puits. $\square$

Nous utilisons la proposition 4.4 comme suit. Si $v = O_{H_h^{-N_0}}(h^{-M_0})$ sur un voisinage contenant $\text{supp } \chi$ pour certains $M_0, N_0 \geq 0$, et

$$G_0 v = O_{H_h^s}(h^\infty), \quad G_1 P_B(h) v = O_{H_h^{s-1}}(h^\infty),$$

alors $Gv = O_{H_h^s}(h^\infty)$. En effet, pour tout $K > 0$, en prenant $N \geq N_0$ et $N - M_0 \geq K$, le dernier terme dans (48) devient $O(h^K)$.

4.4 Régularité conormale et développement aux limites

Nous écrivons $c = O_{S^m}(h^\infty)$ si, sur le sous-ensemble de la droite ξ considéré,

$$|\partial_\xi^\alpha c(\xi, h)| \leq C_{\alpha N} h^N \langle \xi \rangle^{m-\alpha}, \quad \alpha, N \in \mathbb{N}_0.$$

Proposition 4.5 (Développement conormal). *Fixons $\sigma \in \{\pm\}$. Pour certains $M_0, N_0 \geq 0$, supposons que $v = O_{H_h^{-N_0}}(h^{-M_0})$ localement près de $x = \sigma$ et que $P(h)v = O_S(h^\infty)$. Supposons aussi qu'il existe des voisinages V_{σ_2} de $\mathcal{L}_{\sigma, \sigma_2}$ dans $\overline{T^*\mathbb{R}}$ tels que*

$$\text{WF}_h(v) \cap V_{\sigma_2} \subset \mathcal{L}_{\sigma, \sigma_2}, \quad \sigma_2 \in \{\pm\}.$$

Alors, localement près de $x = \sigma$,

$$v(x) = a_\sigma^{(0)}(h) \log |x - \sigma| + a_\sigma^{(1)}(h) H(x - \sigma) + O_{H^{3/2-\delta}}(h^\infty) \quad (49)$$

pour tout $\delta > 0$, avec $a_\sigma^{(0)}(h), a_\sigma^{(1)}(h) = O(h^\infty)$.

En d'autres termes, la condition sur le front d'onde stipule que $v = O_{C^\infty}(h^\infty)$ microlocalement en chaque point de $V_{\sigma_2} \setminus \mathcal{L}_{\sigma, \sigma_2}$. Compte tenu de $P(h)v = O_S(h^\infty)$, il suffit de vérifier cette condition sur l'ensemble caractéristique de p .

À cette fin, nous adaptons l'argument de régularité de module itéré de [18, Thm. 6.3], puis vérifions les estimations du symbole conormal uniforme directement par transformée de Fourier.

Démonstration. Étape 1 (Module test et ses générateurs). Fixons $\sigma_2 \in \{\pm\}$ et posons

$$N_{\sigma_2}^* \{x = \sigma\} := \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R} \setminus 0 \mid x = \sigma, \sigma_2 \xi > 0\}.$$

Sa fermeture dans $\overline{T^*\mathbb{R}}$ rencontre l'infini de la fibre en $\mathcal{L}_{\sigma, \sigma_2}$. Soit $U_{\sigma_2} \subset T^*\mathbb{R} \setminus 0$ un voisinage conique ouvert de $N_{\sigma_2}^* \{x = \sigma\}$ dont la fermeture, prise dans $T^*\mathbb{R} \setminus 0$, est disjointe de $N_{-\sigma_2}^* \{x = \sigma\}$.

Ici Ψ^m désigne le calcul pseudodifférentiel classique proprement supporté ordinaire, et σ_{pr} désigne son symbole principal homogène. Suivant [18, Def. 6.1], nous introduisons le module test

$$\mathcal{M}_{\sigma, \sigma_2} := \{G \in \Psi^1 \mid \sigma_{\text{pr}}(G)|_{N_{\sigma_2}^* \{x=\sigma\}} = 0\}.$$

Microlocalement dans U_{σ_2} , il est engendré sur Ψ^0 , modulo les opérateurs régularisants, par l'identité et $A = (x - \sigma)D_x$:

$$\mathcal{M}_{\sigma, \sigma_2} = \Psi^0 + \Psi^0 A. \quad (50)$$

Plus précisément, tout $G \in \mathcal{M}_{\sigma, \sigma_2}$ peut s'écrire $G = E_1 A + E_0 + R$ microlocalement dans U_{σ_2} , avec $E_0, E_1 \in \Psi^0$ et $R \in \Psi^{-\infty}$. En effet, par le lemme de Hadamard, nous pouvons factoriser

$$\sigma_{\text{pr}}(G)(x, \xi) = (x - \sigma)\xi g_0(x, \xi),$$

où g_0 est homogène d'ordre zéro. Si $E_1 \in \Psi^0$ satisfait $\sigma_{\text{pr}}(E_1) = g_0$, alors puisque $\sigma_{\text{pr}}(A) = (x - \sigma)\xi$, les opérateurs G et $E_1 A$ ont le même symbole principal microlocalement dans U_{σ_2} . Donc $G - E_1 A \in \Psi^0$ microlocalement dans U_{σ_2} .

Étape 2 (Régularité itérée). Choisissons $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ égal à un près de σ et supporté suffisamment près de σ , et posons $w = \chi v$. L'hypothèse et la régularité elliptique semiclassique impliquent $v = O_{C^\infty}(h^\infty)$ près de $\text{supp } \chi'$ et donc

$$P(h)w = f_h := \chi P(h)v + [P(h), \chi]v = O_{C^\infty}(h^\infty), \quad \text{WF}_h(w) \subset \mathcal{L}_{\sigma, +} \cup \mathcal{L}_{\sigma, -}.$$

Un tel choix de χ est possible car les deux courbes caractéristiques de p au-dessus de x proche de σ se trouvent dans $V_+ \cup V_-$, et p est elliptique en tous les autres points là.

En écrivant $Q_h(x) = -1 - 4\pi^2 h^2 x^2$, nous calculons

$$[P(h), A] = -\frac{2i\sigma}{x+\sigma}P(h) + \frac{2h^2\sigma}{x+\sigma}A + iR_{\sigma,h}, \quad (51)$$

où $R_{\sigma,h} = 2\sigma Q_h/(x+\sigma) + (x-\sigma)Q'_h$ est un opérateur de multiplication uniformément borné près de $x = \sigma$. En itérant cette identité, nous obtenons, pour $k \geq 1$,

$$(P(h) - h^2 B_k)A^k = D_k P(h) + \sum_{j=0}^{k-1} R_{kj}(h)A^j, \quad B_k(x) = \frac{2k\sigma}{x+\sigma}, \quad (52)$$

localement près de $x = \sigma$. Ici D_k est un opérateur différentiel d'ordre k et les $R_{kj}(h)$ sont des opérateurs uniformément bornés d'ordre zéro.

Dans ce calcul, les k occurrences du terme $2h^2\sigma/(x+\sigma)A$ dans (51) produisent le coefficient $B_k = 2k\sigma/(x+\sigma)$ devant A^k . La commutation de A avec ce coefficient ne produit que des facteurs d'ordre zéro, et les termes impliquant $R_{\sigma,h}$ contiennent déjà moins de k puissances de A . Ainsi tous les termes restants impliquent bien A^j avec $j < k$.

Fixons $s < 1/2$. Pour $k = 0$, la proposition 4.4 avec $B = 0$ implique $w = O_{H_h^s}(h^\infty)$ aux deux points radiaux. Supposons que les estimations correspondantes tiennent pour $A^j w$, $j < k$. Par (52),

$$(P(h) - h^2 B_k)A^k w = O_{H_h^{s-1}}(h^\infty)$$

microlocalement près de l'un ou l'autre point radial. Soit G_1 supporté là où ces estimations en nombre fini tiennent. La borne a priori implique

$$A^k w = O_{H_h^{-N_0-k}}(h^{-M_0-k}),$$

puisque hA a un ordre différentiel semiclassique un. De plus, $G_0 A^k w = O_{H_h^s}(h^\infty)$, car $\text{WF}_h(A^k w) \subset \text{WF}_h(w)$ et le microsupport de G_0 évite les points radiaux. En appliquant la proposition 4.4 directement à $P(h) - h^2 B_k$, nous achevons l'induction. En utilisant un argument de partition microlocale de l'unité et en appliquant les estimations loin des points radiaux, nous obtenons

$$A^k w = O_{H_h^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})}(h^\infty), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon > 0. \quad (53)$$

Puisque $[A, E] \in \Psi^0$ pour $E \in \Psi^0$, par utilisation répétée de (50) nous pouvons exprimer chaque produit fini d'opérateurs de module comme une somme de $E_j A^j$, $E_j \in \Psi^0$, modulo des termes régularisants. Ainsi les estimations de régularité itérée correspondantes tiennent aussi. Les termes régularisants sont $O_{C^\infty}(h^\infty)$ par (53).

Étape 3 (Représentation par intégrale oscillatoire). Nous utilisons la caractérisation de Melrose des distributions conormales par régularité itérée, dans la formulation de [24, Vol. IV, Def. 25.1.1 and

Prop. 25.1.3].

Pour chaque h fixé, par régularité elliptique loin de $x = \sigma$ combinée à (53) et (50), w est conormale à $\{x = \sigma\}$. Elle a donc une représentation par intégrale oscillatoire avec phase $(x - \sigma)\eta$. Nous voulons maintenant en déduire des informations plus précises sur la dépendance en h .

Posons $y = x - \sigma$, $w_\sigma(y, h) = w(\sigma + y, h)$, et soit

$$\tilde{a}(\eta, h) = \mathcal{F}_y w_\sigma(\eta, h)$$

sa transformée de Fourier (ordinaire). Puisque

$$\mathcal{F}_y(y D_y w_\sigma) = i(\eta \partial_\eta + 1)\tilde{a},$$

les estimations (53) contrôlent des puissances arbitraires de $\eta \partial_\eta$ appliquées à $\tilde{a}$. Plus précisément, sur une région dyadique $r \leq |\eta| \leq 2r$, $r \geq 1$, nous avons

$$\partial_\eta^\alpha = \eta^{-\alpha} P_\alpha(\eta \partial_\eta)$$

pour un polynôme P_α . Après le changement d'échelle $\eta = r\theta$, en utilisant l'injection de Sobolev unidimensionnelle sur la région fixe $1 \leq |\theta| \leq 2$, pour $s \geq 0$, nous obtenons donc

$$\sup_{r \leq |\eta| \leq 2r} |\partial_\eta^\alpha \tilde{a}(\eta, h)| \lesssim r^{-s-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\alpha+1} \|(y D_y)^j w_\sigma\|_{H^s}.$$

En effet, le poids H^s contribue r^{-s} , il y a un facteur supplémentaire $r^{-\alpha}$ dû à $\eta^{-\alpha}$, et la remise à l'échelle de la norme L^2 produit un facteur $r^{-1/2}$.

Soit $s = 1/2 - \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon < 1/2$. Puisque

$$\|(y D_y)^j w_\sigma\|_{H^s} \lesssim h^{-s} \|A^j w\|_{H_h^s} = O(h^\infty),$$

nous obtenons

$$\tilde{a} = O_{S^{-1+\varepsilon}}(h^\infty)$$

pour $|\eta| \geq 1$. Sur des intervalles bornés de η , la même conclusion s'ensuit du support compact de w_σ et de la borne $O_{H^s}(h^\infty)$.

Nous passons maintenant aux variables de Fourier semiclassiques. Fixons $R \geq 1$ et diminuons h_0 de sorte que $2\pi h_0 < R/2$. Choisissons $\theta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ tels que

$$\text{supp } \theta_\pm \subset \{\pm \xi \geq R\}, \quad \theta_\pm = 1 \text{ sur } \{\pm \xi \geq 2R\}.$$

Définissons

$$a_{\sigma_2}(\xi, h) := \theta_{\sigma_2}(\xi) h^{-1/2} \tilde{a}(\xi/h, h).$$

Pour $m = -1 + \varepsilon$ et $|\xi| \geq R$, l'amplitude avant multiplication par θ_{σ_2} satisfait

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^{-m+\alpha} \left| \partial_\xi^\alpha (h^{-1/2} \tilde{a}(\xi/h, h)) \right| &= h^{-1/2-\alpha} \langle \xi \rangle^{-m+\alpha} \left| (\partial_\eta^\alpha \tilde{a})(\xi/h, h) \right| \\ &\lesssim h^{-1/2-m} \sup_\eta \langle \eta \rangle^{-m+\alpha} |\partial_\eta^\alpha \tilde{a}(\eta, h)|. \end{aligned}$$

Puisque $-1/2 - m = 1/2 - \varepsilon$, la puissance fixe de h est absorbée par la borne $O(h^\infty)$. En appliquant la règle de Leibniz à la coupure fixe θ_{σ_2} , nous concluons que

$$a_{\sigma_2} = O_{S^{-1+\varepsilon}}(h^\infty).$$

La partie non captée par $\theta_+ + \theta_-$ est supportée dans la région fixe $|\xi| \leq 2R$. Sa transformée de Fourier semiclassique inverse est obtenue en appliquant à w un multiplicateur de Fourier semiclassique de symbole supporté dans $|\xi| \leq 2R$. Puisque $w = O_{H_h^s}(h^\infty)$, la fonction résultante est $O_{C^\infty}(h^\infty)$: chaque dérivée en x introduit au plus une puissance fixe de h^{-1} , qui est absorbée par l'estimation $O(h^\infty)$. Par conséquent, près de $x = \sigma$,

$$w = v_+ + v_- + O_{C^\infty}(h^\infty),$$

où

$$v_{\sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h}(x-\sigma)\xi} a_{\sigma_2}(\xi, h) d\xi, \quad a_{\sigma_2} = O_{S^{-1+\varepsilon}}(h^\infty), \quad (54)$$

et $\text{supp } a_{\sigma_2} \subset \{\sigma_2 \xi \geq R\}$.

Étape 4 (Phase exacte et équation de transport). Posons $q_{\sigma, \sigma_2}(\xi) = F_{\sigma, \sigma_2}(\xi) - \sigma \xi$. La formule explicite (21) implique

$$|\partial_\xi^j q_{\sigma, \sigma_2}(\xi, h)| \leq C_j \langle \xi \rangle^{-1-j}, \quad \sigma_2 \xi \geq R, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (55)$$

uniformément pour $0 < h \leq h_0$. En particulier, $|\partial_\xi^\alpha e^{iq_{\sigma, \sigma_2}/h}| \lesssim_\alpha h^{-\alpha} \langle \xi \rangle^{-\alpha}$. Par la règle de Leibniz, la multiplication par ce facteur préserve $O_{S^m}(h^\infty)$. Donc

$$\begin{aligned} v_{\sigma_2} &= J_{\sigma, \sigma_2}(b_{\sigma_2}), \quad b_{\sigma_2} = e^{iq_{\sigma, \sigma_2}/h} a_{\sigma_2} = O_{S^{-1+\varepsilon}}(h^\infty), \\ J_{\sigma, \sigma_2}(b)(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h}(x\xi - F_{\sigma, \sigma_2}(\xi))} b(\xi, h) d\xi. \end{aligned} \quad (56)$$

Nous utilisons maintenant l'équation de transport de l'étape 1 de la démonstration de la proposition 3.5. Posons $c = 2\pi h$ et

$$\alpha_{\sigma, \sigma_2}(\xi) := \partial_x p_h(F'_{\sigma, \sigma_2}(\xi), \xi) = 2\sigma \sqrt{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - c^2)}, \quad \mathcal{L}_{H_{p_h}} b := \alpha_{\sigma, \sigma_2} b' + \frac{1}{2} \alpha'_{\sigma, \sigma_2} b.$$

Nous avons $\mathcal{F}_h v_{\sigma_2} = \theta_{\sigma_2} \mathcal{F}_h w$ par construction et $\mathcal{F}_h f_h = O_{S^{-\infty}}(h^\infty)$ par la borne sur f_h . La commutation de $\mathcal{F}_h P(h) \mathcal{F}_h^{-1}$ avec θ_{σ_2} ne produit que des termes supportés dans $R \leq |\xi| \leq 2R$, où l'amplitude de Fourier et toutes ses dérivées sont $O(h^\infty)$. En utilisant $\mathcal{F}_h v_{\sigma_2} = e^{-iF_{\sigma, \sigma_2}/h} b_{\sigma_2}$ dans l'identité de transport, nous obtenons donc

$$ih \mathcal{L}_{H_{p_h}} b_{\sigma_2} - h^2 \partial_\xi \left((\xi^2 - c^2) \partial_\xi b_{\sigma_2} \right) = O_{S^{-\infty}}(h^\infty).$$

Puisque $\partial_\xi((\xi^2 - c^2) \partial_\xi)$ préserve chaque classe de symboles S^m , nous concluons que

$$\mathcal{L}_{H_{p_h}} b_{\sigma_2} = O_{S^{-1+\varepsilon}}(h^\infty). \quad (57)$$

Soit $\mathcal{G}_{\sigma, \sigma_2} = |\alpha_{\sigma, \sigma_2}|$. Puisque $\text{sgn } \alpha_{\sigma, \sigma_2} = \sigma$ sur $\sigma_2 \xi \geq R$,

$$\mathcal{L}_{H_{p_h}} b = \sigma \mathcal{G}_{\sigma, \sigma_2}^{1/2} \partial_\xi (\mathcal{G}_{\sigma, \sigma_2}^{1/2} b).$$

Comme $\mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{-1/2} \in S^{-1}$, (57) implique

$$\partial_\xi(\mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{1/2} b_{\sigma_2}) = O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty).$$

Puisque $\varepsilon < 1$, cela est intégrable dans chacune des régions $\sigma_2 \xi \geq R$. Soit $\gamma_{\sigma_2}(h)$ la limite de $\mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{1/2} b_{\sigma_2}$ lorsque $\sigma_2 \xi \rightarrow \infty$. En évaluant en un point fixe et en intégrant la dérivée à l'infini, on montre que $\gamma_{\sigma_2}(h) = O(h^\infty)$. En intégrant plutôt de ξ à l'infini, on prouve

$$b_{\sigma_2}(\xi, h) = \gamma_{\sigma_2}(h) \mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}(\xi, h)^{-1/2} + O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty). \quad (58)$$

Ainsi l'équation de transport détermine le terme dominant et améliore le reste à l'ordre $-2 + \varepsilon$.

Étape 5 (Termes logarithmiques et de Heaviside). Par (58), après être revenu de la phase exacte à la phase homogène $(x - \sigma)\xi$, l'amplitude dans la région $\sigma_2 \xi \geq R$ est

$$\gamma_{\sigma_2}(h) e^{-iq_{\sigma,\sigma_2}/h} \mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{-1/2} + O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty).$$

À l'infini de la fibre,

$$\mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{-1/2} - 2^{-1/2} |\xi|^{-1} \in S^{-3}.$$

De plus, par (55),

$$|\partial_\xi^\alpha (e^{-iq_{\sigma,\sigma_2}/h} - 1)| \lesssim_\alpha h^{-1-\alpha} \langle \xi \rangle^{-1-\alpha}, \quad \sigma_2 \xi \geq R.$$

Puisque $\gamma_{\sigma_2}(h) = O(h^\infty)$, toutes les puissances fixes de h^{-1} sont sans conséquence. Par conséquent,

$$\gamma_{\sigma_2}(h) e^{-iq_{\sigma,\sigma_2}/h} \mathcal{G}_{\sigma,\sigma_2}^{-1/2} = 2^{-1/2} \gamma_{\sigma_2}(h) |\xi|^{-1} + O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty)$$

pour $\sigma_2 \xi \geq R$.

En combinant les contributions de $\sigma_2 = +$ et $\sigma_2 = -$, l'amplitude dominante peut s'écrire comme

$$\theta_\infty(\xi) \left(\gamma_\sigma^{(0)}(h) |\xi|^{-1} + \gamma_\sigma^{(1)}(h) \xi^{-1} \right), \quad \theta_\infty = \theta_+ + \theta_-,$$

où

$$\gamma_\sigma^{(0)} = 2^{-3/2} (\gamma_+ + \gamma_-), \quad \gamma_\sigma^{(1)} = 2^{-3/2} (\gamma_+ - \gamma_-).$$

Les termes supportés dans les régions $R \leq |\xi| \leq 2R$ ont des amplitudes qui sont $O(h^\infty)$ avec toutes leurs dérivées, et leurs transformées de Fourier semiclassiques inverses sont donc $O_{C^\infty}(h^\infty)$.

Puisque $\theta_\infty = 1$ pour $|\xi| \geq 2R$, modifier $\theta_\infty |\xi|^{-1}$ ou $\theta_\infty \xi^{-1}$ aux fréquences bornées ne change leurs transformées de Fourier inverses que par une fonction lisse. En utilisant une variante remise à l'échelle des identités pour les transformées de Fourier inverses de $|\xi|^{-1}$ et ξ^{-1} , nous obtenons, pour $y = x - \sigma$,

$$\mathcal{F}_h^{-1}(\theta_\infty |\xi|^{-1}) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi h}} \log |y| + r_0(y; h),$$

et

$$\mathcal{F}_h^{-1}(\theta_\infty \xi^{-1}) = \frac{i\pi}{\sqrt{2\pi h}} \operatorname{sgn}(y) + r_1(y; h),$$

où $r_0(\cdot; h)$ et $r_1(\cdot; h)$ sont lisses près de $y = 0$. Leurs semi-normes locales C^k ont une croissance au plus polynomiale et logarithmique en h^{-1} . Puisque $\gamma_\sigma^{(0)}, \gamma_\sigma^{(1)} = O(h^\infty)$, les termes lisses correspondants sont $O_{C^\infty}(h^\infty)$.

En utilisant $\text{sgn}(y) = 2H(y) - 1$, la partie singulière est donc

$$a_\sigma^{(0)}(h) \log |y| + a_\sigma^{(1)}(h)H(y),$$

où

$$a_\sigma^{(0)}(h) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi h}}\gamma_\sigma^{(0)}(h), \quad a_\sigma^{(1)}(h) = \frac{2i\pi}{\sqrt{2\pi h}}\gamma_\sigma^{(1)}(h).$$

En particulier,

$$a_\sigma^{(0)}(h), a_\sigma^{(1)}(h) = O(h^\infty).$$

Le terme constant provenant de $\text{sgn}(y) = 2H(y) - 1$ est lisse et est absorbé dans le reste $O_{C^\infty}(h^\infty)$.

Il reste à considérer la transformée de Fourier inverse du reste $O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty)$. Soit $r = O_{S^{-2+\varepsilon}}(h^\infty)$. Pour $0 \leq s < 3/2 - \varepsilon$, Plancherel semiclassique donne

$$\|\mathcal{F}_h^{-1}r\|_{H^s} \lesssim h^{-s} \|\langle \xi \rangle^s r\|_{L_\xi^2} = O(h^\infty),$$

puisque $\langle \xi \rangle^{s-2+\varepsilon} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $s < \frac{3}{2} - \varepsilon$.

Étant donné $0 < \delta < 3/2$, nous prenons $s = 3/2 - \delta$ et $0 < \varepsilon < \min(\delta, 1/2)$. Ceci prouve (49). Le cas $\delta \geq 3/2$ s'ensuit des inclusions de Sobolev correspondantes. $\square$

4.5 Démonstration de la complétude

Nous avons maintenant tous les ingrédients en main pour prouver la proposition 4.1.

Démonstration de la proposition 4.1. Par les lemmes 4.2 et 4.3, toutes les dérivées de u sont polynomialement bornées en h^{-1} sur les deux demi-droites extérieures. Il en va de même pour les quasimodes modèles, par la représentation WKB (24) et les estimations symboliques de la proposition 3.5(i).

Sur $[2, \infty)$, posons $W_0 = W_h(u_{+,+}, u_{+,-})$. En utilisant (24), les symétries de conjugaison de la démonstration de la proposition 3.5, et la définition de W_h , nous calculons

$$W_0(3) = |\mathfrak{c}_{+,+}|^2 g(3) \left(h(a_{+,+} \overline{a'_{+,+}} - a'_{+,+} \overline{a_{+,+}}) - 2i\varphi'_{+,+} |a_{+,+}|^2 \right)_{x=3} + O(h^\infty).$$

En $x = 3$, la proposition 3.5(i) implique $a_{+,+} = a_0 + O(h \log(1/h))$, également après une dérivée en x , où $a_0 = |g\varphi'_{+,+}|^{-1/2}$. De plus, (26) implique $|\mathfrak{c}_{+,+}|^2 = 1/2 + O(h \log(1/h))$. Puisque $g\varphi'_{+,+} a_0^2 = 1$ en ce point,

$$W_0(3) = -i + O(h \log(1/h)).$$

L'identité de Wronskien (19) et l'estimation résiduelle (23) impliquent $W'_0 = O_S(h^\infty)$ sur $[2, \infty)$. Par conséquent,

$$\sup_{x \geq 2} |W_0(x) - W_0(3)| \leq \int_2^\infty |W'_0(t)| dt = O(h^\infty),$$

donc W_0 est uniformément borné loin de zéro pour h petit.

Définissons

$$c_{+,+}(x, h) = \frac{W_h(u, u_{+,-})(x)}{W_0(x)}, \quad c_{+,-}(x, h) = -\frac{W_h(u, u_{+,+})(x)}{W_0(x)}.$$

Par la règle de Cramer, nous obtenons $u = c_{+,+}(x, h)u_{+,+} + c_{+,-}(x, h)u_{+,-}$, initialement avec des coefficients de croissance au plus polynomiale en x et h^{-1} . En différenciant ces formules et en utilisant (19), $P(h)u = 0$, et (23), nous obtenons

$$\partial_x c_{+,+}, \partial_x c_{+,-} = O_{S([2,\infty))}(h^\infty).$$

Par exemple,

$$h\partial_x c_{+,+} = -\frac{uP(h)u_{+,-}}{W_0} - hc_{+,+}\frac{W'_0}{W_0},$$

et les deux termes sont des restes de Schwartz par les bornes polynomiales ci-dessus.

En intégrant à partir de $x = 3$, nous obtenons que les coefficients sont uniformément polynomialement bornés en h^{-1} et ont des limites $c_{+,\sigma_2}(h)$ à l'infini. En intégrant de x à l'infini, nous obtenons

$$c_{+,\sigma_2}(x, h) - c_{+,\sigma_2}(h) = O_{S([2,\infty))}(h^\infty), \quad \sigma_2 \in \{\pm\}. \quad (59)$$

En multipliant par les quasimodes modèles, nous obtenons

$$u = c_{+,+}(h)u_{+,+} + c_{+,-}(h)u_{+,-} + O_{S([2,\infty))}(h^\infty).$$

L'argument analogue sur $(-\infty, -2]$ nous permet de construire $c_{-,+}(h), c_{-,-}(h)$.

Ainsi le reste v dans la proposition 4.1 satisfait

$$P(h)v = O_{S(\mathbb{R})}(h^\infty), \quad v = O_{S(\{|x|\geq 2\})}(h^\infty). \quad (60)$$

En partant de (60), nous appliquons la propagation des singularités pour les opérateurs de type principal réel [14, Thm. E.47] le long de segments bicaractéristiques finis de p .

Sur chaque intervalle extérieur compact, les deux courbes caractéristiques se connectent à la région où le reste est déjà contrôlé.

Avec la régularité elliptique semiclassique [14, Thm. E.33], cela prouve $v = O_{C^\infty(K)}(h^\infty)$ pour tout $K \Subset \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

En particulier, dans des voisinages fixes suffisamment petits des points radiaux, $\text{WF}_h(v)$ ne contient aucun point autre que les points radiaux eux-mêmes. Ainsi, nous pouvons appliquer les propositions 4.4 et 4.5 : la première établit l'estimation $H_h^{1/2-\delta}$ aux points radiaux, et la seconde donne (47). En utilisant une partition microlocale de l'unité, combinée à l'estimation de Schwartz extérieure (60), nous obtenons

$$v = O_{H_h^{1/2-\delta}(\mathbb{R})}(h^\infty), \quad \delta > 0.$$

Enfin, la proposition 3.5(ii) et le lemme 3.7 impliquent

$$\left\| \sum_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} u_{\sigma_1, \sigma_2} \right\|_{L^2}^2 \sim \log(1/h) \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |c_{\sigma_1, \sigma_2}|^2.$$

Puisque $v = O_{L^2}(h^\infty)$ et $\|u\|_{L^2} = 1$, cela prouve (46). $\square$

5 Quantification de Bohr-Sommerfeld et loi de Weyl logarithmique

Théorème 5.1. *Les valeurs propres positives suffisamment grandes de P_{sa} sont simples et peuvent être numérotées E_n , $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $n \gg 1$, de sorte que*

$$\text{BS}(E_n^{-1/2}) = n + O(E_n^{-\infty}), \quad (61)$$

où nous rappelons que la fonction BS est définie en (36).

5.1 Équations aux limites

Nous imposons maintenant les conditions aux limites caractérisant l'extension auto-adjointe P_{sa} .

Proposition 5.2. *Soient $c_{\sigma_1, \sigma_2} \in \mathbb{C}$ non tous nuls et supposons que*

$$u - \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}} c_{\sigma_1, \sigma_2} u_{\sigma_1, \sigma_2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Alors $u \in D(P_{\text{sa}})$ si et seulement si $\text{BS}(h) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et

$$(c_{+,+}, c_{+,-}, c_{-,+}, c_{-,-}) \in \begin{cases} \mathbb{C}(1, -1, -1, 1), & \text{BS}(h) \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{C}(1, -1, 1, -1), & \text{BS}(h) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (62)$$

En particulier, un vecteur de coefficients admissible non nul existe si et seulement si $\text{BS}(h) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Toute fonction de Schwartz satisfait les quatre conditions aux limites, donc le lemme 3.8 montre que $u \in D(P_{\text{sa}})$ est équivalent à

$$\begin{aligned} c_{+,+} + c_{+,-} &= 0, & c_{-,+} + c_{-,-} &= 0, \\ \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} &= 0, & \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sigma_2 \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Posons $A = c_{+,+}$ et $B = c_{-,+}$. De la première ligne nous obtenons $c_{+,-} = -A$ et $c_{-,-} = -B$. En écrivant $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{+,+}$ et en utilisant les symétries de (26), la seconde ligne devient

$$(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})(A - B) = 0, \quad (\mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}})(A + B) = 0.$$

Une solution non nulle existe précisément lorsque $\mathbf{c} \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, ce qui, par (37), est équivalent à $\text{BS}(h) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Si $\text{BS}(h) \in \mathbb{Z}$, alors $\mathbf{c}$ est réel et le système force $B = -A$; si $\text{BS}(h) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, alors $\mathbf{c}$ est purement imaginaire et nous obtenons $B = A$ à la place. Ce sont exactement les deux droites de (62). $\square$

Proposition 5.3. Soit $u \in D(P_{\text{sa}})$ une fonction propre normalisée satisfaisant $P(h)u = 0$, et soient $c_{\sigma_1, \sigma_2}(h)$ les coefficients donnés par la proposition 4.1. Alors

$$\begin{aligned} c_{+,+} + c_{+,-} &= O(h^\infty), & c_{-,+} + c_{-,-} &= O(h^\infty), \\ \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \mathfrak{c}_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} &= O(h^\infty), & \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sigma_2 \mathfrak{c}_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} &= O(h^\infty). \end{aligned} \quad (64)$$

Par conséquent, $\text{BS}(h) = n + O(h^\infty)$ pour un unique $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Les deux premières équations s'ensuivent en comparant les coefficients logarithmiques aux limites en $x = \pm 1$: le lemme 3.8 donne ceux des quasimodes modèles, tandis que (47) montre que le reste ne contribue qu'à $O(h^\infty)$. Les deux autres équations s'ensuivent des conditions aux limites à l'infini, puisque le reste y est $O_S(h^\infty)$.

Par (26), $\mathfrak{c}_{+,-} = \mathfrak{c}_{-,+} = \overline{\mathfrak{c}_{+,+}}$, $\mathfrak{c}_{-,-} = \mathfrak{c}_{+,+}$ et $\mathfrak{c}_{+,+} = 2^{-1/2} \varrho(h) e^{\pi i \text{BS}(h)}$, où $\varrho(h) > 0$ et $\varrho(h) = 1 + O(h \log(1/h))$. La première ligne de (64) implique $c_{+,-} = -c_{+,+} + O(h^\infty)$ et $c_{-,-} = -c_{-,+} + O(h^\infty)$. La substitution dans la seconde ligne donne

$$\begin{aligned} (\mathfrak{c}_{+,+} - \overline{\mathfrak{c}_{+,+}})(c_{+,+} - c_{-,+}) &= O(h^\infty), \\ (\mathfrak{c}_{+,+} + \overline{\mathfrak{c}_{+,+}})(c_{+,+} + c_{-,+}) &= O(h^\infty). \end{aligned}$$

En multipliant par les facteurs complémentaires et en ajoutant et soustrayant, nous obtenons

$$(\mathfrak{c}_{+,+}^2 - \overline{\mathfrak{c}_{+,+}}^2)c_{+,+} = O(h^\infty), \quad (\mathfrak{c}_{+,+}^2 - \overline{\mathfrak{c}_{+,+}}^2)c_{-,+} = O(h^\infty).$$

Par (46) et la première ligne de (64), $|c_{+,+}| + |c_{-,+}| \gtrsim (\log(1/h))^{-1/2}$. Donc

$$\mathfrak{c}_{+,+}^2 - \overline{\mathfrak{c}_{+,+}}^2 = i \varrho(h)^2 \sin(2\pi \text{BS}(h)) = O(h^\infty).$$

Les zéros du sinus sont simples, ce qui prouve l'assertion. □

5.2 Localisation spectrale

Lemme 5.4. Supposons qu'il existe $u \in D(P_{\text{sa}})$ tel que

$$P(h)u = O_{L^2}(h^\infty), \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim 1.$$

Alors il existe $E(h) \in \sigma(P_{\text{sa}})$ tel que $E(h) - h^{-2} = O(h^\infty)$.

Démonstration. Par le théorème spectral,

$$\text{dist}(h^{-2}, \sigma(P_{\text{sa}})) \|u\|_{L^2} \leq \|(P_{\text{sa}} - h^{-2})u\|_{L^2} = h^{-2} \|P(h)u\|_{L^2} = O(h^\infty).$$

Puisque le spectre est fermé, on peut choisir $E(h) \in \sigma(P_{\text{sa}})$ réalisant cette distance. □

Théorème 5.5. Rappelons que $\text{BS}(h)$ est définie en (36). Si $\text{BS}(h) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, alors, pour tout $N > 0$ et tout $h > 0$ suffisamment petit, l'intervalle

$$(h^{-2} - h^N, h^{-2} + h^N)$$

contient une valeur propre de P_{sa} .

Démonstration. Par la proposition 5.2, il existe un vecteur de coefficients non nul pour lequel

$$u = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1, \sigma_2} u_{\sigma_1, \sigma_2} \in D(P_{\text{sa}}).$$

Par la proposition 3.5, $P(h)u = O_S(h^\infty)$, et la proposition 3.5(ii) avec le lemme 3.7,

$$\|u\|_{L^2}^2 \sim \log(1/h) \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |c_{\sigma_1, \sigma_2}|^2.$$

Compte tenu du lemme 5.4, cela prouve l'assertion. $\square$

Lemme 5.6. *Pour $h > 0$ suffisamment petit,*

$$-\text{BS}'(h) \sim h^{-2} \log(1/h). \quad (65)$$

En particulier, BS est strictement décroissante. Si $\text{BS}(h) = n$ et $\text{BS}(h') = n'$ pour des $n, n' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ distincts, avec $h \sim h'$, alors

$$|h - h'| \gtrsim h^2 (\log(1/h))^{-1}. \quad (66)$$

Démonstration. Pour $a \geq 4$, découpons

$$I'(a) = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x^2 + a - 1}}$$

sur $[1, 2]$, $[2, \sqrt{a}]$ et $[\sqrt{a}, \infty)$. Les première et troisième intégrales sont $O(a^{-1/2})$, tandis que sur $[2, \sqrt{a}]$ l'intégrande est $\sim (\sqrt{a}x)^{-1}$. Donc

$$I'(a) \sim a^{-1/2} \log a.$$

Pour $a(h) = 1 + (4\pi^2 h^2)^{-1}$, nous avons

$$\text{BS}'(h) = 2I'(a(h))a'(h) + d'(h).$$

Puisque $a'(h) = -(2\pi^2)^{-1}h^{-3}$ et $d'(h) = O(\log(1/h))$, nous concluons (65). L'estimation de séparation s'ensuit du théorème de la moyenne, de la borne supérieure dans (65), et de $|n - n'| \geq 1/2$. $\square$

Lemme 5.7. *Les quasimodes modèles peuvent être choisis de sorte que*

$$u_{\sigma_1, \sigma_2} \in C^1((0, h_0); L^2(\mathbb{R})), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}.$$

De plus, il existe $C, M > 0$ tels que

$$\|\partial_h u_{\sigma_1, \sigma_2}(h)\|_{L^2} \leq Ch^{-M}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}. \quad (67)$$

Démonstration. Les coefficients de transport et leurs dérivées en h satisfont les estimations symboliques des lemmes B.1 et B.2; les sommes de Borel peuvent être choisies avec la même propriété. Pour la représentation près de $x = \sigma_1$, écrivons $F_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = \sigma_1 \xi + q_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi)$ et $\tilde{b} = e^{-iq_{\sigma_1, \sigma_2}/h} b_{\sigma_1, \sigma_2}$. Si

$$\mathcal{F}_h^{-1}a(y) = (2\pi h)^{-1/2} \int e^{iy\xi/h} a(\xi, h) d\xi,$$

alors l'intégration par parties donne

$$\partial_h \mathcal{F}_h^{-1} a = \mathcal{F}_h^{-1} \left(\partial_h a + h^{-1} \partial_\xi (\xi a) - \frac{1}{2h} a \right).$$

Par Plancherel, les estimations symboliques pour q_{σ_1, σ_2} et b_{σ_1, σ_2} impliquent donc une borne L^2 polynomiale.

Sur la région WKB, la différenciation directe donne

$$\partial_h \left(\mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2} a e^{i\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}/h} \right) = e^{i\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}/h} \left(\mathbf{c}'_{\sigma_1, \sigma_2} a + \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2} \partial_h a + i \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2} a \frac{h \partial_h \varphi_{\sigma_1, \sigma_2} - \varphi_{\sigma_1, \sigma_2}}{h^2} \right).$$

Par la formule pour $\mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}$, $|\partial_h \mathbf{c}_{\sigma_1, \sigma_2}| \leq Ch^{-M_1}$ pour un certain M_1 , tandis que la formule pour $\varphi_{\sigma_1, \sigma_2}$ implique

$$|h \partial_h \varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x) - \varphi_{\sigma_1, \sigma_2}(x)| \lesssim L_h(x), \quad \sigma_1 x \geq 2,$$

et les estimations de la définition 3.4 impliquent alors une borne L^2 polynomiale pour les trois termes. Les coupures de recollement sont indépendantes de h , ce qui prouve (67). $\square$

Puisque $\text{BS}(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$ et est strictement décroissante pour h petit, pour tout $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ suffisamment grand il existe un unique $h_n > 0$ tel que $\text{BS}(h_n) = n$ par le lemme 5.6.

Proposition 5.8 (Unicité dans une fenêtre spectrale). *Il existe $K_0 > 0$ tel que, pour tout $K \geq K_0$ fixé et tout n suffisamment grand, l'intervalle*

$$(h_n^{-2} - h_n^K, h_n^{-2} + h_n^K) \tag{68}$$

contient au plus une valeur propre de P_{sa} , comptée avec multiplicité.

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} q_0(h) &= u_{+,+} - u_{+,-} - u_{-,+} + u_{-,-}, \\ q_1(h) &= u_{+,+} - u_{+,-} + u_{-,+} - u_{-,-}, \end{aligned}$$

et soit $e_j(h) = q_j(h)/\|q_j(h)\|_{L^2}$. De la proposition 3.5(ii) et du lemme 3.7 nous avons $\|q_j(h)\|_{L^2}^2 \sim \log(1/h)$. En appliquant le lemme 5.7 et en différenciant le facteur de normalisation, nous obtenons donc, pour certains $C, M > 0$,

$$\|\partial_h e_j(h)\|_{L^2} \leq Ch^{-M}. \tag{69}$$

Soit E une valeur propre dans (68), soit u une fonction propre normalisée, et posons $\tilde{h} = E^{-1/2}$. Alors $|\tilde{h} - h_n| = O(h_n^{K+3})$. Par la proposition 5.3 nous avons

$$\text{BS}(\tilde{h}) = m + O(h_n^\infty)$$

pour un certain $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tandis que (65) donne

$$\text{BS}(\tilde{h}) - n = \text{BS}(\tilde{h}) - \text{BS}(h_n) = O(h_n^{K+1} \log(1/h_n)).$$

Ainsi $m = n$ lorsque K est grand. En utilisant les équations aux limites, nous obtenons que le vecteur de coefficients de u est, modulo $O(h_n^\infty)$, un multiple de $(1, -1, -1, 1)$ si $n \in \mathbb{Z}$, et de $(1, -1, 1, -1)$ si $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Par conséquent, pour $j = 0$ dans le premier cas et $j = 1$ dans le second,

$$\|u - \beta e_j(\tilde{h})\|_{L^2} = O(h_n^\infty), \quad |\beta| = 1 + O(h_n^\infty)$$

pour un certain $\beta \in \mathbb{C}$. Par (69),

$$\|e_j(\tilde{h}) - e_j(h_n)\|_{L^2} = O(h_n^{K+3-M}).$$

Nous choisissons $K_0 > M$. Toute fonction propre normalisée dont la valeur propre se trouve dans (68) a alors une distance $o(1)$ du même sous-espace de dimension un $\mathbb{C}e_j(h_n)$. Ainsi cet intervalle ne peut pas contenir deux fonctions propres normalisées orthogonales, ce qui prouve la proposition. $\square$

Démonstration du théorème 5.1. Pour chaque $n \gg 1$, le théorème 5.5 assure l'existence d'une valeur propre dans

$$(h_n^{-2} - h_n^K, h_n^{-2} + h_n^K)$$

pour tout $K > 0$. Par la proposition 5.8 nous savons que pour $K \geq K_0$ cette valeur propre est unique et simple. Puisque K peut être pris arbitrairement grand,

$$E_n = h_n^{-2} + O(h_n^\infty),$$

et donc (61).

Réciproquement, soit $E = h^{-2}$ une valeur propre suffisamment grande. La proposition 5.3 implique que $\text{BS}(h) = n + O(h^\infty)$ pour un unique $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Par (65), $h - h_n = O(h^\infty)$. En fixant $K \geq K_0$, nous obtenons

$$E \in (h_n^{-2} - h_n^K, h_n^{-2} + h_n^K).$$

Par la proposition 5.8, cet intervalle contient exactement la valeur propre E_n , comptée avec multiplicité. Donc $E = E_n$, ainsi toute valeur propre positive suffisamment grande apparaît dans la suite construite ci-dessus. $\square$

5.3 Démonstration du résultat principal et loi de Weyl logarithmique

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour conclure le résultat principal, le théorème 1.1, et le corollaire 1.2.

Démonstration du théorème 1.1. Nous posons $R(E) = d(E^{-1/2})$. Par le lemme 3.9 nous avons la fonction asymptotique

$$R(E) = -\frac{1}{16\pi} E^{-1/2} \log E + O(E^{-1/2}),$$

et les bornes sur les dérivées dans (35) impliquent

$$R'(E) = -\frac{1}{2} E^{-3/2} d'(E^{-1/2}) = O(E^{-3/2} \log E).$$

La numérotation affirmée des valeurs propres et la règle de quantification (4) s'ensuivent maintenant du théorème 5.1. $\square$

Démonstration du corollaire 1.2. Nous rappelons de [12, (25)] que

$$I(a) = \frac{1}{2}\sqrt{a}(\log a - 2 + 4\log 2) + 1 + o(1), \quad a \rightarrow \infty.$$

Le membre de gauche de (4), avec E_n remplacé par une variable réelle E , est strictement croissant pour E grand par le lemme 5.6. Les quelques valeurs propres positives sous l'intervalle du théorème 5.1 sont absorbées dans le reste $O(1)$. Compter les demi-entiers dans (4) donne donc

$$\begin{aligned} N_+(E) &= 2\left(2I\left(1 + \frac{E}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{4} + R(E)\right) + O(1) \\ &= 2\sqrt{1 + \frac{E}{4\pi^2}}\left(\log\left(1 + \frac{E}{4\pi^2}\right) - 2 + 4\log 2\right) + O(1) \\ &= 4\frac{\sqrt{E}}{2\pi}\left(\log\frac{\sqrt{E}}{2\pi} - 1 + 2\log 2\right) + O(1). \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé $R(E) = o(1)$ et, avec $t = E/(4\pi^2)$,

$$\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = o(1), \quad \sqrt{t+1}\log(t+1) - \sqrt{t}\log t = o(1).$$

□

A Extensions auto-adjointes de P

A.1 Généralités sur les extensions auto-adjointes

Nous rappelons brièvement la théorie de von Neumann des extensions auto-adjointes d'opérateurs non bornés, puis nous la reformulons dans le langage des formes aux limites utilisé dans [27, Sec. 6] et [12, Eq. (6)]. Cela nous sera utile en § A.2 où nous passons en revue les résultats de [12] sur les extensions auto-adjointes de P .

Soit $T : D(T) \rightarrow H$ un opérateur symétrique fermé densément défini sur un espace de Hilbert H . Rappelons que les sous-espaces de défaut sont par définition

$$K_{\pm} := \ker(T^* \mp i) = \text{ran}(T \pm i)^{\perp}$$

et les indices de défaut sont $n_{\pm} := \dim K_{\pm}$.

Si T est un opérateur symétrique fermé, alors il est bien connu que T admet une extension auto-adjointe si et seulement si $n_+ = n_-$. De plus, T est auto-adjoint si et seulement si $n_+ = n_- = 0$.

Théorème A.1. (voir par exemple [34, Thm. 13.10])

Soit T un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut $n_{\pm} = n$. Il existe une bijection entre

(i) les extensions auto-adjointes T_U de T , et

(ii) les opérateurs unitaires $U : K_+ \rightarrow K_-$,

donnée par

$$D(T_U) = D(T) + (I + U)K_+,$$

où l'on pose $T_U = T^*|_{D(T_U)}$.

Nous allons maintenant reformuler ce résultat standard en termes de sous-espaces lagrangiens ou auto-orthogonaux d'un espace quotient intrinsèque $\mathcal{E}$, appelé espace aux limites par Katsnelson dans [27].

Définition A.2. Soit

$$\tilde{\Omega}(u, v) := \frac{1}{i} \left(\langle T^* u, v \rangle - \langle u, T^* v \rangle \right), \quad u, v \in D(T^*).$$

Puisque $\tilde{\Omega}$ s'annule dès que l'un des arguments appartient à $D(T)$, elle descend en une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace aux limites $\mathcal{E} := D(T^*)/D(T)$:

$$\Omega([u], [v]) := \tilde{\Omega}(u, v).$$

Nous appelons Ω la forme aux limites.

Remarque A.3. Puisque T est fermé, $T^{**} = T$. Par conséquent, la forme aux limites Ω est non dégénérée sur $\mathcal{E}$.

Théorème A.4. *Il existe une correspondance bijective entre les extensions auto-adjointes T_U de T et les sous-espaces auto-orthogonaux $\mathcal{L}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$. Spécifiquement, $D(T_U)$ est la préimage de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ sous l'application quotient canonique $\pi : D(T^*) \rightarrow \mathcal{E}$.*

Esquisse de démonstration. Pour un sous-espace $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$, posons

$$T_{\mathcal{L}} := T^*|_{\pi^{-1}(\mathcal{L})}.$$

Alors $T \subset T_{\mathcal{L}} \subset T^*$. Nous affirmons que $T_{\mathcal{L}}^* = T_{\mathcal{L}^{\perp\Omega}}$. En effet, $y \in D(T_{\mathcal{L}}^*)$ si et seulement si $\langle T^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ pour tout $x \in \pi^{-1}(\mathcal{L})$, où l'inclusion $D(T) \subset D(T_{\mathcal{L}})$ implique d'abord que $y \in D(T^*)$. Par définition de la forme aux limites, ceci est équivalent à $\Omega([x], [y]) = 0$ pour tout $[x] \in \mathcal{L}$, ou de façon équivalente $[y] \in \mathcal{L}^{\perp\Omega}$. Donc $T_{\mathcal{L}}^* = T_{\mathcal{L}^{\perp\Omega}}$. Il s'ensuit que $T_{\mathcal{L}}$ est auto-adjoint si et seulement si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\perp\Omega}$. Réciproquement, toute extension auto-adjointe $\tilde{T}$ de T satisfait

$$T \subset \tilde{T} = \tilde{T}^* \subset T^*,$$

et est donc obtenue en prenant $\mathcal{L} = \pi(D(\tilde{T}))$. □

A.2 Application à P

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les arguments de Connes et Moscovici dans [12]. Soit $P_{\min}$ la fermeture de $P|_{S(\mathbb{R})}$ et $P_{\max} = P_{\min}^*$. Son domaine est

$$D_{\max}(P) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid Pu \in L^2(\mathbb{R})\},$$

où Pu est compris au sens distributionnel. Nous écrivons $g(x) = x^2 - 1$ et introduisons le Wronskien pondéré

$$W_g(u, v)(x) := -g(x) \left(u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \right)$$

(notons que dans la partie principale de l'article nous utilisons plutôt le Wronskien pondéré semi-classique : $W_g = -h^{-1}W_h$). Pour $u \in D(P_{\max})$, l'identité

$$(gu')' = -Pu - 4\pi^2 x^2 u \in L^2_{\text{loc}}$$

implique que $gu' \in H_{\text{loc}}^1$ et donc gu' a un représentant continu, y compris à travers $x = \pm 1$.

Par (17), $u(x) - b_\sigma^{(0)} \log |x - \sigma|$ a des limites unilatérales finies en $\sigma = \pm 1$: les termes restants sont une fonction en escalier et une fonction H_{loc}^1 . En particulier, $g(x)u(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \sigma$.

Rappelons de la définition A.2 la définition de $\tilde{\Omega}$. L'intégration par parties donne

$$i\tilde{\Omega}(u, v) = -W_g(u, \bar{v}) \Big|_{-\infty}^{-1} - W_g(u, \bar{v}) \Big|_{-1}^1 - W_g(u, \bar{v}) \Big|_1^{\infty}, \quad u, v \in D(P_{\max}), \quad (70)$$

où les limites en ± 1 sont prises à l'intérieur de chaque intervalle (cf. [12, Eqs. (7)-(10)], en notant que l'opérateur considéré là est $-P$). En passant au quotient, nous obtenons la forme aux limites Ω sur $\mathcal{E} = D(P_{\max})/D(P_{\min})$.

Lemme A.5. [12, Lem. 1.1] *Les indices de défaut de $P_{\min}$ sont $(4, 4)$.*

Démonstration. Près de $x = \pm 1$, une base locale de solutions de $(P - z)u = 0$ consiste en une solution régulière et une solution logarithmique ; à l'une ou l'autre extrémité, une base a pour termes dominants $|x|^{-1}e^{\pm 2\pi i x}$. Ainsi les six extrémités sont de type limite-cercle, cf. [12, proof of Lemma 1.1]. Une solution de $(P - z)u = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, est donc décrite par six paramètres sur les trois composantes de $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et est de carré intégrable à chaque extrémité. La continuité de gu' exige que les coefficients des termes logarithmiques des deux côtés de chaque point singulier coïncident. Ces deux relations sont indépendantes, puisque le coefficient logarithmique sur chaque intervalle extérieur peut être choisi librement. Réciproquement, apparier ces coefficients rend gu' continu, donc aucun terme delta n'apparaît dans $(gu')'$. Les sauts finis de u n'imposent aucune condition supplémentaire, puisque $g\delta_{\pm 1} = 0$. Les solutions par morceaux résultantes appartiennent donc à $D(P_{\max})$ et résolvent l'équation au sens distributionnel sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\dim \ker(P_{\max} - z) = 4$. $\square$

Puisque P commute avec la parité, on a la décomposition Ω -orthogonale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$, et le calcul des indices de défaut donne $\dim \mathcal{E} = 8$. Un calcul simple montre que P commute avec $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Puisque $\mathcal{F}$ préserve $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il préserve aussi $D(P_{\min})$ et $D(P_{\max})$, commute avec les opérateurs correspondants, et préserve Ω .

Choisissons $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ réel et pair, égal à 1 près de $x = \pm 1$, posons $\alpha_+ = \chi \log |1 - x^2|$, et posons $\beta_+ = \mathbf{1}_{[-1, 1]}$, $\alpha_- = x\alpha_+$ et $\beta_- = x\beta_+$. Ces fonctions appartiennent à $D(P_{\max})$. Nous écrivons en outre $\hat{\alpha}_\pm = \mathcal{F}\alpha_\pm$ et $\hat{\beta}_\pm = \mathcal{F}\beta_\pm$, où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier non normalisée.

Lemme A.6. [12, Lem. 1.5] *Les classes d'équivalence dans $\mathcal{E}$*

$$[\alpha_\pm], [\beta_\pm], [\hat{\alpha}_\pm], [\hat{\beta}_\pm]$$

forment une base de $\mathcal{E}_\pm$.

Démonstration. Près de ± 1 on a $g\alpha'_+ = 2x$, donc (70) donne $\Omega([\alpha_+], [\beta_+]) = 4i$. Il en va de même dans le secteur impair, puisque $W_g(\alpha_-, \beta_-) = x^2 W_g(\alpha_+, \beta_+)$. Les appariements entre les représentants originaux et leurs transformées de Fourier s'annulent, car les premiers sont à support compact, tandis que les secondes sont lisses à travers ± 1 , où les limites unilatérales du Wronskien s'annulent donc. En utilisant le fait que Ω est invariante sous transformée de Fourier, nous concluons qu'elle est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 & 0 \\ -4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4i \\ 0 & 0 & -4i & 0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Cette matrice est inversible, donc les quatre classes dans chaque secteur sont linéairement indépendantes. Puisque $\dim \mathcal{E} = 8$, elles forment des bases de $\mathcal{E}_\pm$, et $\dim \mathcal{E}_\pm = 4$. $\square$

Pour $[\gamma] \in \mathcal{E}$, définissons $\ell_\gamma([u]) := i\Omega([u], [\gamma])$. Dans l'identification des conditions ci-dessous, nous supprimons les facteurs scalaires non nuls, car seuls les noyaux importent dans l'analyse.

Lemme A.7. [12, Eqs. (13)-(14) and (17)-(19)] Soit $u = u_{\text{even}} + u_{\text{odd}} \in D(P_{\text{max}})$, avec $u_{\text{even/odd}}$ la partie paire/impair de u . Alors les deux conditions $\ell_{\beta_\pm}([u_\pm]) = 0$ ensemble sont équivalentes à (72), tandis que $\ell_{\hat{\beta}_+}([u_{\text{even}}]) = 0$ et $\ell_{\hat{\beta}_-}([u_{\text{odd}}]) = 0$ sont équivalentes à (73) et (74), respectivement :

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (1 - x^2)u'(x) = 0, \quad (72)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \sin(2\pi x)u'_{\text{even}}(x) - (2\pi x \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x))u_{\text{even}}(x) \right) = 0, \quad (73)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \cos(2\pi x)u'_{\text{odd}}(x) + (2\pi x \sin(2\pi x) + \cos(2\pi x))u_{\text{odd}}(x) \right) = 0. \quad (74)$$

Démonstration. Nous considérons d'abord les points singuliers ± 1 . Pour $u_{\text{even}} \in D(P_{\text{max}}^+)$, la fonction β_+ est égale à 1 sur $(-1, 1)$ et 0 à l'extérieur. Donc en utilisant (70) nous obtenons

$$i\tilde{\Omega}(u_{\text{even}}, \beta_+) = - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)u'_{\text{even}}(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)u'_{\text{even}}(x).$$

Par parité les deux limites sont opposées, et donc $\ell_{\beta_+}([u_{\text{even}}]) = 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)u'_{\text{even}}(x) = 0$. Pour $u_{\text{odd}} \in D(P_{\text{max}}^-)$ on a de même, sur $(-1, 1)$,

$$W_g(u_{\text{odd}}, \beta_-) = g(x)(xu'_{\text{odd}}(x) - u_{\text{odd}}(x)).$$

Puisque $g(x)u_{\text{odd}}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm 1$, la parité implique encore que $\ell_{\beta_-}([u_{\text{odd}}]) = 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)u'_{\text{odd}}(x) = 0$. Par la continuité de gu' à travers ± 1 , ces deux conditions ensemble sont équivalentes à (72).

À l'infini, nous avons par [12, Lemma 1.4(ii)]

$$\hat{\beta}_+(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}.$$

Un calcul direct donne

$$W_g(u_{\text{even}}, \hat{\beta}_+)(x) = \frac{x^2 - 1}{\pi x^2} \left(x \sin(2\pi x)u'_{\text{even}}(x) - (2\pi x \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x))u_{\text{even}}(x) \right).$$

Puisque $\hat{\beta}_+$ est lisse, gu'_{even} est continue et $gu_{\text{even}} \rightarrow 0$ en ± 1 , les contributions des extrémités finies dans (70) s'annulent. Puisque le Wronskien est impair, les contributions de $+\infty$ et $-\infty$ s'ajoutent plutôt que de s'annuler dans la forme aux limites. Puisque $(x^2 - 1)/x^2 \rightarrow 1$, nous obtenons (73). Enfin,

$$\hat{\beta}_-(x) = \mathcal{F}(x\beta_+)(x) = \frac{i}{2\pi}\hat{\beta}'_+(x) = \frac{i}{2\pi^2 x^2} (2\pi x \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)).$$

Pour justifier que l'on peut écarter les termes d'ordre inférieur, nous notons que $u, u' = O(|x|^{-1})$ par l'argument suivant. Pour $f = Pu \in L^2$, choisissons sur chaque demi-droite extérieure une base u_1, u_2 de $Pu = 0$ avec $u_j, u'_j = O(|x|^{-1})$. Par variation des constantes nous obtenons

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad u' = c_1 u'_1 + c_2 u'_2, \quad |c'_j(x)| \lesssim \frac{|f(x)|}{|x|},$$

puisque le Wronskien pondéré est constant et non nul. La dernière borne est intégrable par Cauchy-Schwarz, donc les coefficients ont des limites finies à l'infini. Par conséquent, $u, u' = O(|x|^{-1})$, et les termes omis tendent vers zéro.

En substituant l'expression pour $\widehat{\beta}_-$, on obtient que $W_g(u_{\text{odd}}, \widehat{\beta}_-)$ est égal à

$$-\frac{i(x^2 - 1)}{\pi x^2} \left(x \cos(2\pi x) u'_{\text{odd}}(x) + (2\pi x \sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)) u_{\text{odd}}(x) + o(1) \right)$$

lorsque $x \rightarrow \infty$; les termes omis sont $O(|u_{\text{odd}}(x)| + |u'_{\text{odd}}(x)|)$. Les contributions des extrémités finies s'annulent comme précédemment, et la parité donne la même condition en $-\infty$. Ceci prouve (74). $\square$

Définition A.8. Nous désignons par P_{sa} l'extension auto-adjointe de P_{min} correspondant à $\mathcal{L}_\beta$, où

$$\mathcal{L}_\beta := \bigcap_{\pm} \ker \ell_{\beta_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \ker \ell_{\widehat{\beta}_{\pm}} = \text{span}\{[\beta_+], [\beta_-], [\widehat{\beta}_+], [\widehat{\beta}_-]\} \subset \mathcal{E}.$$

Par (71) appliqué dans chaque secteur de parité, les quatre générateurs de $\mathcal{L}_\beta$ sont deux à deux Ω -orthogonaux, donc $\mathcal{L}_\beta$ est isotrope. Puisque $\mathcal{L}_\beta$ est de dimension quatre, tandis que $\dim \mathcal{E} = 8$ et Ω est non dégénérée, $\mathcal{L}_\beta$ est maximal isotrope, donc lagrangien.

Remarque A.9. Par le lemme A.7 et le théorème A.4, $D(P_{\text{sa}})$ est exactement l'ensemble des $u = u_{\text{even}} + u_{\text{odd}} \in D(P_{\text{max}})$ satisfaisant (72)-(74).

Remarque A.10. Près de $x = \pm 1$ un élément de $D(P_{\text{max}})$ peut avoir un terme logarithmique dont le coefficient est proportionnel à $\lim_{x \rightarrow \pm 1} (1 - x^2)u'(x)$. Ainsi (72) élimine le terme logarithmique, mais autorise des sauts finis en ± 1 . Pour les fonctions propres, les conditions (73) et (74) sélectionnent respectivement les profils asymptotiques $\frac{\sin(2\pi x)}{x}$ et $\frac{\cos(2\pi x)}{x}$ dans les secteurs pair et impair.

Soit Q la multiplication par $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ et posons $\widehat{Q} = \mathcal{F}Q\mathcal{F}^{-1}$.

Théorème A.11 (Connes-Moscovici [12, Thm. 1.6]). *L'opérateur P_{sa} commute avec $\mathcal{F}$, Q et $\widehat{Q}$. De plus, c'est l'unique extension auto-adjointe de P_{min} commutant avec Q et $\widehat{Q}$.*

Esquisse de démonstration. Puisque Q appliqué à des fonctions lisses qui coïncident avec 1 et x sur $[-1, 1]$ produit β_+ et β_- par définition des $\beta_{\pm}$, toute extension auto-adjointe commutant avec Q doit contenir ces deux classes aux limites. De même, la commutation avec $\widehat{Q} = \mathcal{F}Q\mathcal{F}^{-1}$ force les classes $[\widehat{\beta}_+]$ et $[\widehat{\beta}_-]$. Ces quatre classes aux limites engendrent $\mathcal{L}_\beta$. Donc le sous-espace aux limites de toute extension auto-adjointe commutant avec Q et $\widehat{Q}$ contient $\mathcal{L}_\beta$. Comme les deux sous-espaces sont lagrangiens, ils coïncident, ce qui prouve l'unicité. Enfin, $\mathcal{L}_\beta$ est facilement vu être invariant sous $\mathcal{F}$, donc l'extension résultante commute aussi avec $\mathcal{F}$. $\square$

B Estimations symboliques

Le but de cette annexe est de justifier les deux estimations symboliques utilisées en § 3.2. Le lemme B.1 prouve que les coefficients de transport de Fourier définis en (27)-(28) satisfont $b_j \in S^{-1-j}$, avec les estimations correspondantes sur les dérivées en h . Le lemme B.2 prouve que les coefficients WKB définis en (30)-(31) satisfont $a_j \in \mathcal{S}_{-1/2-j}^j$ au sens de la définition 3.4. Ces estimations sont utilisées dans les lemmes 3.9 et 5.7.

B.1 Coefficients de transport de Fourier

Lemme B.1 (Classe de symboles des coefficients de transport). *Soient $0 < \xi_0 < \xi_1$ et $h_0 > 0$ satisfaisant $2\pi h_0 < \xi_0/2$, et soit $0 < h \leq h_0$. Choisissons $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $\chi = 0$ pour $\xi \leq \xi_0$ et $\chi = 1$ pour $\xi \geq \xi_1$. Posons $c = 2\pi h$ et*

$$\alpha(\xi, h) = \partial_x p_h(F'(\xi), \xi) = 2\sqrt{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - c^2)}, \quad b_0 = \chi\alpha^{-1/2}.$$

Pour $j \geq 0$, définissons

$$r_j = -\partial_\xi((\xi^2 - c^2)\partial_\xi b_j), \quad b_{j+1}(\xi, h) = i\chi(\xi)\alpha(\xi, h)^{-1/2} \int_\infty^\xi \alpha(\eta, h)^{-1/2} r_j(\eta, h) d\eta.$$

Alors $\partial_h^\beta b_j \in S^{-1-j}$ pour tous $j, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. Nous travaillons sur la composante $(+, +)$. Puisque $c^2\xi^{-2} \leq 1/4$ pour $\xi \geq \xi_0$,

$$\alpha^{-1/2} = 2^{-1/2}\xi^{-1}(1 + \xi^{-2})^{-1/4}(1 - c^2\xi^{-2})^{-1/4}.$$

En différenciant cette expression, on prouve

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_h^\beta \alpha^{-1/2}(\xi, h)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-1-\alpha}, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (75)$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$, et donc l'assertion pour b_0 . Supposons qu'elle tienne pour b_j . L'identité de transport exacte de l'étape 1 de la démonstration de la proposition 3.5 identifie le reste comme

$$r_j = -(\xi^2 - c^2)b_j'' - 2\xi b_j'.$$

Ses coefficients ont des ordres deux et un, respectivement, compensés par les dérivées correspondantes de b_j . Ainsi $\partial_h^\beta r_j \in S^{-1-j}$ pour tout β . Posons

$$u_j = \alpha^{-1/2} r_j, \quad I_j(\xi, h) = \int_\xi^\infty u_j(\eta, h) d\eta.$$

Par (75) et la règle de Leibniz,

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_h^\beta u_j(\eta, h)| \leq C_{\alpha\beta j} \langle \eta \rangle^{-2-j-\alpha}, \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_h^\beta I_j(\xi, h)| \leq C_{\alpha\beta j} \langle \xi \rangle^{-1-j-\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$ la dernière estimation s'ensuit par intégration; pour $\alpha \geq 1$ utiliser $\partial_\xi^\alpha I_j = -\partial_\xi^{\alpha-1} u_j$. Puisque $b_{j+1} = -i\chi\alpha^{-1/2} I_j$, une autre application de la règle de Leibniz prouve $\partial_h^\beta b_{j+1} \in S^{-2-j}$. $\square$

B.2 Coefficients de transport WKB

Lemme B.2 (Classe de symboles logarithmiques des a_j). *Sur la composante $(+, +)$ et pour $0 < h \leq 1$, soit $a_0 = |g\varphi'|^{-1/2}$ et, pour $j \geq 0$,*

$$a_{j+1}(x, h) = \frac{i}{2} |g(x)\varphi'(x)|^{-1/2} \int_\infty^x |g(y)\varphi'(y)|^{-1/2} (g(y)a_j''(y, h) + g'(y)a_j'(y, h)) dy.$$

Alors $a_j \in \mathcal{S}_{-1/2-j}^j$ pour $x \geq 2$. Les estimations correspondantes sur les autres composantes s'ensuivent par conjugaison et réflexion.

Démonstration. Pour $x \geq 2$, posons $X = 1 + x$, $Y = 1 + hx$ et $L_h = 1 + \log(Y/(hX))$. Nous avons

$$a_0(x, h) = (x^2 - 1)^{-1/4} f(hx), \quad f(t) = (1 + 4\pi^2 t^2)^{-1/4}.$$

Les estimations $|f^{(r)}(t)| \leq C_r(1+t)^{-1/2-r}$ et $\partial_h^\beta f(hx) = h^{-\beta}(hx)^\beta f^{(\beta)}(hx)$, avec la règle du produit, impliquent

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta a_0(x, h)| \leq C_{\alpha\beta} h^{-\beta} X^{-1/2-\alpha} Y^{-1/2}. \quad (76)$$

Ainsi $a_0 \in \mathcal{S}_{-1/2}^0$.

Supposons par récurrence que $a_j \in \mathcal{S}_{-1/2-j}^j$, donc

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta a_j(x, h)| \leq C_{\alpha\beta j} h^{-\beta} X^{-1/2-\alpha} Y^{-1/2-j} L_h(x)^j. \quad (77)$$

En particulier,

$$|g \partial_h^\beta a_j'' + g' \partial_h^\beta a_j'| \leq C_{\beta j} h^{-\beta} X^{-1/2} Y^{-1/2-j} L_h(x)^j. \quad (78)$$

Définissons $F_j = a_0(g a_j'' + g' a_j')$. En combinant (76)-(78) avec $|\partial_x^r g| \leq C_r X^{2-r}$ et $|\partial_x^r g'| \leq C_r X^{1-r}$, nous obtenons

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta F_j(x, h)| \leq C_{\alpha\beta j} h^{-\beta} X^{-1-\alpha} Y^{-1-j} L_h(x)^j. \quad (79)$$

Pour $m \geq 1$ et $\ell \geq 0$, l'estimation intégrale nécessaire ci-dessous est

$$\int_x^\infty (1+y)^{-1} (1+hy)^{-m} L_h(y)^\ell dy \leq (1+hx)^{-m} L_h(x)^{\ell+1}. \quad (80)$$

En effet, $L_h' = -(1-h)/(XY)$ et

$$-\partial_x(Y^{-m} L_h^{\ell+1}) = X^{-1} Y^{-m} L_h^\ell \left(\frac{mhX L_h + (\ell+1)(1-h)}{Y} \right) \geq X^{-1} Y^{-m} L_h^\ell.$$

Ici nous avons utilisé $m, L_h, \ell+1 \geq 1$ et $hX+1-h=Y$. En intégrant à l'infini, on prouve (80), puisque $Y^{-m} L_h^{\ell+1} \rightarrow 0$ là pour $h > 0$ fixé.

Posons $I_j(x, h) = \int_x^\infty F_j(y, h) dy$. En appliquant (80) avec $m = j+1$, $\ell = j$ à (79), nous obtenons

$$|\partial_h^\beta I_j(x, h)| \leq C_{\beta j} h^{-\beta} Y^{-1-j} L_h(x)^{j+1}. \quad (81)$$

La différenciation sous l'intégrale est justifiée par (79), localement uniformément pour $h > 0$. Pour $\alpha \geq 1$, utiliser $\partial_x^\alpha \partial_h^\beta I_j = -\partial_x^{\alpha-1} \partial_h^\beta F_j$ et (79). En combinant ces bornes avec (81) et $L_h \geq 1$, nous obtenons

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta I_j(x, h)| \leq C_{\alpha\beta j} h^{-\beta} X^{-\alpha} Y^{-1-j} L_h(x)^{j+1}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0. \quad (82)$$

Enfin, $a_{j+1} = -(i/2)a_0 I_j$. Par la règle de Leibniz, (76) et (82),

$$|\partial_x^\alpha \partial_h^\beta a_{j+1}(x, h)| \leq C_{\alpha\beta j} h^{-\beta} X^{-1/2-\alpha} Y^{-3/2-j} L_h(x)^{j+1}.$$

C'est l'assertion $a_{j+1} \in \mathcal{S}_{-1/2-(j+1)}^{j+1}$. □

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Ludwik Dąbrowski de leur avoir signalé le problème. K. Taira et M. Wrochna remercient chaleureusement le Research Institute for Mathematical Sciences de Kyoto (RIMS) pour son soutien. K. Taira a été partiellement soutenu par la bourse JSPS KAKENHI numéro JP23K13004. M. Wrochna a été soutenu par le Conseil néerlandais de la recherche (NWO) à travers la bourse OCENW.M.24.071, et par l'Erwin Schrödinger Institute de Vienne (ESI) à travers le programme “Spectral Theory and Mathematical Relativity”, 2023.

Références

- [1] F. V. Atkinson, C. T. Fulton, Asymptotic formulae for eigenvalues of limit circle problems on a half line, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **135** (1983), 363-398.
- [2] J. Aramaki, A. Nurmuhhammad, A note on non-classical eigenvalue asymptotics, *Hokkaido Math. J.* **30** (2001), no. 2, 307-325.
- [3] U. Boscain, D. Prandi, M. Seri, Spectral analysis and the Aharonov-Bohm effect on certain almost-Riemannian manifolds, *Comm. Partial Differential Equations* **41** (2016), no. 1, 32-50.
- [4] Y. Chitour, D. Prandi, L. Rizzi, Weyl's law for singular Riemannian manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **181** (2024), 113-151.
- [5] Y. Colin de Verdière, Bohr-Sommerfeld rules to all orders, *Ann. Henri Poincaré* **6** (2005), 925-936.
- [6] Y. Colin de Verdière, On the spectral theory of sign-changing Laplace operators, *arXiv :2502.03838* (2025).
- [7] Y. Colin de Verdière, C. Dietze, E. Trélat, Weyl asymptotics for singular metrics with a variable boundary degeneracy exponent, *arXiv :2603.15256* (2026).
- [8] Y. Colin de Verdière, L. Hillairet, E. Trélat, Spectral asymptotics for sub-Riemannian Laplacians, *arXiv :2212.02920* (2022).
- [9] Y. Colin de Verdière, B. Parisse, Équilibre instable en régime semi-classique. I. Concentration microlocale, *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), no. 9-10, 1535-1563.
- [10] A. Connes, C. Consani, Weil positivity and trace formula, the archimedean place, *Selecta Math.* **27** (2021), no. 4, article 77, 70 pp.
- [11] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, Zeta zeros and prolate wave operators : semilocal adelic operators, *Ann. Funct. Anal.* **15** (2024), no. 4, article 87, 38 pp.
- [12] A. Connes, H. Moscovici, The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **119** (2022), no. 22, article e2123174119, 7 pp.
- [13] X. Dai, S. Honda, J. Pan, G. Wei, Singular Weyl's law with Ricci curvature bounded below, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* **10** (2023), 1212-1253.
- [14] S. Dyatlov, M. Zworski, *Mathematical Theory of Scattering Resonances*, Graduate Studies in Mathematics **200**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [15] S. Dyatlov, M. Zworski, Microlocal analysis of forced waves, *Pure Appl. Anal.* **1** (2019), no. 3, 359-384.
- [16] J. Fox, R. S. Strichartz, Unexpected spectral asymptotics for wave equations on certain compact spacetimes, *J. Anal. Math.* **136** (2018), no. 1, 209-251.
- [17] A. Grigis, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators : An Introduction*, London Mathematical Society Lecture Note Series **196**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [18] N. Haber, A. Vasy, Propagation of singularities around a Lagrangian submanifold of radial points, *Bull. Soc. Math. France* **143** (2015), no. 4, 679-726.
- [19] L. Hartmann, M. Lesch, B. Vertman, Zeta-determinants of Sturm-Liouville operators with quadratic potentials at infinity, *J. Differential Equations* **262** (2017), no. 5, 3431-3465.
- [20] A. Hassell, R. B. Melrose, A. Vasy, Microlocal propagation near radial points and scattering for symbolic potentials of order zero, *Anal. PDE* **1** (2008), no. 2, 127-196.

- [21] P. Heywood, On the asymptotic distribution of eigenvalues, *Proc. London Math. Soc.* (3) **4** (1954), 456-470.
- [22] P. Hintz, Resolvents and complex powers of semiclassical cone operators, *Math. Nachr.* **295** (2022), no. 10, 1990-2035.
- [23] P. Hintz, Semiclassical propagation through cone points, *Anal. PDE* **17** (2024), no. 10, 3477-3550.
- [24] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV*, Springer-Verlag, Berlin, 1983-1985.
- [25] A. Ifa, H. Louati, M. Rouleux, Bohr-Sommerfeld quantization rules revisited : the method of positive commutators, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **25** (2018), no. 2, 91-127; erratum, *ibid.* **27** (2020), no. 1, 81-85.
- [26] V. Ivrii, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [27] V. Katsnelson, Self-adjoint boundary conditions for the prolate spheroid differential operator, in *Indefinite Inner Product Spaces, Schur Analysis, and Differential Equations*, *Oper. Theory Adv. Appl.* **263**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018, 357-386.
- [28] R. B. Melrose, *Geometric Scattering Theory*, Stanford Lectures, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [29] A. Menikoff, J. Sjöstrand, On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators, *Math. Ann.* **235** (1978), 55-85.
- [30] G. Métivier, Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques, *Comm. Partial Differential Equations* **1** (1976), no. 5, 467-519.
- [31] M. Nursultanov, G. Rozenblum, Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator with potential having a strong local negative singularity, *Opuscula Math.* **37** (2017), no. 1, 109-139.
- [32] A. Osipov, V. Rokhlin, H. Xiao, *Prolate Spheroidal Wave Functions of Order Zero : Mathematical Tools for Bandlimited Approximation*, *Applied Mathematical Sciences* **187**, Springer, New York, 2013.
- [33] J.-P. Ramis, F. Richard-Jung, J. Thomann, New eigenfunctions for the negative part of the Connes-Moscovici prolate spectrum, *C. R. Math.* **363** (2025), 1065-1081.
- [34] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics **265**, Springer, Dordrecht, 2012.
- [35] B. Simon, Nonclassical eigenvalue asymptotics, *J. Funct. Anal.* **53** (1983), 84-98.
- [36] J. Sjöstrand, M. Zworski, Quantum monodromy and semi-classical trace formulæ, *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), no. 1, 1-33.
- [37] D. Slepian, H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961), no. 1, 43-63.
- [38] A. Vasy, Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic and Kerr-de Sitter spaces, with an appendix by S. Dyatlov, *Invent. Math.* **194** (2013), no. 2, 381-513.
- [39] A. Vasy, Resolvents, Poisson operators and scattering matrices on asymptotically hyperbolic and de Sitter spaces, *J. Spectr. Theory* **4** (2014), no. 4, 643-673.
- [40] S. V u Ngoc, WKB for semiclassical operators : how to fly over caustics (and more), *arXiv :2603.25601* (2026).
- [41] I. L. Vulis, M. Z. Solomyak, Spectral asymptotics of second-order degenerate elliptic operators, *Math. USSR-Izv.* **8** (1974), no. 6, 1343-1371.
- [42] M. Zworski, *Semiclassical Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **138**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [43] M. Zworski, Resonances for asymptotically hyperbolic manifolds : Vasy's method revisited, *J. Spectr. Theory* **6** (2016), no. 4, 1087-1114.