

Un facteur de type II_1 de groupe fondamental dénombrable

A. Connes

Introduction

Soit M un facteur, $\text{Ext } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$ désigne le quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs. Pour $M = R$, le facteur hyperfini de type II_1 , le groupe $\text{Ext } R$ est très grand, en fait il contient tout groupe localement compact et séparable, et il est cependant simple en tant que groupe abstrait. Si M est de type II_1 et n'a pas de suites centrales non triviales, alors $\text{Int } M$ est un sous-groupe fermé de $\text{Aut } M$, lorsque $\text{Aut } M$ est muni de la topologie de la convergence ponctuelle en norme dans M_* (son prédual), et alors $\text{Ext } M$ hérite d'une topologie qui en fait un groupe polonais. Ainsi, pour montrer que $\text{Ext } M$ est dénombrable, il suffit de montrer qu'il est discret. Le résultat suivant est le premier résultat de rigidité concernant la théorie des algèbres d'opérateurs.

Théorème 1. *Soit Γ un groupe discret dénombrable avec des classes de conjugaison infinies, satisfaisant la propriété T de Kazhdan. Alors $M = \lambda(\Gamma)''$ est un facteur de type II_1 tel que*

- 1°) *$\text{Int } M$ est fermé dans $\text{Aut } M$ (pour la topologie de la convergence ponctuelle en norme dans M_*).*
- 2°) *$\text{Ext } M$ est un groupe discret.*

Corollaire 2. *$\text{Ext } M$ est dénombrable.*

Démonstration du corollaire. Puisque $\text{Ext } M$ est un espace topologique polonais, il possède un sous-ensemble dénombrable dense; étant discret, il est donc dénombrable. $\square$

Démonstration de 1°

Soit M agissant dans $l^2(\Gamma)$, et soit J l'involution antilinéaire canonique telle que $J\xi_0 = \xi_0$, $Jx\xi_0 = x^*\xi_0$ pour tout $x \in M$, où ξ_0 est le vecteur associé à l'élément neutre de Γ (c'est-à-dire $\xi_0(g) = 0$ si $g \neq e$ et $\xi_0(e) = 1$ si l'on considère ξ_0 comme une fonction sur Γ). Pour chaque $x \in M$, $JxJ \in M'$, le commutant de M ; de plus, l'application $x \rightarrow JxJ$ est un isomorphisme antilinéaire de M sur M' . Soit λ la représentation régulière gauche de Γ dans $l^2(\Gamma)$, ainsi pour $g \in \Gamma$, $\lambda(g)$ est l'opérateur de translation à gauche par g ; on a $\lambda(g) \in M$, et l'égalité $\rho(g) = \lambda(g)J\lambda(g)J$ définit une représentation de Γ dans $l^2(\Gamma)$.

Par hypothèse, les classes de conjugaison non triviales de Γ sont infinies et Γ satisfait la propriété de Kazhdan ([3]) :

Il existe un sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$ et un $\epsilon > 0$, tels que pour toute représentation unitaire π de Γ , s'il existe $\xi \in H_\pi$ tel que

$$\|\xi\| = 1, \quad \|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \epsilon \quad \forall g \in F,$$

alors il existe $\xi' \in H_\pi$ tel que $\pi(g)\xi' = \xi'$ pour tout $g \in \Gamma$.

Soit maintenant π la restriction de ρ à l'orthogonal H_π de ξ_0 dans $l^2(\Gamma)$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite centrale dans M , avec $\tau(x_n) = 0$, on a $\xi_n = x_n \xi_0 \in H_\pi$ et

$$\pi(g)\xi_n = \pi(g)x_n \xi_0 = \lambda(g)x_n \lambda(g)^* \xi_0$$

de sorte que $\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \rightarrow 0$ pour tout $g \in \Gamma$. Maintenant, puisque M est un facteur, l'égalité $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in \Gamma$ implique que $\xi = 0$; on conclut donc de ce qui précède que $\|\xi_n\| \rightarrow 0$, c'est-à-dire que toutes les suites centrales sont triviales et donc $\text{Int } M$ est fermé dans $\text{Aut } M$ (cf. [2]). Q.E.D.

Démonstration de 2°

Nous allons construire un voisinage $\mathcal{V}$ de l'identité $\text{id} \in \text{Aut } M$ tel que $\mathcal{V} \subset \text{Int } M$. Ceci montrera que $\text{Int } M$ est ouvert et achèvera la démonstration. Nous prenons :

$$\mathcal{V} = \{\theta \in \text{Aut } M \mid \|\theta(\lambda(g))J\lambda(g)J\xi_0 - \xi_0\| < \epsilon \quad \forall g \in F\}.$$

$\mathcal{V}$ est ouvert par construction; le seul point est de montrer qu'il est constitué uniquement d'automorphismes intérieurs. Mais remarquons que $\pi'(g) = \theta(\lambda(g))J\lambda(g)J$ définit une représentation de Γ dans $l^2(\Gamma)$, et donc, par la propriété T , il existe ξ tel que :

$$\xi \neq 0, \quad \theta(\lambda(g))J\lambda(g)J\xi = \xi, \quad \forall g \in \Gamma,$$

ainsi

$$\theta(\lambda(g))\xi - J\lambda(g)^*J\xi = 0 \quad \forall g \in \Gamma.$$

Cela signifie que $\theta(x)\xi - Jx^*J\xi = 0$ pour tout $x \in M$. D'après [1], cela montre que $\theta \in \text{Int } M$. Q.E.D.

Corollaire 3. *Le groupe fondamental $\mathcal{G}(M)$ est dénombrable. Il existe donc un sous-groupe dénombrable D de $\mathbb{R}_+^*$ et des facteurs M_λ , $\lambda \notin D$, de type II_1 , deux à deux non isomorphes, mais tels que tous les $M_\lambda \otimes F_\infty$ soient isomorphes à $M \otimes F_\infty$, où F_∞ est un facteur de type I_∞ .*

Démonstration. Le groupe discret $\Gamma \times \Gamma$ a la propriété T parce que Γ l'a, donc $\text{Ext}(M \otimes M)$ est dénombrable. Soit $\theta_\lambda \in \text{Aut}(M \otimes F_\infty)$ de module λ ; alors $\theta_\lambda \otimes \theta_\lambda^{-1}$ est de module 1 et donne donc lieu à une classe d'automorphismes bien définie $\alpha_\lambda \in \text{Ext}(M \otimes M)$. Pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\theta_{\lambda_1}\theta_{\lambda_2}^{-1}$ est extérieur, donc $\alpha_{\lambda_1} \neq \alpha_{\lambda_2}$. Q.E.D. $\square$

Références

- [1] Connes, A., Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 8 (1975), 383-419.
- [2] Connes, A., Almost periodic states and factors of type III, *J. Functional Analysis*, 16 (1974), 415-445.
- [3] Kazhdan, D. A., Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, *Functional Anal. Appl.*, 1 (1967), 63-65.
- [4] Murray, F. J. ; von Neumann, J., On rings of operators. IV, *Ann. of Math.*, 44 (1943), 716-808.

Alain Connes
Département de Mathématiques
Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 Bures sur Yvette
France
Reçu le 20 mars 1980.