Extraits du livre L'hypothèse de Riemann : le plus grand problème non résolu en mathématiques, trouvé à la bibliothèque de l'IHÉS

[p. 8]
L'une des histoires les plus étranges concernant un intérêt précoce pour les mathématiques m'a été racontée par Alain Connes, un brillant mathématicien français qui avait conçu son propre système mathématique pour résoudre les problèmes posés en classe. “Ce qui s'est passé, c'est que j'ai commencé par travailler dans un espace très restreint de la géographie mathématique. Cela signifiait que j'avais une vision étrange et polarisée des choses, qui m'était propre. Et, d'une certaine manière, à partir de ce moment-là, j'ai voyagé à travers de nombreux autres espaces, sans jamais rompre le fil conducteur que j'avais tissé dès le départ et qui me donnait un point de vue particulier, assez différent du point de vue standard. J'avais donc mon propre système, ce qui était très étrange, car lorsque les problèmes posés par le professeur entraient dans mon système, j'avais bien sûr une réponse instantanée. Mais quand ce n'était pas le cas et beaucoup de problèmes, évidemment, n'entraient pas dans mon système, je me sentais complètement perdu et cela m'était égal.”

[p. 31]
Les mathématiques pures ne sont généralement pas associées à de grosses sommes d'argent. Pourtant, plusieurs prix mathématiques ont été décernés au fil des ans pour des problèmes spécifiques ou simplement pour des travaux exceptionnels. En septembre 2001, le professeur Alain Connes, l'un des mathématiciens les plus éminents travaillant sur l'hypothèse de Riemann, a reçu un chèque d'un demi-million de dollars de la Fondation Crafoord, une organisation suédoise, pour la simple reconnaissance de son excellence en mathématiques. Dans le cas de l'hypothèse de Riemann, il est difficile de mesurer l'impact que l'existence de ce prix aura. Certains mathématiciens estiment que l'Institut Clay aurait pu mieux utiliser cet argent s'il avait réellement souhaité accroître les chances de découverte d'une démonstration.

[p. 111]
“Une blague circulait le 1er avril”, m'a raconté Brian Conrey. “Alain Connes avait présenté un programme susceptible de prouver l'hypothèse de Riemann et donnait des conférences à l'Institute [for Advanced Study]. Un courriel, très drôle, a circulé le 1er avril, racontant qu'un brillant étudiant en physique, parmi l'assistance, avait reconnu quelque chose à propos des bosons et des fermions, et trouvé la solution et achevé la démonstration le soir même.”

La rumeur a circulé et beaucoup de gens l'ont crue vraie. Mais c'était un poisson d'avril.

[p. 161]
Ce type de rapprochement fortuit entre deux notions mathématiques apparemment sans lien se produit de temps à autre et s'avère généralement fructueux. On raconte l'histoire d'un Néo-Zélandais, Vaughan Jones, qui travaillait sur un problème relevant de l'analyse en dimension infinie. Une partie de la solution faisait intervenir la notion de “groupe de tresses”, que l'on peut représenter par des brins noués ou non. Un jour, lors d'une conférence à New York, Jones rencontra une topologue, Joan Birman.

K. S., 2003, New York, Farrar, Straus et Giroux.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2026.

Le mathématicien français Alain Connes décrit la suite des événements : “En discutant avec Birman, il apprit que le groupe des tresses est également utilisé en théorie des nœuds, et que, comme conséquence d’un théorème dû à Markov, les topologues recherchaient une fonction sur ce groupe qui satisfaisait une certaine propriété.

“Je l’ai !” s’écria-t-il, “Je l’ai juste ici dans ma poche !”[1] Pour Montgomery, l’observation de Dyson était le premier indice qu’il aurait pu découvrir quelque chose de bien plus significatif que la simple distribution des zéros.

[p. 186]
Cependant, un chercheur pourrait bien s’appuyer sur les travaux de Berry et Keating en proposant une nouvelle approche mathématique susceptible de mener à une démonstration. Il s’agit d’Alain Connes, mathématicien français qui s’est intéressé à l’hypothèse de Riemann bien plus tard que les autres figures majeures, mais qui est aujourd’hui plus que jamais déterminé à la résoudre.

Berry me l’a décrit comme “l’un des plus grands mathématiciens au monde, très imaginatif, et il a une idée précise de ce qu’est un système dynamique. Il est charmant. Certains mathématiciens sont très ouverts, dans le sens où ils comprennent que nous ne prouvons rien, mais que nous, physiciens, avons souvent des intuitions ou des suppositions qu’ils ignorent, et qu’ils peuvent ensuite les développer dans des directions que nous n’aurions jamais imaginées. C’est un véritable échange. Je ne vois aucune hiérarchie là-dedans, mais certains mathématiciens sont très méprisants. Avant, je me disais optimiste. L’optimiste croit que nous vivons dans le meilleur des mondes possibles. Le pessimiste sait que c’est le cas. Mais maintenant, je suis moins optimiste. Je pense que Connes l’a peut-être démontrée, et il s’agira de comprendre la démonstration, mais je n’en suis pas encore sûr. Pour l’instant, nous en sommes loin.”

J’avais prévu de voir le “charmant” Alain Connes, mais après ce voyage éclair dans l’esprit de Berry, je n’étais pas sûr de pouvoir supporter encore plus d’abstraction. À vrai dire, même Berry reconnaît qu’il ne peut pas penser dans ces sphères supérieures vingt-quatre heures sur vingt-quatre.

“Ce genre de choses est inscrit dans nos gènes”, dit-il, mais cela reste totalement mystérieux si on ne l’a pas étudié pendant des années. C’est le genre de chose qui peut vous rendre fou, et on se rend compte qu’on en est obsédé tous les deux ou trois ans pendant quelques semaines, et on fait quelques petits progrès à chaque fois, mais ensuite on s’épuise et on fait autre chose, et c’est peut-être pour ça qu’on n’y arrive pas et que Wiles, lui, a réussi...”

J’ai cette question : “Quelle est la particule élémentaire de la compréhension soudaine ?”. “C’est le clariton”. Le problème, c’est qu’il y a aussi des anti-claritons qui surgissent le lendemain et qui anéantissent le clariton qui vous a permis de comprendre la veille. Nous en avons beaucoup dans ce domaine, des claritons anéantis par des anti-claritons.

1. Jean-Pierre Changeux et Alain Connes, Conversations on Mind, Matter, and Mathematics, édité et traduit (du français à l’anglais) par M. B. DeBevoise, Princeton University Press, 1995, p. 50.

[p. 231]
L'enthousiasme était palpable lors de la publication des idées de Connes, en partie grâce à Connes lui-même, mais il semble se heurter à un mur. Roger Heath-Brown.

[p. 239]
Pour le mathématicien français Alain Connes, le plaisir des mathématiques peut aussi s'accompagner de souffrance. Il parle de quatre phases de découverte : la concentration, l'incubation, l'illumination et la vérification.

Le processus de vérification peut être très douloureux : on a terriblement peur de se tromper. Des quatre phases, c'est celle qui engendre le plus d'anxiété, car on ne sait jamais si son intuition est juste un peu comme dans un rêve, où l'intuition se trompe très souvent. Je me souviens d'avoir mis un mois à vérifier un résultat : j'ai épluché la démonstration dans les moindres détails, jusqu'à l'obsession, alors que j'aurais pu simplement confier la vérification de la logique du raisonnement à une calculatrice.

Mais dès que l'illumination survient, elle touche les émotions si intensément qu'il est impossible de rester passif ou indifférent. Lors des rares occasions où j'ai pu vivre une illumination, je n'ai pu retenir mes larmes.

De l'avis général, Alain Connes est l'un des mathématiciens les plus brillants au monde. Nombre de ses pairs le pensent également. Parmi les mathématiciens travaillant sur l'hypothèse de Riemann, rares sont ceux qui prétendent comprendre la spécialisation de Connes, mais nombreux sont ceux qui estiment que si quelqu'un doit démontrer cette hypothèse, ce sera bien lui. Pour un homme dont on pourrait dire, selon les mots de Douglas Adams, qu'il possède "un cerveau de la taille d'une planète", il est étonnamment accessible.

C'est lors de la conférence de Seattle de 1996, organisée par l'American Institute of Mathematics, que Connes, qui jusque-là ne s'était pas particulièrement intéressé à l'hypothèse de Riemann, s'engagea sur une voie qui, selon certains mathématiciens, mènera bientôt à une démonstration. Auparavant, il travaillait sur les mathématiques de la théorie quantique des champs et des particules élémentaires, et une idée familière lui vint : "J'ai immédiatement eu l'impression que le passage des entiers aux nombres premiers est très similaire au passage de la théorie quantique des champs, telle que nous l'observons, aux particules élémentaires, quelles qu'elles soient."

Connes et un collègue ayant conçu une algèbre spécifique pour explorer ce lien, il fut invité à Seattle pour y présenter une communication. "J'ai été invité à cette réunion en 1996 et j'y ai donné une conférence. J'ai été frappé de constater qu'en dehors des travaux sur les matrices aléatoires, peu de choses se passaient concernant l'hypothèse de Riemann elle-même. J'ai alors été très incité à approfondir le sujet et, à mon retour de la conférence, qui avait lieu durant l'été, j'ai poussé l'analogie beaucoup plus loin. Les zéros n'apparaissaient même pas dans mes travaux précédents, mais en allant plus loin, ils sont apparus tout naturellement, sans qu'il soit nécessaire de définir la fonction zêta de Riemann pour les obtenir ; ils provenaient d'une interprétation purement spectrale, et cette nouvelle caractéristique fondamentale peut s'expliquer très simplement.".

Rien de ce que dit Connes n'est réellement très simple, c'est la nature même du sujet. Aussi "simplement" qu'un mathématicien puisse tenter d'expliquer un sujet à son niveau de spécialisation, les idées sous-jacentes sont si abstraites, et les analogies qu'il utilise forcément si banales, qu'on finit inévitablement par être très loin de ce dont il s'agit réellement en mathématiques.

Autour d'un Earl Grey dans un café parisien nommé *Le Tea Caddy*, Connes, décontracté et à l'aise, portait un pull bleu clair et une chemise à col ouvert. Il s'animait en parlant de mathématiques, une matière qui semble le passionner depuis toujours.

En 1973, lorsqu'à vingt-six ans, Alain Connes soutint sa thèse de doctorat à l'École Normale Supérieure de Paris, ses travaux sur les algèbres d'opérateurs furent considérés comme novateurs. Un observateur les qualifia de "percée majeure et stupéfiante"[2]. Depuis, Connes s'est distingué par la création d'une géométrie nouvelle et originale. Le comité Crafoord qui a remis à Alain Connes l'une de ses récompenses les plus récentes, le prix suédois Crafoord, indique que ce prix lui a été décerné "pour ses travaux pénétrants sur la théorie des algèbres d'opérateurs et pour avoir été un fondateur de la géométrie non commutative"[3]. Le prix Crafoord est d'un montant de 500 000 dollars.

Remis à Connes par le roi de Suède à Stockholm en septembre 2001, ce prix constitue une récompense extraordinaire pour un travail qui, comme une grande partie des mathématiques pures, n'a que peu ou pas d'application pratique évidente. Connes m'a expliqué que, selon lui, les mathématiques reposent sur une dualité entre géométrie et algèbre qui, d'après lui, se reflète dans le fonctionnement du cerveau. "La perception géométrique, extrêmement riche et élaborée, est directement liée aux aires visuelles du cerveau. Grâce à ces aires, on peut immédiatement contempler une image et en percevoir la beauté. Par exemple, il existe un théorème célèbre, le théorème de Morley, qui concerne la trisection des angles d'un triangle. Si l'on dessine une représentation de ce théorème, on est immédiatement frappé par sa beauté. En revanche, si l'on tente de rédiger une démonstration par un dessin géométrique, on risque généralement d'obtenir un résultat trompeur. On peut avoir dessiné d'une certaine manière, masquant ainsi le fait qu'une autre représentation était possible, et alors la démonstration devient caduque. En général, la démonstration ultime, si l'on veut, est donc algébrique.".

Il est difficile aujourd'hui de se rendre compte du point auquel le lien entre l'algèbre et la géométrie était inattendu pour les premiers mathématiciens. Même avec des connaissances minimales en mathématiques scolaires, nous acceptons aujourd'hui sans sourciller que l'on puisse additionner x^2 et x^3. Mais les premiers mathématiciens auraient été stupéfaits, comme l'a expliqué Connes.

"C'était vraiment un pas en avant fantastique", a-t-il déclaré, "de comprendre que le carré d'un nombre - qui est simplement un carré géométrique et son cube, qui est simplement un cube géométrique, peuvent être additionnés, même si l'on pourrait dire : "Mais l'un a la dimension de la longueur au carré et l'autre celle de la longueur au cube !" et qu'il ne faut jamais additionner des nombres de dimensions différentes. L'algèbre est donc une réalisation extraordinaire, et une fois qu'on a formulé les choses en termes algébriques, elles acquièrent une existence propre.".

2. C. C. Moore, "The work of Alain Connes", Notices of the American Mathematical Society 29, 1982, pp. 499-501.
3. Press Release, Royal Swedish Academy of Sciences, 25 January 2001.

Connes a développé son exemple du théorème de Morley, qui stipule que si l'on trisecte les trois angles d'un triangle quelconque autrement dit, si l'on divise chaque angle en trois parties égales, alors les points d'intersection des droites de trisection délimitent un triangle équilatéral. La figure 17 illustre ce principe.

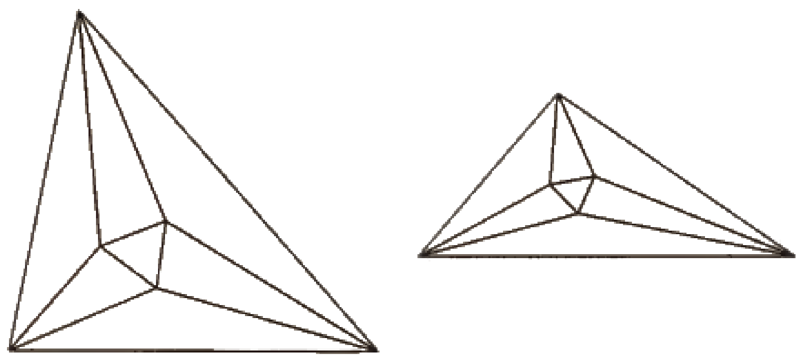

Figure 17

Décrire le problème en termes algébriques revient à traiter les triangles comme des équations à deux inconnues, x et y, ce qui permet de décrire de manière unique n'importe quel point ou droite du plan. Ainsi, chaque sommet du triangle a ses coordonnées, x_1, y_1, x_2, y_2, et x_3, y_3 et l'on peut décrire les côtés et les droites de trisection par des équations dont les inconnues sont ces coordonnées. La résolution algébrique de ces équations confirmera ce qui semble évident d'après les schémas : un triangle équilatéral sera obtenu.

Maintenant, si vous reprenez les mêmes équations mais ajoutez une autre coordonnée, z, la même démonstration mathématique fonctionnera, et cette fois-ci elle décrira une version du théorème dans l'espace tridimensionnel. En ajoutant davantage d'inconnues, on peut obtenir une généralisation beaucoup plus large, à un espace à quatre, cinq ou six dimensions, un concept qui n'est plus facile à visualiser, mais qui est parfaitement logique pour un mathématicien comme Connes. "La même formule continuera de fonctionner", a-t-il déclaré. "L'important, c'est que la géométrie aide énormément à trouver un énoncé, qu'on formule ensuite algébriquement. Certains ont parlé de l'Ange de la géométrie luttant contre le Diable de l'algèbre, mais je crois que c'est une erreur, car il s'agit en réalité d'une dualité entre les deux hémisphères du cerveau : la géométrie utilise les aires visuelles, tandis que l'algèbre utilise les aires linguistiques.".

La proximité géographique des mots, leurs interactions comme en poésie, leur évolution dans le temps, leur assemblage, etc., c'est l'algèbre. Ce qui est difficile lorsqu'on tente d'expliquer les mathématiques ou de décrypter une formule, c'est que pour un mathématicien, un ensemble de formules a du sens ; c'est là qu'il fait appel à son imagination. Il ne l'utilise pas comme un auteur de science-fiction pour inventer des histoires farfelues, loin de là. Il l'utilise pour créer des images mentales à partir des formules. Progressivement, elles prennent sens dans notre esprit, et même si elles ne sont pas aussi simples qu'une image, elles possèdent la même richesse et la même dynamique. Ensuite, l'algèbre prend le dessus, mais il ne s'agit pas d'oublier la géométrie, bien au contraire : elle est toujours là pour nous soutenir. Simplement, les images se détachent de plus en plus de ce que nous pouvons concevoir dans notre environnement quotidien.

Le théorème de Morley stipule que pour tout triangle, quelles que soient les longueurs des côtés, si vous trisectez chaque angle (c'est-à-dire, si vous le divisez en trois angles égaux), alors les lignes de trisection se croiseront toutes aux sommets d'un triangle équilatéral - un triangle dont les côtés sont de longueur égale.

Pour le mathématicien pur, passer de deux à trois dimensions, de trois à quatre, et de quatre à plusieurs, évoque l'idée d'un "espace" multidimensionnel où les choses existent ou se produisent de la même manière que dans notre espace tridimensionnel familier. Si je tiens mon doigt en l'air au-dessus de mon bureau, je peux décrire la position du bout de mon doigt avec trois nombres : la distance perpendiculaire à la surface du bureau et les distances horizontales qui séparent mon doigt des deux bords du bureau, qui sont à angle droit. J'ignore ce que signifierait décrire la position du bout de mon doigt avec quatre, cinq ou six chiffres, mais un mathématicien comme Connes peut l'imaginer aisément et généraliser certaines équations pour décrire un monde où, de même que le bout de mon doigt tridimensionnel projette une ombre bidimensionnelle sur le bureau, le bout de mon doigt tridimensionnel pourrait être vu comme la simple "ombre" d'un bout de doigt quadridimensionnel dans l'espace tridimensionnel.

Après la réunion de l'AIM à Seattle en 1996, un certain temps après, les mathématiciens travaillant sur l'hypothèse de Riemann nourrissaient l'espoir d'une démonstration, grâce à l'implication de Connes. Ce dernier joua un rôle déterminant dans l'organisation d'une réunion à Vienne en 1998, également financée par l'AIM, où il présenta son approche évolutive du problème.

Jon Keating a fait de son mieux pour m'aider à comprendre l'approche de Connes concernant l'hypothèse de Riemann, à grand renfort d'explications vagues et d'analogies très générales. "Il travaille dans un espace qui n'est ni tridimensionnel, ni bidimensionnel, mais qui est d'une abstraction mathématique particulièrement complexe. C'est un objet créé à partir des nombres premiers..." Keating a ensuite décrit un arbre avec un tronc et des branches, chaque branche se ramifiant à son tour, et ainsi de suite, à l'infini. "On pourrait se représenter l'objet dont nous parlons, cet espace, comme quelque chose comme ceci. Imaginez maintenant la limite infinie de cet objet : il est infiniment complexe et alambiqué.".

Alain Connes décrit une particule évoluant dans un espace complexe, créé à partir des nombres premiers. De manière très approximative, les longueurs des branches de l'arbre sont liées aux logarithmes des nombres premiers. C'est ainsi que les nombres premiers interviennent.

J'apprécie beaucoup la manière dont les branches de l'arbre sont comparées aux troncs, mais malgré les efforts louables de Keating, les abstractions des mathématiques de Connes lui échappaient, elles échappaient même à ses capacités d'explication. Cela témoigne du caractère extrême des frontières des mathématiques auxquelles Connes s'attaque.

En 2001, Connes tenait à préciser qu'il ne prétendait pas être proche d'une démonstration, ce qui tombait à pic, car à peu près à la même époque, de nombreux mathématiciens affirmaient que, même s'il avait pu s'en approcher par le passé, il en était certainement très loin désormais. Andrew Granville était de ceux-là.

"Ce que faisait Alain Connes pour ceux qui le comprenaient vraiment était absolument passionnant", a déclaré Granville. "Peut-être que cet homme avait une approche totalement farfelue. C'était tellement différent de ce que beaucoup pensaient. Personnellement, je ne suis pas en mesure de juger le travail de Connes, mais d'après les avis de plusieurs personnes qui l'étudient, il semble que, malgré de belles idées, sa réflexion ne soit pas suffisamment approfondie pour résoudre le problème. Il a de belles idées, de nouvelles observations, c'est un excellent mathématicien, et il était optimiste quant à la résolution de certains problèmes, mais il n'est pas un grand spécialiste de l'hypothèse de Riemann. Lorsque les experts ont commencé à examiner son travail, ils ont réalisé qu'il se contentait peut-être de reformuler une difficulté bien connue. Cela dit, il mérite d'être reconnu pour des travaux passionnants. D'une manière ou d'une autre, cela aura forcément de la valeur à long terme.".

Ce qui est inhabituel chez Connes, c'est que, bien qu'il ait consacré toute sa vie aux mathématiques, il ne s'est passionné pour l'hypothèse de Riemann que récemment. Pour nombre de ceux qui travaillent sérieusement sur la fonction zêta de Riemann - comme de Branges, Iwaniec, Bombieri, Conrey, Heath-Brown - c'est le seul sujet qui les ait jamais vraiment intéressés. Mais les convertis tardifs sont souvent les plus fervents. "C'est probablement le problème le plus fondamental des mathématiques, en ce sens qu'il s'agit de l'imbrication de l'addition et de la multiplication", a déclaré Connes. "C'est une lacune béante dans notre compréhension, car tant que nous ne la comprenons pas vraiment, nous ne pouvons pas dire que nous comprenons la droite. Même la droite elle-même reste extraordinairement mystérieuse.".

Pour Connes, la droite ne se limite pas à l'ensemble des nombres réels. Il travaille avec une droite qui comprend des ensembles entiers d'autres nombres, appelés nombres p-adiques, chaque ensemble contenant une infinité de nombres basés sur un nombre premier différent, d'où le "p" dans p-adique. L'un des indices du caractère inattendu des nombres p-adiques réside dans les relations entre les nombres de la droite p-adique. Leur proximité est liée à la puissance du nombre premier p qui divise leur différence. Autrement dit, deux nombres p-adiques, x et y, sont proches si leur différence, $x-y$, est divisible par une très grande puissance du nombre premier p. L'ensemble des différents nombres p-adiques forme ce que l'on appelle une adèle.

"C'est une question fondamentale et primitive concernant la droite adélique, que nous ne comprenons pas encore", a déclaré Connes. "Il s'agit de comprendre comment l'addition s'accorde avec la multiplication. C'est un problème fondamental ; on ne peut pas l'écarter en disant qu'il n'est pas intéressant. Avec un problème comme "Existe-t-il une infinité de puissances adjacentes, comme 8 et 9 (23 et 32) ?", on peut facilement le rejeter comme inintéressant. Mais un problème comme l'hypothèse de Riemann ne peut pas être écarté sous prétexte qu'il est inintéressant. C'est véritablement l'une des questions les plus fondamentales.".

Après Seattle, Connes s'intéressa aux travaux de Berry et Keating, notamment à la possibilité de réaliser les zéros de Riemann sous la forme d'un spectre particulier. Mais cela posait problème.

Berry et Keating constataient sans cesse qu'un signe particulier, qui devrait être positif si leur intuition était juste, était en réalité négatif. "Quoi que vous essayiez de faire pour le manipuler, le corriger, etc., ça ne marche pas.".

“Ca ne marche jamais”, a déclaré Connes, “mais l'idée qui est apparue dans mes travaux est la suivante : lorsqu'on cherche une interprétation spectrale, on s'intéresse à un spectre d'émission, mais la physique nous réserve bien d'autres surprises. Pour être plus précis : lorsqu'on chauffe une substance chimique pure, on peut faire passer le rayonnement émis à travers un prisme et observer des raies spectrales. On distingue quelques raies brillantes sur un fond sombre. Or, il s'avère qu'en physique, il existe d'autres spectres, comme celui de la lumière provenant d'étoiles lointaines, appelé spectre d'absorption, qui est exactement l'inverse. On reçoit une lumière blanche avec toutes les fréquences présentes, à l'exception de quelques raies sombres. Ces raies indiquent que, lorsque le rayonnement traverse l'atmosphère externe de l'étoile, certaines substances chimiques l'absorbent. Dans ma propre interprétation des zéros comme spectre, ils apparaissent non pas comme un spectre d'émission, mais comme un spectre d'absorption, ce qui explique précisément le signe moins présent dans l'approche de Berry-Keating.”.

Michael Berry est intrigué, mais pas convaincu, par la nouvelle idée de Connes. “Si vous lui en parlez, il vous parlera de spectre d'absorption. Ce qu'il veut dire, c'est que les zéros de Riemann ne seraient pas des niveaux d'énergie d'un système, mais plutôt un continuum de niveaux, certains niveaux étant inaccessibles. Il y aurait donc des antiniveaux, des gaps, qui représenteraient les zéros, du moins selon lui. C'est ce qu'il entend par spectre d'absorption. Pour notre part, nous pensons qu'il s'agit d'une question de formalisme et que tout ce qui peut être décrit comme un spectre d'absorption peut l'être aussi comme un spectre d'émission, moyennant quelques manipulations. Nous en discutons actuellement avec Connes, mais c'est son idée ; elle est peut-être juste, peut-être pas.”.

Fasciné par sa nouvelle approche de l'hypothèse de Riemann, Connes consacra deux ou trois ans après Seattle à l'élaboration d'une formule de trace, qu'il pensait pouvoir mener directement à une démonstration de cette hypothèse. “J'ai affiné la formule et vérifié de nombreux exemples. J'ai constaté qu'elle fonctionne à merveille lorsqu'on considère un nombre fini de nombres premiers, mais qu'il est beaucoup plus difficile de la justifier lorsqu'on en considère une infinité. Je crois avoir trouvé un cadre très élégant, mais il lui manque encore un élément clé. La scène est là - parfaitement agencée, etc. mais nous attendons toujours l'héroïne pour la compléter. Et bien sûr, tant que cet élément n'est pas là, il est impossible d'estimer la distance qui nous sépare de l'objectif.”.

Discuter de mathématiques avancées avec Connes a quelque chose de désarmant. On a l'impression qu'il s'efforce tellement de les rendre compréhensibles qu'on passe pour déraisonnable en ne saisissant pas toujours l'essentiel de son propos. Il affirme même à quel point tout cela est simple : “...le point de départ est extrêmement simple... une formule de trace est quelque chose d'assez simple à expliquer... mathématiquement, c'est plutôt simple à expliquer...”.

Mais si la plupart d'entre nous trouvent les formules mathématiques impénétrables, Connes propose une théorie fascinante expliquant cela et pourquoi il pourrait en être autrement. Il compare la lecture d'expressions mathématiques à la lecture de partitions musicales. Il se pourrait que nous soyons dans la même situation qu'à l'époque où personne ne pouvait “entendre” la musique en lisant une partition. Quelques personnes y parviennent, bien sûr. C'est comme si un chef d'orchestre pouvait, à la vue d'une partition, la déchiffrer sans jouer, contrairement à la plupart des gens. Avec les mathématiques, c'est un peu comme si nous vivions dans une société très peu cultivée où la musique en est encore à ses balbutiements, où son impact sur les individus varie énormément et où elle n'est pas encore perçue comme un langage.

Il est clair que lorsqu'on examine des partitions de Chopin, par exemple, d'une grande précision, on constate un soin extrême apporté à l'écriture, une réflexion approfondie sur l'interaction des instruments, au point de les rapprocher d'un calcul mathématique extrêmement complexe. Seules quelques personnes sont capables de penser la musique de manière abstraite à un niveau très élevé, et rares sont celles qui possèdent une pensée mathématique...

[p. 257]
Note de la traductrice : Pensons à des Martiens en train de faire des mathématiques : Prenons la multiplication de deux nombres négatifs. Imaginez que les Martiens nous disent : "Je ne vois pas où vous voulez en venir : nous, les Martiens, on multiplie -3 par -3 et on obtient -9, et non pas $+9$ (*comme vous les Terriens*).", et vous pourriez imaginer que les Martiens finiraient par se heurter à un mur. Et si, en réalité, les Martiens, dans leur ensemble, éprouvaient ce sentiment de consternation (*à notre encontre, à nous, les Terriens*), mais qu'ils avaient par ailleurs atteint un niveau de sophistication technique et intellectuelle manifestement très élevé, si vous êtes un antiréaliste, vous l'accepteriez et vous diriez : "Bon, d'accord, il y a deux façons différentes de faire des mathématiques.".

Pour un réaliste convaincu comme Alain Connes, de telles idées relèvent de l'hérésie. En effet, il estime que les mathématiques sont plus réelles que ce que nous considérons comme la réalité extérieure solide, et que plutôt que ce soient les mathématiques qui soient imbriquées dans le monde physique, c'est le monde physique qui est imbriqué dans les mathématiques.

"Il est assez étonnant de réaliser que notre conception matérialiste et simpliste de la réalité extérieure repose en fait sur des sables mouvants", a-t-il déclaré, "et qu'après un certain temps, la seule chose réelle à laquelle on puisse se raccrocher est beaucoup plus abstraite. Permettez-moi de vous donner un exemple concret. Si vous prenez un individu, la plupart de ses cellules sont en réalité entièrement remplacées sur une période de plusieurs années, mais alors, qu'est-il vraiment ? Est-il un assemblage de cellules ? Certainement pas, car précisément ces cellules sont remplacées. Mais il est tout autre chose : il est un schéma. Seul ce schéma, cette organisation, importe. La mécanique quantique est frappante à cet égard, car elle démontre clairement que même en s'accrochant à la matière extérieure comme étant la réalité, on constate qu'à l'échelle quantique, des incohérences apparaissent dès qu'on descend à l'infiniment petit, et c'est précisément à cause de la mécanique quantique qu'on les observe. On ne peut donc pas s'y fier comme à la réalité ultime.

Le réalisme passionné de Connes naît de son expérience de la "réalité profonde" des mathématiques. J'ai donc été surpris de découvrir qu'Henryk Iwaniec, tout aussi versé dans les profondeurs de la théorie des nombres, avait un avis différent.

"Je crois que c'est une invention", dit-il. "Je sais que je dis : "Nous avons de si belles choses", ou "Nous sommes piégés ici", ou "Nous sommes piégés de toutes parts", ou encore "Il doit bien y avoir des forces supérieures qui maîtrisent la situation". Mais ce n'est qu'une plaisanterie, je crois que nous avons tout inventé."

Je lui ai alors posé la question des intelligences extraterrestres : “Auraient-elles des mathématiques différentes des nôtres ?”.

“Oui”, m’a répondu Iwaniec fermement.

“Ils n’auraient pas de nombres premiers ?” ai-je demandé.

“Ah, si loin ?”. Il hésita et réfléchit un instant. “Probablement pas. Je ne suis pas doué en science-fiction, je n’en lis pas beaucoup. Mais c’est possible.”.

[p. 263]
Ce serait une tragédie si une simple astuce suffisait à prouver l’hypothèse de Riemann.
Alain Connes

[p. 274]
Alain Connes m’a raconté une fable qui résume bien la nature diabolique de l’hypothèse de Riemann et sa propre capacité à surprendre et à provoquer. Il y a ce mathématicien qui s’est battu avec ce problème pendant de nombreuses années, peut-être vingt ans. À la fin, bien sûr, il est très frustré, mais extrêmement curieux de connaître la réponse, car après tout, elle pourrait être fausse, on ne sait pas ; il se pourrait, par exemple, que presque 100 % des zéros soient sur la ligne critique, mais qu’existent quelques exceptions... Alors il décide de faire tout ce qui est en son pouvoir pour trouver la réponse, et pour cela, il est prêt à vendre son âme au diable. Il prend donc rendez-vous avec le Diable. Bien sûr, le Diable est un homme intelligent, alors il arrive avec les papiers à signer. L’homme signe les papiers, et une fois que c’est fait, il demande au diable : “L’hypothèse de Riemann est-elle vraie ?”. Le Diable le regarde et dit : “Qu’est-ce que l’hypothèse de Riemann ?”. Alors l’homme commence à expliquer : “On prend l’inverse des entiers, on les élève à la puissance z, on fait la somme quand la partie réelle de z est supérieure à 1, et on poursuit analytiquement jusqu’à la bande critique. Ensuite, on cherche les zéros.”. Et le Diable répond : “Je ne connaissais pas ce problème ; il me faut un peu de temps pour y réfléchir. Rendez-vous dans trois jours, au même endroit, à minuit.”. Soit. L’homme est vraiment déconcerté : il a signé les papiers et il ne connaît toujours pas la réponse. Il s’en va donc, attend impatiemment pendant trois jours, puis revient au même endroit à minuit. Il n’y a personne. Il attend une demi-heure. Toujours personne.

Une heure du matin personne ne se présente.

Une heure et demie. Personne ne se présente. Finalement, à deux heures et quart, le Diable arrive en sueur, tout décoiffé, et il dit : “Je n’ai pas pu le faire, mais j’ai pu démontrer un joli petit lemme.” !

Connes éclate d’un rire joyeux. “La morale de l’histoire, c’est que c’est un problème diabolique. Plusieurs possibilités existent, en supposant, comme nous le croyons tous, que ce soit vrai. C’est probablement à un tel niveau, à une telle profondeur, qu’il serait tragique qu’un simple tour de passe-passe suffise à le prouver, un peu comme prendre une barre de métal de cent mètres de haut et la faire tenir en équilibre vertical. Quelque chose d’incroyable, mais possible. Et une telle preuve ne nous apprendrait rien sur notre compréhension de la droite adélique. Ce serait tragique. D’un autre côté, il se pourrait aussi qu'il n'y ait d'autre solution que de comprendre pleinement la structure. Et ce serait formidable, mais cela signifierait que nous sommes encore à une distance inconnue de l'objectif et que nous ne pouvons qu'être patients. Ce serait vraiment tragique qu'il y ait un tour de passe-passe, mais c'est possible, on ne sait jamais. Nous serions très déçus.".