

Classification des Facteurs Injectifs

Cas II_1 , II_∞ , III_λ , $\lambda \neq 1$

A. Connes

Reçu le 2 avril 1975

Introduction

Une algèbre de von Neumann M , agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est dite *injective* lorsque, en tant que sous-espace de l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de tous les opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$, M est l'image d'une projection de norme un. Le résultat principal de cet article est :

Théorème 1. *Tous les facteurs injectifs de type II_1 , agissant dans un espace de Hilbert séparable, sont isomorphes.*

Nous mentionnons maintenant plusieurs applications, qui résolvent toutes des problèmes restés ouverts pendant longtemps.

Corollaire 2. *Tous les sous-facteurs du facteur hyperfini R de Murray et von Neumann ([34]) sont isomorphes à R ou de dimension finie (cf. [41], Pb. 4.4.27).*

Ceci montre que R peut être caractérisé comme le plus petit facteur de dimension infinie ; il peut être plongé dans tous les facteurs de dimension infinie et est, à isomorphisme près, le seul. De plus, toutes les sous-algèbres de von Neumann de R sont isomorphes à un produit d'algèbres de von Neumann $A_n \otimes M_n(\mathbb{C})$, $n = 1, 2, \dots$, et d'une algèbre de von Neumann $A \otimes R$, où A et les A_n sont des algèbres de von Neumann abéliennes. Ainsi, toutes les sous-algèbres de von Neumann de R sont classifiées à isomorphisme près par le nombre d'atomes dans les A_n et A , et la présence d'une projection non-atomique dans les A_n et A .

Le facteur R est le premier dont toutes les sous-algèbres de von Neumann sont classifiées. Dans [12], nous avons montré que le groupe $\text{Out } R = \text{Aut } R / \text{Int } R$ des classes d'automorphismes de R modulo les automorphismes intérieurs est un groupe simple avec une infinité dénombrable de classes de conjugaison indexées par une paire (p, γ) , $p \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma^p = 1$.

Une autre propriété remarquable du facteur R est que si $S \subset R$ est un sous-ensemble auto-adjoint, la sous-algèbre de von Neumann M de R engendrée par S peut être caractérisée par une propriété de bicommutant, analogue au bicommutant dans un facteur de type I :

$$\begin{aligned} x \in M \iff [x, y_n] &\rightarrow 0 \text{ fortement pour toute suite bornée } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } R \text{ telle que } [s, y_n] \\ &\rightarrow 0 \text{ fortement, pour } s \in S. \end{aligned} \tag{1}$$

Corollaire 3. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe discret dénombrable et λ la représentation régulière gauche de $\mathfrak{G}$ dans $l^2(\mathfrak{G})$. Alors si $\mathfrak{G}$ est moyennable, le commutant $\lambda(\mathfrak{G})'$ de λ est une algèbre de von Neumann de la forme $\lambda(\mathfrak{G})' = A \otimes R \oplus \sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes M_n(\mathbb{C})$, où les A_n et A sont des algèbres de von Neumann abéliennes (cf. [41], Pb. 4.4.28).*

Il est connu, d'après la propriété P de Schwartz, que si $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable, l'algèbre de von Neumann $\lambda(\mathfrak{G})'$ n'est pas de la forme ci-dessus. En particulier, si $\mathfrak{G}$ n'a que des classes de conjugaison infinies, le commutant de $\lambda(\mathfrak{G})$ est isomorphe à R .

Corollaire 4. *Tous les facteurs injectifs de type II_{∞} , agissant dans un espace de Hilbert séparable, sont isomorphes (cf. [41], Pb. 4.4.11).*

Soit $R_{0,1} = R \otimes M_{\infty}(\mathbb{C})$ le facteur correspondant. Le corollaire 4 implique que tous les facteurs de type II_{∞} engendrés par une suite croissante de sous-algèbres $*$ -de dimension finie sont isomorphes à $R_{0,1}$. (La terminologie utilisée pour qualifier cette propriété d'approximation d'une algèbre de von Neumann par des algèbres $*$ -de dimension finie est habituellement "hyperfinie". Cependant, elle est inappropriée pour les algèbres de von Neumann non-finies, auquel cas nous suivrons [20] et utiliserons l'adjectif "approximativement de dimension finie".)

Corollaire 5. *Soit G un groupe localement compact connexe séparable et λ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$. Alors le commutant $\lambda(G)'$ est une algèbre de von Neumann de la forme :*

$$\lambda(G)' = A \otimes R \otimes M_{\infty}(\mathbb{C}) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes M_n(\mathbb{C}) \oplus A_{\infty} \otimes M_{\infty}(\mathbb{C}).$$

Nous passons maintenant à des représentations plus générales de tels groupes. Un théorème de J. Glimm et O. Maréchal [30] affirme que pour tout facteur approximativement de dimension finie infini M et pour toute C^* -algèbre séparable non de type I $\mathfrak{A}$, il existe une représentation π de $\mathfrak{A}$ telle que $\pi(\mathfrak{A})' = M$. Ainsi, la classe des facteurs approximativement de dimension finie est la plus petite classe de facteurs adaptée à la théorie des représentations des C^* -algèbres non de type I (avec $\mathfrak{A}$ une C^* -algèbre uniformément hyperfinie, les $\pi(\mathfrak{A})'$ sont certainement approximativement de dimension finie).

Notre résultat suivant caractérise cette classe :

Théorème 6. *Pour un facteur M agissant dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) *M est approximativement de dimension finie ;*
- (b) *M est injectif ;*
- (c) *M a la propriété P de Schwartz [42] ;*
- (d) *M est semi-discret [19].*

L'équivalence entre ces propriétés avait été conjecturée par plusieurs auteurs, en particulier que (a) $\Rightarrow$ (c) était envisagé depuis [42], que (b) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) était conjecturé dans [19]. Le corollaire suivant a été conjecturé par Kadison et Singer.

Corollaire 7. *Soit G un groupe localement compact séparable résoluble ou un groupe localement compact séparable connexe. Alors toute représentation π de G dans un espace de Hilbert engendre une algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie.*

En fait, plus généralement, nous verrons que si G est localement compact séparable et G_0 , la composante connexe de l'identité, est telle que G/G_0 est moyennable, alors tout $\pi(G)''$ est approximativement de dimension finie. Dans [8], en suivant les travaux de Powers, Araki, Woods et Krieger, nous avons introduit des invariants S et T pour les facteurs de type III, basés sur la théorie de Tomita. Cela nous a permis de subdiviser la classe des facteurs de type III en sous-classes III_λ , $\lambda \in]0, 1[$, III_0 et III_1 correspondant au sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$, $S(M)$. Les caractéristiques importantes de cette théorie sont :

- (1) La calculabilité des invariants S , T pour toutes les constructions connues de facteurs ; ceci est dû à la caractérisation, par le théorème de Radon-Nikodym non commutatif [8], des groupes d'automorphismes modulaires comme les sections d'un noyau abstrait $\mathbb{R} \rightarrow \text{Out } M$, où $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$, et aux égalités

$$S(M) = \text{Sp } \delta, \quad T(M) = \text{Ker } \delta.$$

- (2) L'existence et l'unicité de la décomposition discrète d'un facteur de type III_λ , $\lambda \in]0, 1[$, comme produit croisé d'un facteur de type II_∞ par un automorphisme θ de module λ . La décomposition discrète a également été étendue dans [8] au cas III_0 .

Une critique de [8] était que le cas III_1 était laissé de côté. Cependant, le lemme 1.2.5 de [8] était vraiment une idée cruciale de la solution de Takesaki du cas III_1 , par l'introduction de produits croisés continus.

Une critique plus sérieuse était l'absence, à l'époque, de toute classification raisonnable :

- (a) des facteurs de type II_∞ ,
- (b) de leurs automorphismes de module λ .

Dans [12], nous avons montré (Corollaire 6) que tous les automorphismes θ de $R_{0,1} = R \otimes M_\infty(\mathbb{C})$ ayant le même module $\lambda \neq 1$ sont conjugués. Lorsque M est un facteur injectif de type III, le facteur de type II_∞ associé dans une décomposition discrète hérite de l'injectivité de M et nous appliquons maintenant le corollaire 4 pour conclure :

Théorème 8. *Pour chaque $\lambda \in]0, 1[$, tous les facteurs injectifs de type III_λ sont isomorphes au facteur de Powers R_λ .*

Dans le cas III_0 , la décomposition discrète de M permet de montrer que M est obtenu comme produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un seul automorphisme. Il découle alors d'un théorème de W. Krieger [29] que de tels facteurs sont classifiés par des flots ergodiques (non transitifs). Dans le cas III_1 , le seul facteur injectif connu est le facteur R_∞ d'Araki-Woods. Je suis reconnaissant à E. J. Woods pour son aimable invitation à l'Université Queen's où le présent travail a été effectué.

Table des matières

1. Préliminaires	4
1.1. Joint distribution of pairs of positive square integrable operators affiliated with a semi-finite von Neumann algebra	4
1.2. Stabilité de la décomposition polaire des opérateurs de carré intégrable sous des perturbations de carré intégrable	5
1.3. Représentation de l'ultraproduit de facteurs de type II_1	9
1.4. Un lemme technique	9

2. Propriété Γ et la C^* -algèbre engendrée par un facteur fini et son commutant	10
3. Une caractérisation des automorphismes approximativement intérieurs	15
4. Produit tensoriel d'automorphismes centralement triviaux de facteurs finis	21
5. Tous les facteurs injectifs de type II_1 sont isomorphes	26
6. Propriétés de stabilité de la classe des algèbres de von Neumann injectives	33
7. Classification des facteurs injectifs	36

1. Préliminaires

1.1. Joint distribution of pairs of positive square integrable operators affiliated with a semi-finite von Neumann algebra

Soit N une algèbre de von Neumann semi-finie dénombrablement décomposable et τ une trace normale semi-finie fidèle sur N . Nous utilisons les espaces L^p de Dixmier [14] et Segal [43], pour les valeurs $p = 1, 2$. Un élément x de $L^p(N, \tau)$ est un opérateur fermé affilié à N dont le domaine est fortement dense par rapport à N ([43], Def. 2.1). Un opérateur positif h affilié à N est dit intégrable lorsque sa mesure spectrale : $\nu(B) = \tau(\chi_B(h))$, pour tout sous-ensemble borélien B de $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$, satisfait $\int \lambda d\nu(\lambda) < \infty$, et dans ce cas on définit $\tau(h)$ comme la valeur de $\int \lambda d\nu(\lambda)$. (Voir [43], Corollaire 12.6.) Notons que la mesure spectrale ν est une mesure de Radon sur $]0, +\infty[$, lorsque h est intégrable ; $\nu([0])$ peut être $+\infty$ mais cela n'affecte pas l'égalité $\tau(h) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \lambda d\nu(\lambda)$ (voir [43]). Pour $x \in L^p(N, \tau)$, $|x|^p$ est intégrable et on a

$$(\tau(|x|^p))^{1/p} = \|x\|_p \quad ([43], 12.11; 3.8; 12.14).$$

Proposition 9. *Soient N et τ comme ci-dessus, $X = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$, H, K les fonctions continues $H(x, y) = x$, $K(x, y) = y$, $(x, y) \in X$. Soient h, k des éléments positifs de $L^2(N, \tau)$. Alors il existe une mesure de Radon positive μ sur X telle que :*

- (a) *Pour toute fonction borélienne positive f sur $[0, +\infty[$ avec $f(0) = 0$ et $f(h)$ intégrable (resp. $f(k)$), la fonction $f(H)$ est intégrable sur X et $\tau(f(h)) = \mu(f(H))$ (resp. $\tau(f(k)) = \mu(f(K))$).*
- (b) *Pour toute paire f, g de fonctions boréliennes complexes sur $[0, +\infty[$, avec $f(0) = g(0) = 0$, $f(h), g(k) \in L^2(N, \tau)$, on a :*

$$\|f(h) - g(k)\|_2 = \|f(H) - g(K)\|_2.$$

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$, on a $\chi_{[\epsilon, \infty[}(h)\epsilon^2 \leq h^2$ donc $\chi_A(h)$ est intégrable pour tout sous-ensemble borélien A de $[\epsilon, \infty[$. Par conséquent, comme dans [33], Appendice, il existe une mesure positive finie μ_ϵ sur $[\epsilon, \infty[\times [0, \infty[$ telle que $\mu_\epsilon(A \times B) = \tau(\chi_A(h)\chi_B(k))$ pour tous boréliens $A \subset [\epsilon, \infty[$, $B \subset [0, \infty[$. De même, on obtient une mesure μ^ϵ sur $[0, \infty[\times [\epsilon, \infty[$ avec, pour $A \subset [0, \infty[$, $B \subset [\epsilon, \infty[$, $\mu^\epsilon(A \times B) = \tau(\chi_A(h)\chi_B(k))$. Comme les boréliens du plan forment la plus petite classe monotone contenant les unions disjointes de rectangles, on voit que toutes les mesures $\mu_\epsilon, \mu^\epsilon$ coïncident sur les intersections de leurs domaines et définissent donc une unique mesure de Radon positive μ

sur X telle que $\mu(A \times B) = \tau(\chi_A(h)\chi_B(k))$ pourvu que $0 \notin \bar{A}$ ou $0 \notin \bar{B}$, $A, B \subset [0, \infty[$. Ainsi $\mu(\chi_A(H)) = \mu(A \times \mathbb{R}_+) = \tau(\chi_A(h))$, pourvu que $0 \notin \bar{A}$, et la première assertion s'ensuit. Par conséquent, nous avons

$$\|f_1(H) - f_2(H)\|_2 = \|f_1(h) - f_2(h)\|_2,$$

pour f_1, f_2 fonctions boréliennes complexes sur $[0, \infty[$ s'annulant en 0 et rendant $f_j(h)$ de carré intégrable. Donc, pour prouver (b), on peut supposer que f (et g) est de la forme : $f = \sum \lambda_j \chi_{A_j}$, $0 \notin \bar{A}_j$. Alors $\tau(f(h)\overline{g(k)}) = \mu(f(H)\overline{g(K)})$ et donc (b) s'ensuit. $\square$

La proposition I.1 résume l'avantage de la norme L^2 sur les autres normes L^p , $p \neq 2$, pour lesquelles elle n'est plus vraie. La section suivante contient le lemme technique principal de cet article : le Théorème 1.2.2.

1.2. Stabilité de la décomposition polaire des opérateurs de carré intégrable sous des perturbations de carré intégrable

Soit $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$ l'espace de Hilbert des opérateurs de carré intégrable affiliés à l'algèbre de von Neumann N avec trace normale semi-finie fidèle τ .

Chaque $x \in \mathcal{H}$ a une décomposition polaire unique : $x = u(x)|x|$ où $u(x)$ est une isométrie partielle dont le support est égal au support de x et où $|x| = (x^*x)^{1/2}$.

L'application $x \mapsto |x|$ a été étudiée dans [38] et il résulte de [38] que pour x et $y \in \mathcal{H}$ normaux, on a

$$\||x| - |y|\|_2 \leq \|x - y\|_2.$$

Dans le cas non abélien, cette inégalité n'est plus vraie mais l'inégalité de Powers-Størmer [36] la remplace :

Proposition 10. *Soient N et τ comme ci-dessus. Soient $x, y \in L^2(N, \tau)$, alors*

$$\||x| - |y|\|_2^2 \leq \||x|^2 - |y|^2\|_1 \leq \|x - y\|_2(\|x\|_2 + \|y\|_2).$$

Démonstration. Pour la première inégalité, voir [36] lorsque N est un facteur de type I et [24], Lemme 2.10 pour le cas général. De plus, $\||x|^2 - |y|^2\|_1$ est la distance dans N_* entre les états vectoriels associés à x et y , et est donc inférieure à $\|x - y\|_2(\|x\|_2 + \|y\|_2)$. $\square$

Même lorsque N est abélienne, l'application $x \mapsto u(x)$ est assez discontinue. Pour chaque $a > 0$, soit u_a l'application de $\mathcal{H} \subset L^2(N, \tau)$ vers l'ensemble des isométries partielles de N définie par $u_a(x) = u(x)E_a(|x|)$ où E_a est la fonction caractéristique de $]a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$. Cependant, u_a est encore discontinue et même dans le cas abélien, nous ne pouvons pas trouver pour chaque $\delta > 0$ un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in L^2$ il existe un $a > 0$ satisfaisant $u_a(x) \neq 0$ et :

$$y \in L^2, \quad \|y - x\|_2 \leq \epsilon \|x\|_2 \implies \|u_a(x) - u_a(y)\|_2 \leq \delta \|u_a(x)\|_2.$$

Cependant, nous démontrerons la continuité suivante.

Théorème 11. *Soient N, τ comme ci-dessus. Soient $\delta \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, posons $\epsilon = (\delta/6n)^8$. Alors pour tout sous-ensemble $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ de $L^2(N, \tau)$ de diamètre inférieur à $\epsilon \|x_1\|_2$, il existe un $a > 0$ tel que*

$$\|u_a(x_i) - u_a(x_1)\|_2 \leq \delta \|u_a(x_1)\|_2, \quad \|x_i - u_a(x_i)|x_i|\|_2 \leq \delta \|x_i\|_2.$$

Comme corollaire facile du Théorème 1.2.2, nous avons :

Corollaire 12. Soient N, τ comme ci-dessus, $\delta \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon = (\delta/24n)^n$. Alors pour tous opérateurs unitaires $(u_j)_{j=1, \dots, n-1}$ dans N et toutes projections équivalentes $e_1, e_2 \in N$ telles que $\| [u_k, e_s] \|_2 \leq \epsilon \| e_s \|_2$ pour tous k et s , on peut trouver une projection $e \leq e_1 \vee e_2$ telle que

$$\| ee_s - e_s \|_2 \leq \delta \| e_s \|_2, \quad (s = 1, 2)$$

$$\| [e, u_k] \|_2 \leq \delta \| e \|_2. \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

Pour la démonstration de 1.2.2, nous commençons par énoncer les propriétés élémentaires des applications $u_a : u_a(x) = u(x)E_a(|x|)$.

Lemme 13. Soient N, τ comme ci-dessus et $a > 0$, $x \in L^2(N, \tau)$.

- (1) $u_a(vx) = vu_a(x)$, $u_a(xv) = u_a(x)v$, pour tout opérateur unitaire v de N .
- (2) $u_a(\theta(x)) = \theta(u_a(x))$, $\theta \in \text{Aut } N$.
- (3) Soit $x^b = xE_b|x|$, $b > 0$, alors $u_a(x^b) = u_a(x)$ et $u_a(x^b)|x^b| = u_a(x)|x|$, où $c = \sup(a, b)$.
- (4) $u_a(h) = u_{f(a)}(f(h))$, $h \in L^2(N, \tau)^+$, f bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. (1), (2) et (4) sont claires. Pour (3), $|xE_b|x| = |x|E_b|x|$ et $u(xE_b|x|) = u(x)E_b|x|$. Pour $t > 0$, $E_a(tE_b(t)) = 0$ si $t \leq c$, et $= 1$ si $t > c$, donc $E_a(|x^b|) = E_a(|x|)$ et comme $E_b(|x|)E_a(|x|) = E_a(|x|)$, on obtient (3). $\square$

Lemme 14. Soient N, τ comme ci-dessus, $x \in L^2(N, \tau)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \| u_{a^{1/2}}(x) - u_{a^{1/2}}(|x|) \|_2^2 da = \| x - |x| \|_2^2.$$

Démonstration. Soit $u = u(x)$, $h = |x|$. Pour toute fonction borélienne f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(h) \in L^2(N, \tau)$, $f(0) = 0$, nous avons

$$\| uf(h) - f(h) \|_2^2 = \tau(f(h)(u^* - 1)(u - 1)f(h)) = \tau(f(h)^2(2 - u - u^*)).$$

L'expression que nous voulons calculer est

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \| uE_{a^{1/2}}(h) - E_{a^{1/2}}(h) \|_2^2 da = \int_{\mathbb{R}_+^*} \tau((E_{a^{1/2}}(h))^2(2 - u - u^*)) da.$$

Mais $(E_{a^{1/2}}(h))^2 = E_{a^{1/2}}(h) = E_a(h^2)$ par 1.2.4 (4) et $\int_{\mathbb{R}_+^*} E_a(h^2) da$ est égal à h^2 . Or $\tau(h^2(2 - u - u^*)) = \| uh - h \|_2^2$. $\square$

Lemme 15. Soient N et τ comme ci-dessus, $h, k \in L^2(N, \tau)^+$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \| u_{a^{1/2}}(h) - u_{a^{1/2}}(k) \|_2^2 da \leq \| h - k \|_2 \| h + k \|_2.$$

Démonstration. Comme h et k sont positifs, nous avons $u_a(h) = E_a(h)$ pour chaque $a > 0$. Ainsi, par la Proposition 1.1, nous pouvons supposer que $N = L^\infty(X, \mu)$, que $\tau = \mu$ et que h et k sont des fonctions de carré intégrable sur X . Nous avons $\int_{\mathbb{R}_+^*} |E_a(x) - E_a(y)| da = |x - y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, donc par le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|E_a(h^2) - E_a(k^2)\|_1 da = \|h^2 - k^2\|_1.$$

Comme

$$|E_a(h^2) - E_a(k^2)| = |E_a(h^2) - E_a(k^2)|^2,$$

nous avons

$$\|E_a(h^2) - E_a(k^2)\|_2^2 = \|E_a(h^2) - E_a(k^2)\|_1,$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|E_a(h^2) - E_a(k^2)\|_2^2 da = \|h^2 - k^2\|_1 \leq \|h - k\|_2 \|h + k\|_2.$$

□

Remarque 16. On peut montrer qu'il n'existe pas de constante $K > 0$ telle que l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|E_a(h) - E_a(k)\|_1 da \leq K \|h - k\|_1$$

soit vérifiée pour tous $h, k \in L^1(N, \tau)$ (sauf si N est de type I borné).

Démonstration du Théorème 1.2.2. Nous supposons que $\|x_1\|_2 = 1$. Lorsque $b \rightarrow 0+$, les $x_j^b = x_j E_b |x_j|$ convergent dans L^2 vers x_j , donc en utilisant 1.2.4 (3), nous voyons que nous pouvons supposer que tous les x_j et donc x_1 sont de rang fini. Alors, en remplaçant tous les x_j par vx_j où v est un opérateur unitaire tel que $vx_1 > 0$, nous pouvons supposer, en utilisant 1.2.4 (1), que $x_1 > 0$. Par 1.2.1 :

$$\|x_j - |x_j|\|_2 \leq \|x_j - x_1\|_2 + \||x_j| - |x_1|\|_2 \leq \epsilon + 2\epsilon^{1/2} \leq 3\epsilon^{1/2}.$$

Donc, par le Lemme 1.2.5 :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|u_{a^{1/2}}(x_j) - u_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2 da \leq 9\epsilon.$$

Comme $\||x_j| - x_1\|_2 \leq 2\epsilon^{1/2}$, le Lemme 1.2.6 montre que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|u_{a^{1/2}}(|x_j|) - u_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2 da \leq (2\epsilon^{1/2}) \times 3 = 6\epsilon^{1/2}.$$

L'inégalité $\|x + y\|_2^2 \leq 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$, $x, y \in L^2(N, \tau)$, montre que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \|u_{a^{1/2}}(x_j) - u_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2 da \leq 18\epsilon + 12\epsilon^{1/2} \leq 30\epsilon^{1/2}.$$

Soit maintenant G la fonction décroissante de $]0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ telle que

$$G(a) = \tau(E_a(x_1^2)) = \tau(E_{a^{1/2}}(x_1)) = \|E_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2 = \|u_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2.$$

Comme $\|x_1\|_2^2 = 1$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} G(a) da = \tau \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} E_a(x_1^2) da \right) = \tau(x_1^2) = 1$$

donc $G(a) da$ est une mesure de probabilité sur $]0, +\infty[$. Soit

$$\xi_j = \{b > 0, \|u_{b^{1/2}}(x_j) - u_{b^{1/2}}(x_1)\|_2^2 > \epsilon^{1/4} \|u_{b^{1/2}}(x_1)\|_2^2\}.$$

Pour $a \in \xi_j$, nous avons

$$G(a) < \epsilon^{-1/4} \|u_{a^{1/2}}(x_j) - u_{a^{1/2}}(x_1)\|_2^2$$

donc

$$\int_{\xi_j} G(a) da < \epsilon^{-1/4} 30\epsilon^{1/2} = 30\epsilon^{1/4}.$$

Soit $\mathfrak{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, tous les $\xi_j, j = 1, \dots, n$, et avec $\int_{\mathfrak{V} \cap \mathbb{R}_+^*} G(a) da \leq 30n\epsilon^{1/4}$. Alors le plus petit $b > 0, b \notin \mathfrak{V}$, satisfait

$$\int_0^b G(a) da \leq 30n\epsilon^{1/4} < 1;$$

donc $b < \infty$. Soit l' a requis dans 1.2.2 soit $a = b^{1/2}$. Comme $b \notin \xi_j$, nous avons

$$\|u_a(x_j) - u_a(x_1)\|_2 \leq \epsilon^{1/8} \|u_a(x_1)\|_2 \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_0^b E_s(t^2) ds = t^2(1 - E_b(t^2)) + bE_b(t^2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x_1^2(1 - E_b(x_1^2))\|_1 &= \tau(x_1^2(1 - E_b(x_1^2))) \\ &\leq \tau \left(\int_0^b E_s(x_1^2) ds \right) \\ &= \int_0^b \tau(E_s(x_1^2)) ds = \int_0^b G(s) ds \leq 30n\epsilon^{1/4}. \end{aligned}$$

Comme $E_b(x_1^2) = E_a(x_1) = u_a(x_1)$, $\|x_1\|_2 = 1$, nous obtenons :

$$\|x_1 - u_a(x_1)x_1\|_2 \leq 6n^{1/2}\epsilon^{1/8}\|x_1\|_2.$$

□

Démonstration du Corollaire 1.2.3. Soit $x_0 = (e_1 + e_2)^{1/2}$, $x_j = u_j x_0 u_j^*$, $j = 1, \dots, n-1$. Tous les x_j sont positifs et nous avons :

$$\begin{aligned} \|u_j e_k u_j^* - e_k\|_1 &\leq 2\epsilon \|e_k\|_1, \\ \|u_j x_0^2 u_j^* - x_0^2\|_1 &\leq 2\epsilon \|x_0^2\|_1, \\ \|u_j x_0 u_j^* - x_0\|_2 &\leq (2\epsilon)^{1/2} \|x_0\|_2 \quad (\text{Proposition 1.2.1}). \end{aligned}$$

Ainsi les x_j forment un ensemble de diamètre inférieur à $4\epsilon^{1/2}\|x_0\|_2$. Soit, par 1.2.2, $a > 0$ tel que

$$\|E_a(x_0) - E_a(x_j)\|_2 \leq 6n(4\epsilon^{1/2})^{1/8}\|E_a(x_0)\|_2,$$

$$\|x_0 E_a(x_0) - x_0\|_2 \leq 6n(4\epsilon^{1/2})^{1/8}\|x_0\|_2.$$

Soit $e = E_a(x_0)$. Alors comme $6n(4\epsilon^{1/2})^{1/8} \leq \delta/2$, nous avons

$$\|[e, u_j]\|_2 \leq \delta\|e\|_2,$$

$$\tau(x_0^2(1 - e)) \leq \frac{1}{4}\delta^2\tau(x_0^2),$$

$$\tau(e_1(1 - e)) \leq \frac{1}{4}\delta^2\tau(x_0^2) \leq \delta^2\tau(e_1),$$

$$\|e_1(e - 1)\|_2 \leq \delta\|e_1\|_2.$$

□

1.3. Représentation de l'ultraproduit de facteurs de type II₁

Soit $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de facteurs avec traces normalisées τ_k . Nous définissons comme dans [17], p. 451, l'ultraproduit $\prod_\omega N_k$, pour un ultrafiltre ω sur $\mathbb{N}$, comme le quotient de l'algèbre de von Neumann produit $\prod_1^\infty N_k$ par l'idéal nul de la trace $\tau_\omega : \tau_\omega((x_k)) = \lim_{k \rightarrow \omega} \tau_k(x_k)$. Comme dans [17], p. 451, l'ultraproduit est un facteur avec trace normalisée τ_ω .

Soit chaque N_k agissant canoniquement dans $\mathcal{H}_k = L^2(N_k, \tau_k)$. Soit $\mathcal{H}_\omega$ l'ultraproduit des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_k$ pour ω , de sorte qu'un $\xi \in \mathcal{H}_\omega$ est représenté par une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\xi_k \in \mathcal{H}_k$, $\|\xi\| = \lim_\omega \|\xi_k\|$. Chaque suite bornée d'opérateurs $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k)$ définit un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\omega)$ par $A(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} = (A_k \xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit 0 si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k\| = 0$. Il s'ensuit que, en général, $\prod_\omega N_k$ n'agit pas sur $\mathcal{H}_\omega$. Cependant, $\prod_\omega N_k$ agit sur un sous-espace de $\mathcal{H}_\omega$ identifié par la condition d'équi-intégrabilité suivante :

Proposition 17. *Soient N_k , $\mathcal{H}_k = L^2(N_k, \tau_k)$ comme ci-dessus. Soit $\omega\mathcal{H}$ l'ensemble des $\xi \in \mathcal{H}_\omega$ qui satisfont, avec $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$:*

$$(*) \quad \text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } a > 0 \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \omega} \|E_a(|\xi_k|)|\xi_k\|_2 < \epsilon. \quad (2)$$

Alors $\omega\mathcal{H}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\omega$ et $\prod_\omega N_k$ agit sur $\omega\mathcal{H}$ de manière standard avec le vecteur $1 = (1)_{k \in \mathbb{N}}$ comme vecteur trace cyclique et séparant, et l'application $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (J_k \xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme involution canonique.

Démonstration. Nous devons seulement vérifier que $\omega\mathcal{H}$ est la fermeture dans $\mathcal{H}_\omega$ de l'ensemble des vecteurs $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\|x_k\|_\infty$ borné. Supposons que $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfasse (*) et soit $\epsilon > 0$. Alors pour un certain $a > 0$, on a $\lim_{k \rightarrow \omega} \|\xi_k E_a(|\xi_k|)\|_2 < \epsilon$, de sorte que le vecteur γ , $\gamma_k = \xi_k(1 - E_a)|\xi_k|$, est à une distance inférieure à ϵ de ξ et satisfait $\|\gamma_k\|_\infty \leq a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Réciproquement, soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $a > 0$, et supposons que $\|\xi_k\|_2 \leq 1$, $\|\xi_k - x_k\|_2 \leq \epsilon$ pour tout k , où $\|x_k\|_\infty \leq a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par 1.2.1,

$$\| |\xi_k| - |x_k| \|_2 \leq (3\epsilon)^{1/2}.$$

En utilisant la Proposition 1.1, un calcul facile donne $\| |\xi_k| E_{2a}(|\xi_k|) \|_2 \leq 2(3\epsilon)^{1/2}$. □

Dans le cas particulier $N_k = N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous notons par N^ω l'ultraproduit $\prod_\omega N$ et, comme dans [11], par N_ω le commutant relatif de N dans N^ω , où N est canoniquement plongé dans N^ω .

1.4. Un lemme technique

La plupart des normes que l'on utilise sur une algèbre de von Neumann M satisfont les conditions :

$$\text{norm}(a) = \text{norm}(|a|), \quad \text{pour } a \in M \text{ normal},$$

$$a, b \in M^+, \quad ab = ba \quad \text{et} \quad a \leq b \quad \text{impliquent} \quad \text{norm } a \leq \text{norm } b.$$

En particulier, toutes les normes L^p , $p \in [1, \infty]$, relatives à une trace satisfont ces conditions. Ceci montre l'intérêt du lemme suivant :

Lemme 18. *Soit M une algèbre de von Neumann, $e, f \in M$ deux projections finies équivalentes. Alors il existe un unitaire $W \in M$ tel que :*

- (a) $WeW^* = f$;
- (b) W commute avec $|e - f|$;
- (c) $|W - 1| \leq 3|e - f|$.

Démonstration. Soit c la plus grande projection du centre de l'algèbre de von Neumann N engendrée par e, f , telle que N_c soit de type I_2 . Comme N_{1-c} est abélienne, on peut trouver des projections $e', e'', f', f'' \dots$ $e'' = (1 - c)e - e \wedge f$, $e' + e'' = e$, $f'' = (1 - c)f - e \wedge f$, $f' + f'' = f$ telles que $e' \wedge (1 - f') = 0$, $(1 - e') \wedge f' = 0$, que $e'', f'', e' \vee f'$ sont deux à deux orthogonales et que $|e - f| = e'' + f'' + |e' - f'|$.

Soit u l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $f'e'$, alors $|u - e'| \leq \sqrt{2}|e' - f'|$. En fait, on a seulement besoin de le vérifier pour des projections unidimensionnelles $e', f' \in M_2(\mathbb{C})$, auquel cas $|e' - f'|$ est le scalaire $\sin \theta$ où $\theta \in [0, \pi/2]$ est l'angle entre e', f' . De plus, dans ce cas $\|u - e'\| = 2 \sin \theta/2$ donc l'inégalité est juste $(\cos \theta/2)^{-1} \leq \sqrt{2}$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$. On a $u^*u = e'$, $uu^* = f'$; soit v satisfaisant $v^*v = e''$, $vv^* = f''$. Alors $|v - e''| = \sqrt{2}e''$ puisque $e''f'' = 0$. Alors $W_1 = u + v$ satisfait $W_1^*W_1 = e$, $W_1W_1^* = f$, $[W_1, |e - f|] = 0$ et $|W_1 - e| \leq \sqrt{2}|e - f|$.

Comme $(e \vee f - e) \sim (e \vee f - f)$, nous obtenons une isométrie partielle W_2 commutant avec $|e - f|$ et satisfaisant

$$|W_2 - ((e \vee f) - e)| \leq \sqrt{2}|e - f|, \quad W_2^*W_2 = e \vee f - e, \quad W_2W_2^* = e \vee f - f.$$

Il s'ensuit que, avec $a = W_1 - e$, $b = W_2 - (e \vee f - e)$, on a :

$$|a + b| \leq 2\sqrt{2}|e - f| \leq 3|e - f|.$$

(Si M agit dans $\mathcal{H}$, on a $\| |a + b| \xi \| = \| a\xi + b\xi \| \leq 2\sqrt{2}\| |e - f| \xi \|$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et comme la racine carrée est monotone au sens des opérateurs, on obtient l'inégalité ci-dessus.) Finalement, $W = (1 - e \vee f) + W_1 + W_2$ satisfait (a), (b), (c). $\square$

2. Propriété Γ et la C^* -algèbre engendrée par un facteur fini et son commutant

Soit N un facteur fini, τ la trace canonique sur N . Nous rappelons que N a la propriété Γ de Murray et von Neumann si et seulement si pour tout $x_1, \dots, x_m \in N$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un opérateur unitaire u avec $\tau(u) = 0$ tel que $\| [u, x_j] \|_2 \leq \epsilon$ pour tout j .

Théorème 19. Soit N un facteur de type II_1 , agissant de manière standard dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$; soit J l'involution canonique du vecteur cyclique et séparant $1 \in L^2(N, \tau)$.

Les conditions suivantes sur N sont équivalentes :

- (a) N a la propriété Γ .
- (b) Pour tout sous-groupe de type fini $\mathcal{G} \subset \text{Int } N$, il existe un état non-normal $\mathcal{G}$ -invariant sur N .
- (c) Pour tous opérateurs unitaires $u_1, \dots, u_n \in N$, il existe une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\xi_k \in \mathcal{H}$, $\|\xi_k\| = 1$, $(u_j - Ju_j^*J)\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, mais telle que $|\langle \xi_k, 1 \rangle|$ ne tende pas vers 1 lorsque $k \rightarrow \infty$.
- (d) La C^* -algèbre $C^*(N, N')$ engendrée par N et N' dans $\mathcal{H}$ ne contient aucun opérateur compact non nul : $C^*(N, N') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{0\}$.

La possibilité $C^*(N, N') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\}$ a été montrée pour la première fois dans [2], par C. Akemann et P. Ostrand.

Dans [9], nous avons défini un facteur plein comme un facteur M pour lequel les automorphismes intérieurs $\text{Int } M$ forment un sous-groupe fermé du groupe $\text{Aut } M$ des automorphismes de M avec la topologie de la convergence simple en norme dans M_* . Nous avons montré que pour les facteurs II_1 à prédual séparable, la plénitude est équivalente à la négation de la propriété Γ . (Voir aussi [40].)

De 2.1, il s'ensuit que N est plein si et seulement si $C^*(N, N') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\}$, et donc si et seulement si $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset C^*(N, N')$ par l'irréductibilité de $C^*(N, N')$.

Corollaire 20. Soit N un facteur semi-discret de type II_1 ; alors N a la propriété Γ .

Démonstration. Lorsque N est semi-discret, l'application canonique $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i b_i$ du produit tensoriel algébrique $N \odot N'$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ s'étend en un isomorphisme du produit tensoriel C^* de N par N' sur $C^*(N, N')$. Par un théorème de M. Takesaki, comme N et N' sont des C^* -algèbres simples, leur produit tensoriel C^* l'est aussi ([44]), et donc $C^*(N, N')$ l'est aussi. Donc

$$C^*(N, N') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\} \implies C^*(N, N') = \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

mais ceci implique que $1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ de sorte que $\mathcal{H}$ est de dimension finie. □

Le corollaire suivant a été utilisé dans [18] mais, cependant, la démonstration qui y est donnée est fautive.

Corollaire 21. Soient N_1, N_2 des facteurs de type II_1 , alors $N_1 \otimes N_2$ est plein si et seulement si N_1 et N_2 sont pleins.

Démonstration. Si N_1 ou N_2 a la propriété Γ , $N_1 \otimes N_2$ l'a aussi. Supposons que N_1 et N_2 soient pleins et que N_j agisse dans $\mathcal{H}_j$ comme d'habitude. Par 3.1 (d), soit $K_1 \in C^*(N_1, N'_1) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, $K_1 \neq 0$, et K_2 de même. Comme la C^* -algèbre engendrée par $N_1 \otimes N_2$, $N'_1 \otimes N'_2$ contient $C^*(N_1, N'_1) \otimes 1$ et $1 \otimes C^*(N_2, N'_2)$, on voit qu'elle contient l'opérateur compact non nul $K_1 \otimes K_2$. □

Nous démontrons maintenant quelques lemmes pour la démonstration du Théorème 2.1.

Lemme 22. Soit N un facteur de type II_1 satisfaisant 2.1 (b), alors pour tous opérateurs unitaires $u_1, \dots, u_n \in N$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une projection non nulle $e \in N$, $\tau(e) \leq \epsilon$, telle que

$$\| [u_j, e] \|_2 \leq \epsilon \| e \|_2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un état singulier $\phi \in N^*$, invariant sous les $\text{Ad } u_j$, $j = 1, \dots, n$ (utiliser [41], 1.17.7). Soit alors, par [45], $f \in N$ une projection avec $\phi(f) = 1$, $\tau(f) \leq \epsilon$ ($\epsilon < 1/2$). Soit $\mathfrak{T} = \{\psi \text{ état sur } N \mid \psi(f) \geq 1 - \epsilon\} \subset N^*$. Nous identifions le dual de N_* avec $(N_*)^*$ par la dualité

$$(\psi_1, \dots, \psi_n)(x_1, \dots, x_n) = \sum \psi_k(x_k).$$

Avec cette identification, $(N_*)^*$ a N^* comme espace de Banach dual et N^* a $(N_*)^*$ comme espace de Banach dual.

Soit

$$\mathfrak{D} = \{(\psi - \psi \circ \text{Ad } u_1, \dots, \psi - \psi \circ \text{Ad } u_n), \psi \in \mathfrak{T} \cap N_*\}.$$

Par construction, $\mathfrak{D}$ est un sous-ensemble convexe de $(N_*)^*$, et l'adhérence de $\mathfrak{D}$ dans $(N_*)^*$ pour la topologie faible de $(N_*)^*$ correspondant à N^* , contient

$$(\phi - \phi \circ \text{Ad } u_1, \dots, \phi - \phi \circ \text{Ad } u_n) = (0, \dots, 0),$$

parce que ϕ appartient à l'adhérence faible dans N^* de $\mathfrak{T} \cap N_*$.

Ainsi, l'adhérence faible de $\mathfrak{D}$ dans $(N_*)^*$ contient 0 et comme $\mathfrak{D}$ est convexe, l'adhérence en norme de $\mathfrak{D}$ dans $(N_*)^*$ contient 0.

Soit $\psi \in N_* \cap \mathfrak{T}$ satisfaisant $\|\psi \circ \text{Ad } u_j - \psi\| \leq \epsilon$ pour $j = 1, \dots, n$. Soit $\psi'(x) = (1/\psi(f))\psi(fxf)$. Comme $\psi(f) \geq 1 - \epsilon$, on a, pour tout $x \in N$,

$$\psi((1-f)x) \leq (\psi(1-f))^{1/2}\|x\| \leq \epsilon^{1/2}\|x\|,$$

donc $\|\psi' - \psi\| \leq 3\epsilon^{1/2}$. Soit $h \in L^2(N, \tau)$, $h \geq 0$, $\tau(h^2 \cdot) = \psi'$. On a $\text{support } h \leq f$ et

$$(\|u_j h u_j^* - h\|_2)^2 \leq \|\psi' - \psi' \circ \text{Ad } u_j\| \leq 7\epsilon^{1/2} \quad (1.2.1)$$

Pourvu que $3\epsilon^{1/4} < (1/6n)^8$, il existe par le Théorème 1.2.2 un $a > 0$ tel que

$$u_a(h) \neq 0 \quad \text{et} \quad \|u_a(h_j) - u_a(h)\|_2 \leq \delta \|u_a(h)\|_2,$$

où $\delta = 6n(3\epsilon^{1/4})^{1/8} < 1$ et $h_j = u_j h u_j^*$. Soit $e = u_a(h)$; alors $u_a(h_j) = u_j e u_j^*$, donc $\|[u_j, e]\|_2 \leq \delta \|e\|_2$. De plus, $\tau(e) \leq \tau(\text{support } h) \leq \tau(f) \leq \epsilon$. Mais ϵ est arbitraire. $\square$

Lemme 23. *Soit N un facteur II_1 satisfaisant (b), et f une projection non nulle $f \in N$. Alors N_f satisfait (b).*

Démonstration. Soient $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N_f , $\bar{u}_j = u_j + 1 - f$. Soit K un sous-facteur de type I_q de N avec une projection minimale $e \leq f$ et $\mathfrak{g}$ le sous-groupe de $\text{Int } N$ engendré par les $\text{Ad } \bar{u}_j$ et deux automorphismes intérieurs $\text{Ad } v_j$ où les v_j engendrent K . Alors comme $e \leq f$, la restriction de tout état singulier $\mathfrak{g}$ -invariant à N_f est non nulle, singulière et invariante sous les $\text{Ad } u_j$. $\square$

Lemme 24. *Soit N un facteur II_1 , ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$, N^ω comme dans 1.3 et $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N . Alors si le commutant des u_j dans N^ω est de dimension finie, il existe des opérateurs unitaires $u_{n+1}, \dots, u_q \in N$ tels que le commutant des u_j , $j = 1, \dots, q$ dans N^ω soit les scalaires.*

Démonstration. Nous devons seulement montrer que le commutant dans N^ω des u_j , $j = 1, \dots, n$, est nécessairement contenu dans N , s'il est de dimension finie. Supposons qu'un certain $x \in N^\omega$, $\|x\| \leq 1$, $[x, u_j] = 0$ pour tout j , satisfasse $\|x - y\|_2 \geq \epsilon > 0$ pour tout $y \in N$, $\|y\| \leq 1$. Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Nous obtenons, pour tout $y \in N$, $\|y\| \leq 1$, que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y\|_2 \geq \epsilon$. Donc, par induction sur $p \in \mathbb{N}$, nous construisons des suites $(y_k^p)_{k \in \mathbb{N}}$ avec

- (1) $\|y_k^p - y_k^q\|_2 \geq \epsilon$ pour tout k et $q < p$;
- (2) $\|y_k^p\| \leq 1$ et $\|[y_k^p, u_j]\|_2 \leq 1/k$ pour tout k et p .

Chaque fois, on prend y_k^p parmi les x_m , $m \in \mathbb{N}$. Soit $y^p \in N^\omega$ représenté par la suite $(y_k^p)_{k \in \mathbb{N}}$. Nous voyons que tous les y^p appartiennent à la boule unité du commutant des u_j dans N^ω et comme $\|y^p - y^q\|_2 \geq \epsilon$ pour $p \neq q$, que ce commutant n'est pas de dimension finie. $\square$

Démonstration de (a) $\Rightarrow$ (d) dans le Théorème 2.1. Soit M un facteur agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous allons prouver que s'il existe une suite centrale $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs unitaires de M qui n'est pas triviale ([41], Définitions 4.4.33 et 4.4.35, p. 213), on a :

$$C^*(M, M') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{0\}.$$

Nous pouvons supposer que pour un certain $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\xi_0\| = 1$, et $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k \xi_0, \xi_0 \rangle \leq 1 - \epsilon.$$

Soit π , $\pi(\xi) = \langle \xi, \xi_0 \rangle \xi_0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. Alors si $C^*(M, M') \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\}$, nous avons $\pi \in C^*(M, M')$ par irréductibilité de la représentation identité de $C^*(M, M')$ dans $\mathcal{H}$. Donc il existe $a_1, \dots, a_n \in M$, $b_1, \dots, b_n \in M'$ tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j b_j - \pi \right\| \leq \epsilon/3.$$

Comme $[a_j, v_k] b_j \xi_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout j , nous avons

$$\left\| \sum a_j b_j v_k \xi_0 - v_k \sum a_j b_j \xi_0 \right\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

donc

$$\left\| \sum a_j b_j v_k \xi_0 \right\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \left\| \sum a_j b_j \xi_0 \right\|.$$

Cependant,

$$\left\| \sum a_j b_j \xi_0 - \pi \xi_0 \right\| \leq \epsilon/3 \quad \text{et} \quad \pi \xi_0 = \xi_0.$$

Mais

$$\left\| \sum a_j b_j v_k \xi_0 - \pi(v_k \xi_0) \right\| \leq \epsilon/3.$$

Comme $\|\pi(v_k \xi_0)\| = |\langle v_k \xi_0, \xi_0 \rangle|$, nous obtenons une contradiction. $\square$

Démonstration de (d) $\Rightarrow$ (c). Nous montrons que si (c) n'est pas vérifiée, alors $C^*(N, N')$ contient la projection unidimensionnelle π de $L^2(N, \tau)$ sur 1. Comme N ne satisfait pas (c), soit $u_1, \dots, u_n$ les opérateurs unitaires correspondants. En adjoignant les u_j^* , $j = 1, \dots, n$, on voit que $T = \sum_j u_j J u_j J$ peut être supposé auto-adjoint. Or $T \in C^*(N, N')$, $\|T\| = n$, $T(1) = n1$. Nous affirmons que $T - n$ est inversible sur l'orthogonal du vecteur propre 1. Sinon, comme T est auto-adjoint, il existerait

une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H} \subset L^2(N, \tau)$, $\|\xi_k\| = 1$, $\langle \xi_k, 1 \rangle = 0$, telle que $\|(T - n)\xi_k\| \rightarrow 0$. Comme $\|u_j J u_j J \xi_k\| = \|\xi_k\| = 1$ pour tout j, k , et comme $\|T \xi_k\| \rightarrow n$, on voit par la convexité stricte de $\mathcal{H}$ que $\|u_i J u_i J \xi_k - u_j J u_j J \xi_k\| \rightarrow 0$ pour tous i, j , et donc $\|(u_j - J u_j^* J) \xi_k\| \rightarrow 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, montrant ainsi (c). Nous avons montré que n est un point isolé et un point simple du spectre de T , donc $C^*(N, N')$ contient une projection unidimensionnelle. $\square$

Démonstration de (c) $\Rightarrow$ (b). Soient $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N . Nous voulons trouver un état non-normal sur N invariant sous les $\text{Ad } u_j$, $j = 1, \dots, n$. Soit ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et N^ω l'ultraproduit correspondant. Par le Lemme 2.6, nous pouvons distinguer deux cas :

- (1) Le commutant relatif de $u_1, \dots, u_n$ dans N^ω est $\mathbb{C}$. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de norme 1 dans $L^2(N, \tau)$ telle que $\langle \xi_k, 1 \rangle = 0$ pour tout k et que $\|u_j J u_j J \xi_k - \xi_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout j . Si $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait la condition (*) de la Proposition 1.3.1, nous obtenons un élément ξ de $L^2(N^\omega, \tau_\omega)$ avec $\langle \xi, 1 \rangle = 0$, $\|\xi\| = 1$ et $u_j J u_j J \xi = \xi$ où $J = J_{N^\omega}$. Mais ceci contredit l'hypothèse sur le commutant relatif des u_j dans N^ω . Donc $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne satisfait pas 1.3.1 (*). Par conséquent, pour un certain $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver une sous-suite $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $\tau((E_k |\gamma_k|^2) |\gamma_k|^2) \geq \epsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et E_a , $a > 0$, comme dans 1.2. Pour chaque k , soit $\phi_k \in N_*$ correspondant à $|\gamma_k|^2 \in L^1(N, \tau)$, et $e_k = E_k(|\gamma_k|^2)$. Chaque ϕ_k est un état sur N et par le choix de $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a $\|[\phi_k, u_j]\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Comme $E_k(|\gamma_k|^2) |\gamma_k|^2 \geq k E_k(|\gamma_k|^2)$, nous avons $\tau(e_k) \leq 1/k$ et donc $e_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ fortement. Mais $\phi_k(e_k) \geq \epsilon$ pour tout k , ce qui montre que l'ensemble $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas relativement faiblement compact dans N_* ([1], 2.3). Soit ϕ un élément non-normal de l'adhérence de $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans N^* , pour la topologie faible. Alors ϕ est un état sur N commutant avec les u_j .

- (2) Le commutant relatif de $u_1, \dots, u_n$ dans N^ω est de dimension infinie. Alors ce commutant doit contenir une sous-algèbre de von Neumann abélienne de dimension infinie, et contient donc des projections non nulles e_k , $k \in \mathbb{N}$, avec $\tau_\omega(e_k) \leq 1/k$. Comme chaque projection dans N^ω est représentée par une suite de projections de N , nous pouvons trouver une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de projections de N telle que :

$$f_k \neq 0, \quad \tau(f_k) \leq 1/k, \quad \|[u_j, f_k]\|_1 \leq 1/k \|f_k\|_1 \quad \text{pour tout } j, k.$$

Soit alors ϕ_k l'état sur N correspondant à $\tau(f_k)^{-1} f_k \in L^1(N, \tau)$. Alors exactement comme ci-dessus, nous trouvons une limite faible ϕ des ϕ_k dans N^* montrant que N satisfait (b). $\square$

Démonstration de (b) $\Rightarrow$ (a). Soit $(u_j)_{j=1, \dots, n}$ un sous-ensemble fini du groupe unitaire de N et soit $\delta > 0$. Nous montrons qu'il existe une projection $e \in N$, $\tau(e) = 1/2$, telle que $\|[u_j, e]\|_2 \leq \delta$, pour tout j . Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des familles $r = (E, U_1, \dots, U_n)$ telles que :

- (α) E est une projection, $E \in N$, $\tau(E) \leq 1/2$.
- (β) Chaque U_j est un opérateur unitaire dans N commutant avec E .
- (γ) $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta \tau(E)$, $j = 1, \dots, n$.

Étant donnés deux éléments r, r' de $\mathcal{R}$, nous écrivons $r \leq r'$ lorsque

- (1) $E \leq E'$,
- (2) $\|U'_j - U_j\|_1 \leq \delta \tau(E' - E)$, $j = 1, \dots, n$.

Si $r \leq r'$ et $E = E'$, alors $r = r'$. Si $r \leq r' \leq r''$, alors $E \leq E''$ et

$$\|U_j'' - U_j\|_1 \leq \delta(\tau(E'' - E') + \tau(E' - E)) = \delta\tau(E'' - E)$$

donc $r \leq r''$. Nous affirmons que $\leq$ est inductif sur $\mathcal{R}$. Tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{R}$ a une suite cofinale. Nous devons montrer que toute suite croissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}$ est majorée. Nous avons $E_n \leq E_{n+1}$ donc E_n converge fortement, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers une projection $E \in N$, et $\tau(E) \leq 1/2$. Or

$$\|U_{m,j} - U_{k,j}\|_1 \leq \delta\tau(E_m - E_k), \quad k \leq m,$$

donc $(U_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(N, \tau)$ qui converge fortement vers un opérateur unitaire U_j . On a $[E, U_j] = \lim_{k \rightarrow \infty} [E_k, U_{k,j}]$ dans la topologie forte, donc la famille $(E, U_1, \dots, U_n) = r$ satisfait (α) et (β) . Nous avons

$$\|U_j - u_j\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{k,j} - u_j\|_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \delta\tau(E_k) = \delta\tau(E)$$

donc r satisfait (γ) et appartient à $\mathcal{R}$. Pour chaque k et j , on a

$$\|U_{k,j} - U_j\|_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U_{k,j} - U_{m,j}\|_1 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \delta\tau(E_m - E_k) = \delta\tau(E - E_k)$$

donc $r_k \leq r$ pour tout k , ce qui prouve l'inductivité de $\mathcal{R}$.

Par le lemme de Zorn, soit $r = (E, U_1, \dots, U_n)$ un élément maximal dans $\mathcal{R}$. Nous supposons que $\tau(E) < 1/2$ et nous contredisons la condition (b) de 2.1. Soit $F = 1 - E$, $M = N_F$, $v_j = U_j(1 - E) = (1 - E)U_j \in M$ (en utilisant (β)). Par le Lemme 2.5, M a la propriété 2.1 (b). Prenons $\epsilon > 0$, $\tau(E) + \epsilon < 1/2$, et $6\epsilon \leq \delta$. Par le Lemme 2.4, il existe une projection non nulle e , $e \in M$, $\tau'(e) < \epsilon$, $\|[v_j, e]\|_2 < \epsilon\|e\|_2$, où le ' correspond à la normalisation de τ dans M . Mais, comme $\tau(F) \leq 1$, nous avons $\tau(e) = \tau(F)\tau'(e) < \epsilon$. Comme $\|v_j e v_j^* - e\|_1' \leq 2\epsilon\|e\|_1'$, soit w_j (Lemme 1.4) un opérateur unitaire dans M tel que

$$w_j v_j e v_j^* w_j^* = e, \quad \|w_j - F\|_1' \leq 6\epsilon\tau'(e).$$

Soit $E' = E + e$; c'est une projection strictement plus grande que E , telle que $\tau(E') \leq 1/2$. Soit $U_j' = U_j E + w_j v_j$. Comme $w_j v_j$ est un opérateur unitaire de $N_{(1-E)}$ et que $U_j E = E U_j$, on voit que U_j' est un opérateur unitaire dans N . Comme $w_j v_j$ commute avec e , les U_j' commutent avec E' . Pour $x \in M$, on a $\|x\|_1' = 1/\tau(F)\|x\|_1$, donc on obtient $\|w_j - (1 - E)\|_1 \leq \delta\tau(e)$ et :

$$\|w_j v_j - v_j\|_1 \leq \delta\tau(e), \quad \|U_j' - U_j\|_1 \leq \delta\tau(e).$$

Par hypothèse, $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta\tau(E)$ donc

$$\|U_j' - u_j\|_1 \leq \delta\tau(E + e) = \delta\tau(E').$$

Nous avons montré que la famille (E', U_j') satisfait (α) , (β) , (γ) et définit donc un élément r' de $\mathcal{R}$. Le couple r, r' satisfait (1), (2) et comme $e \neq 0$, nous avons contredit la maximalité de r . Nous avons montré pour chaque $\delta > 0$ l'existence d'une projection $E \in N$, $\tau(E) = 1/2$, telle que E commute avec U_j , $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta$, donc :

$$\|[u_j, E]\|_2 \leq 2\|U_j - u_j\|_2 + \|[U_j, E]\|_2 \leq 2(2\delta)^{1/2}$$

parce que pour $x \in N$, $\|x\|_\infty \leq 2$ on a $\|x\|_2^2 \leq 2\|x\|_1$. Comme δ est arbitraire, nous avons montré que N satisfait la propriété Γ . $\square$

3. Une caractérisation des automorphismes approximativement intérieurs

Soit N un facteur de type II_1 avec trace normalisée τ . Nous munissons $\text{Aut } N$, le groupe des automorphismes de N , de la topologie de la convergence simple forte dans N , qui, comme N est fini, est la même que la topologie de la convergence simple en norme dans N_* . Nous caractérisons l'adhérence $\overline{\text{Int } N}$ du sous-groupe $\text{Int } N$ des automorphismes intérieurs par le théorème suivant :

Théorème 25. *Soit N un facteur de type II_1 à prédual séparable, agissant dans $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour $\theta \in \text{Aut } N$:*

- (a) $\theta \in \overline{\text{Int } N}$;
- (b) *Il existe un automorphisme de la C^* -algèbre engendrée par N et N' dans $\mathcal{H}$ qui est θ sur N et l'identité sur N' ;*
- (c) *Pour tous opérateurs unitaires $u_1, \dots, u_n \in N$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, $\|\theta(u_k)Ju_kJ\xi - \xi\| < \epsilon$ pour tout $k = 1, \dots, n$;*
- (d) *Il existe une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans N , ne convergeant pas fortement vers 0, telle que $x_na - \theta(a)x_n$ converge vers 0 fortement pour tout $a \in N$.*

La condition (b) signifie que pour tous $a_1, \dots, a_k \in N$ et $b_1, \dots, b_k \in N'$, on a $\|\sum_j \theta(a_j)b_j\| = \|\sum_j a_jb_j\|$ où les normes sont les normes d'opérateurs dans $\mathcal{H}$. La condition (c) signifie que pour tous unitaires $u_1, \dots, u_n \in N$ et $\epsilon > 0$, il existe un $x \in N$, $\|x\|_2 = 1$, tel que $\|\theta(u_k)x - xu_k\|_2 < \epsilon$.

Corollaire 26. *Soit N un facteur semi-discret de type II_1 , alors $\text{Aut } N = \text{Int } N$.*

Démonstration. Soit $\theta \in \text{Aut } N$, $a_1, \dots, a_k \in N$, $b_1, \dots, b_k \in N'$. Par hypothèse ([19]) : $\|\sum_{i=1}^k a_i b_i\| = \|\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i\|$ où $a_i \otimes b_i$ agit sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Mais

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \theta(a_i) \otimes b_i \right\|$$

parce que $\theta \otimes 1$ est un automorphisme du produit tensoriel C^* de N par N' . Donc θ satisfait 3.1 (b). □

Il est important de remarquer que les conditions (a) et (b) ont un sens pour des facteurs arbitraires M agissant standardement dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, mais, par la démonstration ci-dessus de 3.2, elles ne sont pas équivalentes dans cette généralité. En fait, 3.2 montre que tout automorphisme d'un facteur semi-discret, mais pas nécessairement fini, satisfait (b). Lorsque M est le facteur produit de type II_1 , les automorphismes de M qui ne préservent pas la trace ne satisfont pas (a).

Corollaire 27. *Soient N_1, N_2 des facteurs de type II_1 , $\theta_j \in \text{Aut } N_j$. Alors $\theta_1 \otimes \theta_2 \in \overline{\text{Int } N_1} \otimes N_2$ si et seulement si $\theta_j \in \overline{\text{Int } N_j}$, $j = 1, 2$.*

Démonstration. Si $\theta_j \in \overline{\text{Int } N_j}$ pour tout j , alors facilement $\theta_1 \otimes \theta_2 \in \overline{\text{Int } N_1} \otimes N_2$. Soit N_j agissant standardement dans $\mathcal{H}_j$ de sorte que $N_1 \otimes N_2$ agisse standardement dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Soient $a_1, \dots, a_k \in N_1$, $b_1, \dots, b_k \in N'_1$. Alors

$$a_1 \otimes 1, \dots, a_k \otimes 1 \in N_1 \otimes N_2, \quad b_1 \otimes 1, \dots, b_k \otimes 1 \in (N_1 \otimes N_2)'$$

et aussi :

$$\|\sum a_i b_i\| = \|\sum (a_i \otimes 1)(b_i \otimes 1)\|.$$

Comme $\theta_1 \otimes \theta_2$ satisfait 3.1 (b), nous avons que :

$$\|\sum (\theta_1(a_i) \otimes 1)(b_i \otimes 1)\| = \|\sum (a_i \otimes 1)(b_i \otimes 1)\|.$$

Donc nous avons montré que θ_1 satisfait (b). □

La démonstration du Théorème 3.1 (de (c) $\Rightarrow$ (d)) repose essentiellement sur le lemme suivant.

Lemme 28. *Soient N, τ comme ci-dessus, $\theta \in \text{Aut } N$ satisfaisant la condition (c), et $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une projection non nulle $e \in N$ et un $x \in N$, $\|x\|_\infty \leq 1$, $\|x\|_1 \geq 1/4\tau(e)$, $xe = x$, $\theta(e)x = x$, tels que :*

$$\|[u_j, e]\|_1 \leq \epsilon \|e\|_1, \quad j = 1, \dots, n,$$

et

$$\|xu_j - \theta(u_j)x\|_1 \leq \epsilon \tau(e), \quad j = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Soit $\epsilon' \in]0, 1/8[$, $20\epsilon' < \epsilon$, soit $2\delta = (\epsilon'/24(n+1))^{1/8}$, $\delta' = (\delta/6n)^8$. Soit $\xi \in \mathcal{H} \subset L^2(N, \tau)$, $\|\xi\| = 1$ tel que pour tout $j = 1, \dots, n$, on ait $\|\theta(u_j)Ju_jJ\xi - \xi\| \leq \delta'$. Par le Théorème 1.2.2, il existe $a > 0$ tel que l'isométrie partielle $w = u_a(\xi)$ (si l'on utilise 1.2.4) satisfasse

$$\|\theta(u_j)wu_j^* - w\|_2 \leq \delta \|w\|_2 \quad \text{et} \quad w \neq 0.$$

Nous obtenons que $\|u_j w^* w u_j^* - w^* w\|_2 \leq 2\delta \|w\|_2$ et que

$$\|\theta(u_j)w w^* \theta(u_j^*) - w w^*\|_2 \leq 2\delta \|w\|_2.$$

Soit $e_1 = w^* w$, $e_2 = \theta^{-1}(w w^*)$. Nous avons $\|e_k\|_2^2 = \tau(e_k) = \tau(w^* w) = \|w\|_2^2$, et donc : $\|[u_j, e_k]\|_2 \leq 2\delta \|e_k\|_2$ pour tout j et k .

Donc, par le Corollaire 1.2.3, soit $e \leq e_1 \vee e_2$ une projection, $e \in N$, telle que $\|[u_j, e]\|_2 \leq \epsilon' \|e\|_2$ pour tout j et que $\|ee_k - e_k\|_2 \leq \epsilon' \|e_k\|_2$. Comme $\epsilon' < 1/2$, nous avons $e \neq 0$, $\|e\|_2 \geq \|ee_k\|_2 \geq 1/2 \|e_k\|_2$. Soit $x = \theta(e)we$. Nous avons $\|x\|_\infty \leq 1$,

$$\|x - w\|_2 \leq \|\theta(e)w w^* - w w^*\|_2 + \|w^* w e - w^* w\|_2 = \|\theta(e)\theta(e_2) - \theta(e_2)\|_2 + \|e_1 e - e_1\|_2 \leq 2\epsilon' \|w\|_2.$$

Donc

$$\|x - w\|_1 = \|(x - w)(e_1 \vee e_2)\|_1 \leq 2\|x - w\|_2 \|w\|_2 \leq 4\epsilon' \|w\|_1$$

et

$$\|x\|_1 \geq (1 - 4\epsilon')\tau(e_1) \geq 1/2(1 - 4\epsilon')\tau(e) \geq 1/4\tau(e).$$

De plus, $\|xu_j - \theta(u_j)x\|_2 \leq (\delta + 4\epsilon')\|w\|_2$ et, comme ci-dessus,

$$\|xu_j - \theta(u_j)x\|_1 \leq (\delta + 4\epsilon')\|w\|_2 \|e\|_2 \leq \epsilon \tau(e).$$

□

Lemme 29. *Soient N, τ comme ci-dessus et $\theta \in \text{Aut } N$ satisfaisant 3.1 (c). Soit $f \in N$ une projection non nulle, $v \in N$ avec $vv^* = f$, $v^*v = \theta(f)$. Alors l'automorphisme ϕ , $x \in N_f \mapsto v\theta(x)v^* \in N_f$, satisfait aussi 3.1 (c).*

Démonstration. D'abord nous supposons que $f = 1$. Pour tout opérateur unitaire $u \in N$ et tout $x \in N$, nous avons :

$$(vx)u - \theta(u)(vx) = v(xu - \theta(u)x);$$

donc si θ satisfait 3.1 (c), il en va de même pour θ si $vv^* = v^*v = 1$.

Maintenant, en général, soit $m \in \mathbb{N}$, $1/m \leq \tau(f)$ et $(e_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$ un système d'unités matricielles $m \times m$ dans N avec $f = e + e'$ où e, e' sont des projections, $e \geq e_{11}$ appartient au facteur I_m des e_{ij} , et $e' \leq e_{22}$. En multipliant θ par un automorphisme intérieur, nous pouvons supposer que $\theta(e_{ij}) = e_{ij}$ pour tout i, j et aussi que $\theta(e') = e'$. Alors $\theta(f) = f$ et nous pouvons supposer que $v = f$. Maintenant, soit $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N_f , $\bar{u}_j = u_j + 1 - f$ les opérateurs unitaires correspondants de N , et $\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+2}$ des opérateurs unitaires engendrant le facteur I_m des e_{ij} . Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de N (la suite n'est pas nécessairement bornée) telle que $\|x_k\|_2 = 1$ et $\|x_k \bar{u}_s - \theta(\bar{u}_s)x_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Il s'ensuit que $\|[e_{ij}, x_k]\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, parce que $\theta(\bar{u}_{n+q}) = \bar{u}_{n+q}$, $q = 1, 2$.

Donc

$$\|e_{jj}x_k\|_2 - \|e_{11}x_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{pour tout } j = 1, \dots, m),$$

parce que $\|e_{j1}x_k\|_2 = \|e_{11}x_k\|_2$ et $\|x_k e_{j1}\|_2 = \|x_k e_{j2}\|_2$. Par conséquent, $\|e_{11}x_k\|_2^2 \rightarrow 1/m$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Soit $y_k = f x_k f \in N_f$. Comme $e_{11} \leq e \leq f$, nous obtenons

$$\lim \|y_k\|_2 \geq \lim \|e_{11}y_k e_{11}\|_2 = m^{-1/2}$$

parce que

$$\|e_{11}y_k e_{11}\|_2 = \|e_{11}x_k e_{11}\|_2 \rightarrow m^{-1/2} \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Nous avons

$$y_k u_j - \theta(u_j)y_k = f(x_k \bar{u}_j - \theta(\bar{u}_j)x_k)f.$$

□

Démonstration de (d) $\Rightarrow$ (a). Soit ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$, N^ω l'ultraproduit associé à N et ω comme dans I.2. Soit F_2 l'algèbre des matrices 2×2 sur $\mathbb{C}$ et σ l'homomorphisme de N dans $N^\omega \otimes F_2$ tel que $\sigma(x) = x \otimes e_{11} + \theta^\omega(x) \otimes e_{22}$, où comme d'habitude N est identifié à son image canonique dans N^ω .

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans N représentant $y \in N^\omega$; alors l'égalité $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n x - \theta(x)y_n = 0$, dans la topologie forte, pour tout $x \in N$, est équivalente à $y \otimes e_{21} \in P$, où P est le commutant relatif de $\sigma(N)$ dans $N^\omega \otimes F_2$.

De notre hypothèse, nous voulons déduire que $1 \otimes e_{11}$ est équivalent à $1 \otimes e_{22}$ dans P . Le commutant relatif de N dans N^ω est égal à N_ω avec les notations de I.2, donc l'application $x \mapsto x \otimes e_{11}$ est un isomorphisme de N_ω sur la réduction de P par $1 \otimes e_{11}$. Soit $a \in N_\omega$ une projection non nulle, $\tau_\omega(a) = \alpha > 0$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite représentante de projections, $\tau(a_n) \geq \alpha$. Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de N , et $\beta > 0$ telle que : $\tau(y_k^* y_k) \geq \beta$ pour tout k , $y_k x - \theta(x)y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ fortement, pour tout $x \in N$. Maintenant $(y_k^* y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite centrale et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(a_n^* y_k^* y_k a_n) \geq \alpha \beta$, pour $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\theta(a_n)y_k a_n\|_2 \geq \beta^{1/2} \alpha^{1/2},$$

parce que $\|\theta(a_n)y_k a_n - y_k a_n\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $k_n \geq n$ avec $\|\theta(a_n)y_{k_n} a_n\|_2 \geq 1/2 \beta^{1/2} \alpha^{1/2}$. La suite $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ représente un élément z de N^ω tel que $z \otimes e_{21} \in P$ et que $(\theta^\omega(a) \otimes e_{22})(z \otimes e_{21})(a \otimes e_{11}) \neq 0$.

Alors pour chaque projection $a \in \text{centre de } N_\omega$, le support central de $a \otimes e_{11}$ dans P est nécessairement égal à la projection $a \otimes e_{11} + \theta^\omega(a) \otimes e_{22}$. Il s'ensuit que tous les éléments du centre de P sont de la forme

$$c = x \otimes e_{11} + \theta^\omega(x) \otimes e_{22}, \quad x \in \text{centre } N_\omega.$$

Donc pour tout tel élément c , on vérifie que :

$$(\tau_\omega \times \text{Tr})(c(1 \otimes e_{11})) = \tau_\omega(x),$$

$$(\tau_\omega \times \text{Tr})(c(1 \otimes e_{22})) = \tau_\omega(\theta^\omega(x)) = \tau_\omega(x).$$

Nous avons montré que $1 \otimes e_{11}$ est équivalent à $1 \otimes e_{22}$ dans P et donc il existe un opérateur unitaire $u \in N^\omega$ avec $u \otimes e_{21} \in P$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite représentante d'opérateurs unitaires pour u ; alors $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad } u_n$ dans $\text{Aut } N$. $\square$

Démonstration de (a) $\Rightarrow$ (b). Soit $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad } u_n$ un élément de $\overline{\text{Int}} N$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit α_n l'automorphisme intérieur de la C^* -algèbre $C^*(N, N')$ implémenté par u_n . Pour tout élément $x = \sum_j x_j y_j$ du produit tensoriel algébrique de N et N' , la suite $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ converge fortement vers $\sum_j \theta(x_j) y_j$.

Ainsi l'automorphisme $\theta \odot 1$ du produit tensoriel algébrique $N \odot N'$ préserve la norme pour la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et s'étend donc uniquement à la fermeture normique $C^*(N, N')$ comme un automorphisme de $C^*(N, N')$ satisfaisant les conditions requises. $\square$

Démonstration de (b) $\Rightarrow$ (c). Soient $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N et considérons les deux opérateurs

$$T = 1 + u_1 J u_1 J + \dots + u_n J u_n J, \quad S = 1 + \theta(u_1) J u_1 J + \dots + \theta(u_n) J u_n J.$$

Notre hypothèse sur l'automorphisme θ et la propriété de préservation de la norme des automorphismes des C^* -algèbres montrent que $\|S\| = \|T\|$. Mais $\|T\| = n + 1$ car le vecteur unitaire 1 dans $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$ satisfait $u_j J u_j J 1 = u_j u_j^* = 1$ et parce que chaque terme dans la somme définissant T est unitaire. Donc $\|S\| = n + 1$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ tel que

$$\|\xi + \theta(u_1) J u_1 J \xi + \dots + \theta(u_n) J u_n J \xi\| \geq (n + 1) - \epsilon.$$

Comme $\|\theta(u_j) J u_j J \xi\| = 1$ pour tout j , on voit, en utilisant la convexité stricte de la boule unité d'un espace de Hilbert, que pour tout $\eta > 0$, il existe un $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ tel que $\|\theta(u_j) J u_j J \xi - \xi\| \leq \eta$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

Démonstration de (c) $\Rightarrow$ (d). Soient $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N et $\delta > 0$. Nous montrons l'existence d'opérateurs unitaires $U_1, \dots, U_n$ tels que $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta$, d'un opérateur unitaire $V \in N$ et d'un élément X de N , $\|X\|_\infty \leq 1$, $\|X\|_1 \geq 1/4$ tels que :

$$\|X U_j - V \theta(U_j) V^* X\|_1 \leq \delta, \quad j = 1, \dots, n.$$

Avec $y = V^* X$ et en remplaçant les U_j par u_j , nous avons

$$\|y\|_\infty \leq 1, \quad \|y\|_1 \geq 1/4, \quad \|y u_j - \theta(u_j) y\|_1 \leq 3\delta,$$

donc, alors, l'assertion (d) découle de la séparabilité de N_* .

Nous définissons $\mathcal{R}$ comme l'ensemble de toutes les familles $r = (E, U_1, \dots, U_n, V, X)$ d'éléments de N qui satisfont les conditions suivantes :

- (1) E est une projection, les U_j sont des opérateurs unitaires commutant avec E .
- (2) $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta\tau(E)$, $j = 1, \dots, n$.
- (3) $VV^* = E$, $V^*V = \theta(E)$, de sorte que $V\theta V^*$ est un automorphisme de N_E .
- (4) $X \in N_E$, $\|X\|_\infty \leq 1$, $\|X\|_1 \geq 1/4\tau(E)$.
- (5) $\|XU_j - V\theta(U_j E)X\|_1 \leq \delta\tau(E)$, $j = 1, \dots, n$.

Nous définissons pour $r, r' \in \mathcal{R}$ la relation $r \leq r'$ par les conditions :

- (a) $E \leq E'$;
- (b) $\|U'_j - U_j\|_1 \leq \delta\tau(E' - E)$ pour tout j ;
- (c) $EV' = V'\theta(E) = V$, de sorte que $V\theta(E) = E$;
- (d) $X'E = EX' = X$.

Nous vérifions que $r \leq r'$, $E = E' \Rightarrow r = r'$ et que $r \leq r' \leq r''$ implique $r \leq r''$. Nous voulons montrer que $\mathcal{R}$ est inductif.

Tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{R}$ contient une suite cofinale. Nous devons montrer que toute suite $r^k = (E^k, U_1^k, \dots, U_n^k, V^k, X^k)$, $r^k \leq r^{k+1}$, d'éléments de $\mathcal{R}$ est majorée. Nous posons $E = \lim_{k \rightarrow \infty} E^k$ fortement, $U_j = \lim_{k \rightarrow \infty} U_j^k$ dans L^1 (et donc fortement) et nous vérifions (1), (2), (a), (b). La suite V^k converge fortement parce que $(E^q V^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(V^k \theta(E^q))_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites stationnaires pour chaque $q \in \mathbb{N}$. La limite V est une isométrie partielle, avec $VV^* = E$, $V^*V = \theta(E)$ et $E^q V = V\theta(E^q) = V^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, donc nous obtenons (3) et (c). Pour la même raison, la suite X^k converge vers un $X \in N_E$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$, $XE^q = E^q X = X^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Donc $\|X\|_1 \geq \|X^q\|_1 \geq 1/4\tau(E^q)$ pour tout q et donc $\|X\|_1 \geq 1/4\tau(E)$.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\|X^q U_j^q - V^q \theta(U_j^q E^q) V^{q*} X^q\|_1 \leq \delta\tau(E^q)$$

donc par continuité, nous avons $\|XU_j - V\theta(U_j E)V^*X\|_1 \leq \delta\tau(E)$, ce qui termine la démonstration de l'inductivité de $\mathcal{R}$.

Soit $r = (E, U_1, \dots, U_n, V, X)$ un élément maximal de $\mathcal{R}$ tel que $E \neq 1$. Nous allons contredire la condition (c) pour θ , prouvant ainsi (c) $\Rightarrow$ (d). Soit $F = 1 - E \neq 0$ et soit Y une isométrie partielle dans N telle que $YY^* = F$, $Y^*Y = \theta(F)$. Par le Lemme 3.5, l'automorphisme $Y\theta Y^*$ de N_F satisfait aussi la condition (c). Soit $v_j = U_j F = F U_j$ pour chaque j la restriction de U_j à F (U_j et E commutent, par (1)), de sorte que les v_j sont des opérateurs unitaires dans N_F . Soit $\epsilon > 0$ tel que $3 \times 3\epsilon \leq \delta$.

Par le Lemme 3.4, il existe une projection non nulle $e \in N_F$ et un $x \in N_F$, $\|x\|_\infty \leq 1$, $\|x\|_1 \geq 1/4\tau(e)$, $xe = x$, $Y\theta(e)Y^*x = x$, tels que $\|v_j e v_j^* - e\|_1 \leq \epsilon\|e\|_1$ pour tout j , et $\|x v_j - Y\theta(v_j)Y^*x\|_1 \leq \epsilon\tau(e)$ pour tout j . Par 1.4, il existe des opérateurs unitaires v'_j de N_F commutant avec e et tels que $\|v'_j - v_j\|_1 \leq (1/3)\delta\tau(e)$.

Soit Y' une isométrie partielle de N_F avec support initial $Y\theta(e)Y^*$ et support final e . Comme le support final F de Y est plus grand que $Y\theta(e)Y^*$, le support initial de $Y'Y$ est $Y^*Y\theta(e)Y^*Y = \theta(e)$ et son support final est e . Soit $E' = E + e$, $U'_j = U_j E + v'_j$, $V' = V + Y'Y$ et $X' = X + Y'x$. Comme $e \leq 1 - E$, et comme les v'_j sont des opérateurs unitaires de $N_{(1-E)}$ qui commutent avec e , nous avons (1). De plus,

$$\|U_j - U'_j\|_1 = \tau(\|U_j(1 - E) - v'_j\|) = \tau(\|v_j - v'_j\|) \leq \delta\tau(e).$$

Donc le couple (r, r') dans la notation évidente satisfait (a), (b) et r satisfait (2). Le support initial de V' est

$$V^*V + (Y'Y)^*(Y'Y) = \theta(E) + \theta(e) = \theta(E');$$

son support final est $E + e = E'$, et on obtient (3) et (c). Le support final de $Y'x$ est plus petit que e donc, comme $xe = e$, on a $Y'x \in N_e$, $X + Y'x \in N_{E'}$, et $EX' = X'E = X$,

$$\|X + Y'x\|_\infty = \sup(\|X\|_\infty, \|Y'x\|_\infty) \leq 1.$$

$$\|X + Y'x\|_1 = \|X\|_1 + \|Y'x\|_1 \geq 1/4\tau(E) + 1/4\tau(e),$$

ce qui donne (d) pour r, r' et (4) pour r' . Nous voulons vérifier (5), nous avons :

$$X'U'_j = (X + Y'x)(U_jE + v'_j) = XU_j + Y'xv'_j$$

pour tout j . De plus,

$$U'_jE' = (U_jE + v'_j)(E + e) = U_jE + v'_je$$

et

$$V'\theta(U_jE)V'^* = (V'\theta(E))\theta(U_jE)(V'\theta(E))^* = V\theta(U_jE)V^*.$$

Comme $V^*X' = V^*EX' = V^*X$, par (3) pour r et (d), nous obtenons $V'\theta(U_jE)V'^*X' = V\theta(U_jE)V^*X$. Nous avons

$$V'\theta(v'_je)V'^* = (V'\theta(e))\theta(v'_je)(V'\theta(e))^* = Y'Y\theta(v'_je)(Y'Y)^*.$$

De plus, $V'\theta(v'_je)V'^*X' = Y'Y\theta(v'_je)Y^*Y'^*X'$ parce que le support initial de Y'^* est e et $eX' = Y'x$. Comme $Y'^*Y'x = Y\theta(e)Y^*x = x$, nous obtenons

$$V'\theta(v'_je)V'^*X' = Y'Y\theta(v'_je)Y^*x = Y'Y\theta(v'_j)Y^*x.$$

Par conséquent,

$$V'\theta(U'_jE')V'^*X' = V'\theta(U_jE)V'^*X' + V'\theta(v'_je)V'^*X' = V\theta(U_jE)V^*X + Y'Y\theta(v'_j)Y^*x,$$

donc

$$X'U'_j - V'\theta(U'_jE')V'^*X' = (XU_j - V\theta(U_jE)V^*X) + (Y'xv'_j - Y'Y\theta(v'_j)Y^*x).$$

Par (5) pour r , nous avons

$$\|XU_j - V\theta(U_jE)V^*X\|_1 \leq \delta\tau(E).$$

Comme $\|v_j - v'_j\|_1 \leq (1/3)\delta\tau(e)$, nous avons

$$\|xv'_j - Y\theta(v'_j)Y^*x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty\|v_j - v'_j\|_1 + \|xv_j - Y\theta(v_j)Y^*x\|_1 \leq 2/3\delta\tau(e) + \epsilon\tau(e) \leq \delta\tau(e)$$

puisque $\epsilon < \delta/3$.

Nous avons montré que $r' \in \mathcal{R}$ et que $r < r'$, donc ceci contredit la maximalité de r . $\square$

4. Produit tensoriel d'automorphismes centralement triviaux de facteurs finis

Soit N un facteur de type II_1 avec trace normalisée τ .

Définition 30. Soit θ un automorphisme de N . Alors soit $c(\theta)$ le supremum de l'ensemble des réels positifs c tels que pour tous éléments $x_1, \dots, x_n$ de N et tout $\epsilon > 0$, il existe $\xi \in \mathcal{H} \subset L^2(N, \tau)$, $\|\xi\| = 1$, tel que $\|\theta(\xi) - \xi\| \geq c$ tandis que

$$\|(x_j - Jx_j^*J)\xi\| \leq \epsilon \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Nous avons $0 \leq c(\theta) \leq 2$. Dans cette définition, on pourrait restreindre les x_j à appartenir à tout sous-ensemble de N qui engendre N comme C^* -algèbre, et en particulier aux opérateurs unitaires de N .

Proposition 31. Soient N et θ comme ci-dessus.

- (a) Pour tout $\theta' \in \text{Aut } N$, extérieurement conjugué à θ , on a $c(\theta') = c(\theta)$.
- (b) Pour tout autre facteur fini M , on a $c(\theta \otimes 1_M) \leq c(\theta)$.
- (c) Pour toute projection non nulle $e \in N$ invariante sous θ , on a $c(\theta') = c(\theta)$.

Démonstration. (a) Prenons $\theta' = \text{Ad } u \circ \theta$; alors, étant donnés $x_1, \dots, x_n$ et $\epsilon > 0$, prenons $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, avec

$$\|\theta(\xi) - \xi\| \geq c(\theta) - \epsilon, \quad \|(x_j - Jx_j^*J)\xi\| \leq \epsilon$$

pour tout j , et $\|(u - Ju^*J)\xi\| \leq \epsilon$. Alors

$$\|\theta'(\xi) - \xi\| = \|\theta(\xi) - u^*Ju^*J\xi\| \geq c(\theta) - 2\epsilon$$

donc $c(\theta') \geq c(\theta)$.

(b) Nous identifions $\mathcal{H} = L^2(N \otimes M, \tau_N \otimes \tau_M)$ avec $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_M$, où $\mathcal{H}_N = L^2(N, \tau_N)$, $\mathcal{H}_M = L^2(M, \tau_M)$. Donc $J_{\mathcal{H}} = J_{\mathcal{H}_N} \otimes J_{\mathcal{H}_M}$ et pour $x \in N$, on a

$$J_{\mathcal{H}}x^*J_{\mathcal{H}} \otimes 1 = J_{\mathcal{H}_N}(x^* \otimes 1)J_{\mathcal{H}_N}.$$

De plus, la transformation unitaire de $\mathcal{H}$ correspondant à $\theta \otimes 1_M$ est $\theta \otimes 1_{\mathcal{H}_M}$. Nous supposons que $c(\theta \otimes 1) > 0$, et soit $c > 0$ tel que $c < c(\theta \otimes 1)$ et $\eta \in]0, 1[$. Ensuite, soit $x_1, \dots, x_n \in N$ et $\epsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $n\delta < 1/4c^2(1 - \eta^2)$ et $\delta < \epsilon^2$.

Par hypothèse, soit $\xi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_M$ tel que

$$\|\xi\| = 1, \quad \|(\theta \otimes 1)\xi - \xi\| \geq c \quad \text{et} \quad \|(T_j \otimes 1)\xi\| \leq \delta,$$

où $T_j = x_j - J_{\mathcal{H}_N}x_j^*J_{\mathcal{H}_N}$ pour tout j . Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_M$ et $(\xi_b)_{b \in \mathfrak{B}}$ les composantes de ξ sur $\mathfrak{B}$. Soit μ la mesure discrète sur $\mathfrak{B}$ telle que $\mu(b) = \|\xi_b\|^2$ et :

$$E_j = \{b \in \mathfrak{B} \mid \|T_j\xi_b\| > \delta^{1/2}\}$$

Nous avons, pour chaque j ,

$$\mu(E_j) = \sum_{b \in E_j} \|\xi_b\|^2 \leq \delta^{-1} \sum \|T_j\xi_b\|^2 \leq \delta.$$

De plus,

$$\sum_G \|\theta(\xi_b) - \xi_b\|^2 \leq 4 \sum_G \|\xi_b\|^2 = 4\mu(G) \quad \text{et} \quad \sum_{G^c} \|\theta(\xi_b) - \xi_b\|^2 \leq (\eta c)^2.$$

Donc nous avons

$$\eta^2 c^2 + 4\mu(G) \geq c^2, \quad \mu(G) \geq 1/4c^2(1 - \eta^2) > \sum \mu(E_j)$$

donc $G \setminus \bigcup_{j=1}^n E_j$ est non vide, montrant ainsi que $c(\theta) \geq \eta c$ et prouvant (b).

Lorsque M est de dimension finie, les $x \otimes y$, $x \in N$, $y \in M$ engendrent $N \otimes M$ comme C^* -algèbre, donc l'égalité $c(\theta \otimes 1) = c(\theta)$ s'ensuit facilement.

(c) Soit $\alpha \in]0, 1]$ et e une projection dans N avec $\tau(e) = \alpha$. Soit u un opérateur unitaire dans N tel que $u\theta(e) = e$. Alors par (a), le nombre $C(\alpha) = c(u\theta u^*)$ dépend juste de θ et α , pas de u et e . L'égalité $c(\theta \otimes 1_K) = c(\theta)$ pour K de dimension finie montre que $C(\alpha) = c(\theta)$ pour tout nombre rationnel α . Soit $\delta < 1$, pour montrer que $C(\alpha) \geq \delta^3 c(\theta)$, nous pouvons supposer que pour un certain entier q , on a $\delta^2 \leq 1 - 1/q \leq \alpha < 1$. Soit K un sous-facteur de type I_q de N avec unités matricielles e_{ij} et e une projection dans N , $\tau(e) = \alpha$, $1 - e \leq e_{11}$. Nous pouvons supposer que $\theta(x) = x$ pour tout $x \in K$, et que $\theta(e) = e$. Soit $\epsilon > 0$; $x_1, \dots, x_n \in N_*$. Soit $\xi \in N$, $\|\xi\|_2 = 1$, $\|[x_j, \xi]\|_2 \leq \epsilon$ pour tout j , tel que $\|\theta(\xi) - \xi\|_2 \geq \delta c(\theta)$.

Comme les $e_{ij} \in N$, nous pouvons aussi supposer que $[e_{ij}, \xi] = 0$ pour tout $i, j = 1, \dots, q$. Donc ξ et $\theta(\xi)$ appartiennent à K' . Comme pour $a \in K' \cap N$, nous avons

$$\|(1 - e_{11})a(1 - e_{11})\|_2 = \|(1 - e_{11})a\|_2 = \|1 - e_{11}\|_2 \|a\|_2 \geq \delta \|a\|_2.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} e\xi e &\in N_*, \quad \|e\xi e\|_2 \geq \|(1 - e_{11})\xi(1 - e_{11})\|_2 \geq \delta, \\ \|[x_j, e\xi e]\|_2 &= \|e[x_j, \xi]e\|_2 \leq \epsilon \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \|e\xi e - \theta(e\xi e)\|_2 &= \|e(\xi - \theta(\xi))e\|_2 \geq \|(1 - e_{11})(\xi - \theta(\xi))(1 - e_{11})\|_2 \geq \delta^2 c(\theta), \end{aligned}$$

□

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section :

Théorème 32. *Soit θ un automorphisme d'un facteur de type II_1 , N , et soit $p = p_a(\theta)$ la période asymptotique de θ (c'est-à-dire sa période dans $\text{Aut } N/\text{Ct}N$) (cf. [12]). Alors*

$$c(\theta) = \sup_{z \in \mathbb{C}, z^p=1} |z - 1|.$$

Pour $p = 0$, la notation signifie $\sup_{z \in \mathbb{C}, z^0=1} |z - 1| = 2$. De 4.3, il s'ensuit que $c(\theta) < \sqrt{3} \Rightarrow c(\theta) = 0 \Rightarrow \theta \in \text{Ct}N$.

Corollaire 33. *Soient N_1, N_2 des facteurs de type II_1 , θ_j des automorphismes de N_j , $j = 1, 2$. Alors $\theta_1 \otimes \theta_2 \in \text{Ct}(N_1 \otimes N_2) \Rightarrow \theta_j \in \text{Ct}N_j$, $j = 1, 2$.*

Démonstration. Si $\theta_1 \notin \text{Ct}N_1$, alors facilement $\theta_1 \otimes \theta_2 \notin \text{Ct}(N_1 \otimes N_2)$. Si $\theta_1 \in \text{Ct}N_1$, alors par 4.2 et 4.3, $c(\theta_1 \otimes 1) = 0$, donc par 4.3, $\theta_1 \otimes 1 \in \text{Ct}N_1 \otimes N_2$. Mais $\text{Ct}(N_1 \otimes N_2)$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(N_1 \otimes N_2)$. □

Lemme 34. *Soit N un facteur de type II_1 , $\theta \in \text{Aut } N$, $0 \leq c < c(\theta)$ et $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une projection non nulle $e \in N$ et un $x \in N_*$ tels que :*

- (1) $\| [e, u_j] \|_2 \leq \epsilon \| e \|_2$, $j = 1, \dots, n$, et $\| \theta(e) - e \|_2 \leq \epsilon \| e \|_2$;
- (2) $\| x \|_\infty \leq 1$, $\| x \|_1 \geq 2^{-4} \tau(e)$, $\| x \|_2 \geq 1/4 \| e \|_2$;
- (3) $\| \theta(x) - x \|_2 \geq c \| x \|_2$;
- (4) $\| [x, u_j] \|_1 \leq \epsilon \tau(e)$.

Démonstration. Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'opérateurs unitaires de N , globalement invariante sous θ et θ^{-1} , et contenant les u_j , $j = 1, \dots, n$. Comme $c < c(\theta)$, soit pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\xi_k \in \mathcal{H}(N, \tau)$, $\| \xi_k \| = 1$,

$$\begin{aligned} \| (v_q - Jv_q^* J) \xi_k \| &\leq 1/k, \quad q = 1, \dots, k, \\ \| \theta(\xi_k) - \xi_k \| &\geq c, \quad \text{pour tout } k. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace de l'ultraproduit $\mathcal{H}_\omega$, correspondant à l'ultrafiltre libre ω , de tous les $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $(v_q - Jv_q^* J) \xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}$ est fermé. Par construction, $\mathcal{H}$ réduit l'opérateur unitaire $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\theta(\xi_k))_{k \in \mathbb{N}}$, et nous notons U l'opérateur unitaire réduit. Nous avons $\| U - 1 \| \geq c$.

Comme U est unitaire sur $\mathcal{H}$, soit $\lambda \in \text{Sp } U$, $|\lambda - 1| \geq c$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\xi \in \mathcal{H}$, $\| \xi \| = 1$, $\| U\xi - \lambda\xi \| \leq \delta$. Soit $\delta_1 \in]0, 1/4[$, $20\delta_1 < \epsilon$, $\delta_2 = 1/2(\delta_1/24(n+2))^n$, $2\delta = (\delta_2/6(n+2))^n$. Soit $\xi \in L^2(N, \tau)$, $\| \xi \| = 1$, tel que $\| (u_j - Ju_j^* J) \xi \| \leq \delta$, pour tout j , et $\| \theta(\xi) - \lambda\xi \| \leq \delta$.

Par le Théorème 1.2.2, soit $a > 0$ tel que, avec $v = u_a(\xi)$, on ait : $v \neq 0$ (car $\delta_2 < 1$), $\| u_j v u_j^* - v \|_2 \leq \delta_2 \| v \|_2$, pour tout j , et $\| \bar{\lambda} \theta(v) - v \|_2 \leq \delta_2 \| v \|_2$. Soit $e_1 = v^* v$, $e_2 = v v^*$. Nous avons

$$\| u_j v^* u_j^* u_j v u_j^* - v^* v \|_2 \leq 2\delta_2 \| v \|_2$$

donc nous obtenons, pour tous k, j ,

$$\| [e_k, u_j] \|_2 \leq 2\delta_2 \| e_k \|_2 \quad \text{et} \quad \| \theta(e_k) - e_k \|_2 \leq 2\delta_2 \| e_k \|_2.$$

Soit (par 1.2.3), e une projection, $e \leq e_1 \vee e_2$, telle que 4.5 (1) soit vérifiée et que $\| e e_k - e_k \|_2 \leq \delta_1 \| e_k \|_2$ pour tout k . Posons $x = e v e$, donc $x \in N_e$,

$$\| x \|_\infty \leq 1, \quad \| x - v \|_2 \leq 2\delta_1 \| v \|_2, \quad \| x \|_2 \geq 1/2 \| v \|_2 \geq 1/4 \| e \|_2$$

et donc

$$\| x \|_1 \geq \| x \|_2^2 \geq 2^{-4} \tau(e)$$

ce qui donne (2).

De plus,

$$\| [x, u_j] \|_2 \leq (4\delta_1 + \delta_2) \| v \|_2 \leq 5\delta_1 \| v \|_2 \leq \epsilon/2 \| e \|_2,$$

car $\| v \|_2 \leq 2 \| x \|_2 \leq 2 \| e \|_2$. Donc nous obtenons

$$\| [x, u_j] \|_1 \leq \| [x, u_j] \|_2 \| e \vee u_j e u_j^* \|_2 \leq \epsilon \| e \|_2^2 = \epsilon \tau(e).$$

Donc x satisfait 4.5 (4). Finalement,

$$\| \theta(x) - \lambda x \|_2 \leq (\delta_2 + 4\delta_1) \| v \|_2 \leq 5\delta_1 \times 2 \| x \|_2$$

donc 4.5 (3) est vérifiée avec $c - \epsilon/2$ au lieu de c . □

Démonstration de l'inégalité $c(\theta) \leq \sup_{z \in \mathbb{C}, z^p=1} |z - 1|$. Soient $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires dans N , $c < c(\theta)$, et $\delta > 0$. Montrons l'existence d'opérateurs unitaires $U_1, \dots, U_n \in N$ tels que $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta$ pour tout j , d'un $X \in N$, $\|X\|_\infty < 1$, $\|X\|_1 \geq 2^{-4}$, $\|[X, U_j]\|_1 \leq \delta$, et d'un opérateur unitaire $P \in N$, $\|P - 1\|_1 \leq \delta$, tels que $\|P\theta(X)P^* - X\|_2 \geq c\|X\|_2$. Nous obtenons alors une suite centrale non triviale $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $\|\theta(X_k) - X_k\|_2 \geq c\|X_k\|_2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que la transformation unitaire V de $L^2(N_\omega, \tau_\omega)$ attachée à l'action θ_ω de θ sur le centralisateur asymptotique N_ω satisfait $\|V - 1\| \geq c$. Mais d'après [12], Proposition 2.1.2 et Théorème 2.1.3, le spectre de V est $\{z, z \in \mathbb{C}, z^p = 1\}$ où $p = p_a(\theta)$.

Maintenant, soit $\mathcal{R}$ l'ensemble de toutes les familles $(E, U_1, \dots, U_n, X, P)$ où :

- (1) E est une projection dans N commutant avec les opérateurs unitaires U_j .
- (2) $\|U_j - u_j\|_1 \leq \delta\tau(E)$ pour tout j .
- (3) $X \in N_E$, $\|X\|_\infty \leq 1$, $\|X\|_1 \geq 2^{-4}\tau(E)$, $\|[X, U_j]\|_1 \leq \delta\tau(E)$.
- (4) P est unitaire, $\|P - 1\|_1 \leq \delta\tau(E)$, $P\theta(E)P^* = E$.
- (5) $\|P\theta(X)P^* - X\|_2 \geq c\|X\|_2$.

De plus, un ordre sur $\mathcal{R}$ est défini comme suit : $r \leq r'$ lorsque

- (a) $E \leq E'$ et $\|U_j - U'_j\|_1 \leq \delta\tau(E' - E)$ pour tout j ;
- (b) $X'E = EX' = X$;
- (c) $EP' = P'\theta(E) = EP$ et $\|P' - P\|_1 \leq \delta\tau(E' - E)$.

Comme ci-dessus, on vérifie que $\mathcal{R}, \leq$ est un ensemble ordonné inductif. Soit r un élément maximal, et supposons que $F = 1 - E \neq 0$. Par la Proposition 4.2 (c), soit $c', c < c' < c(P\theta P^*)$ où $P\theta P^*$ est la restriction de $P\theta P^*$ à N_F (nous utilisons (4)). Soit $\epsilon > 0$, $2^4 \times 6 \times 3\epsilon \leq c'^2 - c^2$, $7\epsilon \leq \delta$; alors, par le Lemme 4.5, il existe une projection non nulle $e \in N_F$ telle que :

$$\|[e, U_j]\|_1 \leq \epsilon\|e\|_1 \quad \text{pour tout } j; \quad \|P\theta(e)P^* - e\|_1 \leq \epsilon\|e\|_1$$

et un $x \in N_e$ satisfaisant les autres conditions de 4.5 pour $P\theta P^*$, et $c' > c$. Par le Lemme 1.4, soit U'_j un opérateur unitaire de N tel que

$$U'_j E = EU'_j = U_j E, \quad U'_j e = eU'_j \quad \text{et} \quad \|U'_j - U_j\|_1 \leq 3\epsilon\|e\|_1.$$

Avec $E' = E + e$, nous avons (1), (2) et (a). Avec $X' = X + x$, nous avons

$$\|[X', U'_j]\|_1 \leq \|[X, U_j]\|_1 + \|[x, U_j]\|_1 + 6\epsilon\|e\|_1 \leq \delta\tau(E) + 7\epsilon\tau(e) \leq \delta\tau(E')$$

et nous obtenons (3) et (b). Maintenant, e et $P\theta(e)P^*$ appartiennent tous deux à N_F et il existe un opérateur unitaire Q de N tel que $QE = EQ = E$ et que $QP\theta(e)P^*Q^* = e$, $\|Q - 1\|_1 \leq 3\epsilon\tau(e)$. Soit $P' = QP$. Alors

$$EP' = EP, \quad P'\theta(E) = QP\theta(E) = EP \quad \text{et} \quad \|P' - P\|_1 \leq \delta\tau(E' - E)$$

ce qui donne (c). Nous avons

$$\|P' - 1\|_1 \leq \delta\tau(E'), \quad P'\theta(E + e)P'^* = E + e,$$

donc (4).

$$\begin{aligned}
\|P'\theta(X')P'^* - X'\|_2^2 &= \tau((P'\theta(X'^*)P'^* - X'^*)(P'\theta(X')P'^* - X')) \\
&= \tau(P'\theta(X'^*X')P'^* - X'^*P'\theta(X')P'^* - P'\theta(X'^*)P'^*X' + X'^*X')
\end{aligned}$$

donc

$$\|P\theta(X')P^* - X'\|_2^2 \leq \|P'\theta(X')P'^* - X'\|_2^2 + 6 \times 3\epsilon\tau(e).$$

Maintenant, $X' = X + x$, $X \in N_E$, $x \in N_F$ et $P\theta(E)P^* = E$, donc, comme x satisfait 4.5 (3) par rapport à $P\theta P^*$ et c' , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|P\theta(X')P^* - X'\|_2^2 &= \|P\theta(X)P^* - X\|_2^2 + \|P\theta(x)P^* - x\|_2^2 \\
&\geq c^2\|X\|_2^2 + c'^2\|x\|_2^2 \geq c^2\|X'\|_2^2 + (c'^2 - c^2)2^{-4}\tau(e).
\end{aligned}$$

Comme $(c'^2 - c^2)2^{-4}\tau(e) \geq 6 \times 3\epsilon\tau(e)$ par le choix de ϵ , nous avons montré que $\|P\theta(X')P^* - X'\|_2^2 \geq c^2\|X'\|_2^2$. Nous avons ainsi contredit la maximalité de r . $\square$

Démonstration de l'inégalité $c(\theta) \geq \sup_{z \in \mathbb{C}, z^p=1} |z - 1|$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z^p = 1$. Alors, comme déjà vu ci-dessus, z est dans le spectre ponctuel de la transformation unitaire de $L^2(N_\omega, \tau_\omega)$ associée à l'action θ_ω de θ sur le centralisateur asymptotique de N en $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Ainsi, il existe une suite centrale $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans N telle que $\|\theta(y_k) - zy_k\|_2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et $\|y_k\|_2 = 1$ pour tout k . $\square$

5. Tous les facteurs injectifs de type II_1 sont isomorphes

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Par définition, le centralisateur d'un état non nécessairement normal ϕ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_\phi = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \phi(xy) = \phi(yx) \text{ pour tout } y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Soit $\mathcal{H}^c$ l'espace de Hilbert dont l'espace vectoriel réel sous-jacent est le même que pour $\mathcal{H}$ et tel que l'application identité $\xi \mapsto \xi^c$ soit une isométrie antilinéaire. Pour $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, soit $x^c \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^c)$ tel que $x^c \xi^c = (x\xi)^c$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. Soit Tr la trace usuelle sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de sorte que pour une projection e , $\text{Tr } e$ est la dimension de l'image de e . Nous notons par $\|x\|_{\text{HS}}$ et $\|x\|_{\text{Tr}}$ les normes de Hilbert-Schmidt et trace d'un $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: $\|x\|_{\text{HS}} = \text{Tr}(x^*x)^{1/2}$, $\|x\|_{\text{Tr}} = \text{Tr } |x|$. Nous munissons l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{HS}}$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt du produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\text{HS}} = \text{Tr}(y^*x)$ et nous notons que $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{HS}}$ devient ainsi une algèbre de Hilbert. En particulier :

$$\|ax\|_{\text{HS}} \leq \|a\|\|x\|_{\text{HS}}, \quad \|xa\|_{\text{HS}} \leq \|a\|\|x\|_{\text{HS}}, \quad a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{HS}}.$$

De plus, à chaque état normal ϕ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ correspond une unique matrice densité $\rho > 0$, $\|\rho\|_{\text{Tr}} = \text{Tr}(\rho) = 1$ telle que

$$\text{Tr}(\rho x) = \phi(x) \text{ pour } x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dans ce cadre, l'inégalité de Powers-Størmer [36], Lemme 4.1, montre que $\|\rho_\phi^{1/2} - \rho_\psi^{1/2}\|_{\text{HS}}^2 \leq \|\phi - \psi\|$ où ϕ et ψ sont des états normaux sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant, dont les applications seront discutées dans les sections suivantes.

Théorème 35. Soit R le facteur hyperfini de type II_1 , et N un facteur de type II_1 agissant standardement dans $\mathcal{H}$ et avec trace normalisée τ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. N est isomorphe à R .
2. N est isomorphe à $N \otimes R$ et, étant donnés $x_1, \dots, x_n \in N$, $\epsilon > 0$, il existe $z_1, \dots, z_n \in R$ et un opérateur unitaire $X \in N \otimes R$ avec :

$$\|x_j \otimes 1 - X(1 \otimes z_j)X^*\|_2 \leq \epsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$

3. La symétrie $\sigma_N : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ est dans $\overline{\text{Int}}(N \otimes N)$.
4. $\|\sum x_j y_j\|_N = \|\sum x_j \otimes y_j\|_{N \otimes N}$, $x_1, \dots, x_n \in N$, $y_1, \dots, y_n \in N'$.
5. $|\tau(\sum a_i b_i^*)| \leq \|\sum a_i \otimes b_i^*\|_{N \otimes N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in N$.
6. Étant donnés $x_1, \dots, x_n \in N$ et $\epsilon > 0$, il existe une projection non nulle de dimension finie $e \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que, pour tout j :

$$\|[x_j, e]\|_{\text{HS}} \leq \epsilon \|e\|_{\text{HS}}, \quad |\tau(x_j) - \langle x_j e, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq \epsilon.$$

7. N est contenu dans le centralisateur d'un état ϕ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

La partie difficile est de passer de 7. à 1. :

Démonstration de 1. $\Rightarrow$ 7. Comme le commutant de R a la propriété P [42], il existe une projection P de norme un de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sur $N = R$ telle que $P(axb) = aP(x)b$, $a, b \in N$, $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donc $\tau \circ P = \phi$ est un état sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $N \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})_\phi$. $\square$

Démonstration de 7. $\Rightarrow$ 6. Nous pouvons supposer que $x_1, \dots, x_n$ sont des opérateurs unitaires. Supposons que pour tout sous-ensemble fini F du groupe unitaire de N et tout $\delta > 0$, il existe un état $\psi_0 \in N_*$ tel que $\|[\psi_0, u]\| \leq \delta$, pour tout $u \in F$, tandis que $|\psi_0(x_j) - \tau(x_j)| \geq \epsilon$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors par compacité faible de l'espace des états de N (états non-normaux), nous pourrions obtenir un état trace sur N différent de τ , ce qui est impossible. Soit donc $F = (u_j)_{j=1, \dots, p}$ et $\delta < \epsilon$ tels que chaque x_k appartienne à F et que, pour tout état (normal) ψ_0 sur N :

$$\|[\psi_0, u_j]\| \leq 2\delta \text{ pour tout } j \implies |\psi_0(x_k) - \tau(x_k)| \leq \epsilon.$$

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*$ le préduel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*^p$ l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*^p$ avec norme $\|(\phi_1, \dots, \phi_p)\| = \sum \|\phi_j\|$. Alors

$$\sum \phi_j(x_j) = \langle (\phi_1, \dots, \phi_p), (x_1, \dots, x_p) \rangle$$

identifie l'algèbre de von Neumann produit $(\mathcal{L}(\mathcal{H}))^p$ avec le dual de $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*^p$.

Soit W l'ensemble de tous les $(\psi - \psi \cdot \text{Ad } u_1, \dots, \psi - \psi \cdot \text{Ad } u_p)$, pour ψ un état normal sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors W est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*^p$ et donc ses adhérences faible et normique coïncident. Comme par le théorème de la bipolarité, l'ensemble des états normaux est faiblement dense dans l'espace des états de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un filet $(\psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'états normaux convergeant faiblement vers l'état ϕ invariant sous les $\text{Ad } u_j$. Nous avons donc montré que l'adhérence faible, et donc normique, de W contient $(0, \dots, 0)$. Soit alors $\eta = (\delta/6p)^8$ et ψ l'état normal sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec :

$$\|\psi - \psi \cdot \text{Ad } u_k\| \leq \eta^2, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.3)$$

Soit ρ l'unique opérateur de Hilbert-Schmidt positif $\|\rho\|_{\text{HS}} = 1$ tel que $\psi(x) = \langle x\rho, \rho \rangle_{\text{HS}}$, pour $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors par (5.3) et l'inégalité de Powers-Størmer :

$$\|u_k \rho u_k^* - \rho\|_{\text{HS}} \leq \eta \|\rho\|_{\text{HS}} = \eta. \quad (5.4)$$

Maintenant, soit $\rho_k = u_k \rho u_k^*$ et appliquons le Théorème 1.2.2 pour obtenir un $a \geq 0$ tel que, comme $\delta < 1$,

$$E_a(\rho) \neq 0, \quad \|E_a(\rho_k) - E_a(\rho)\|_{\text{HS}} \leq \delta \|E_a(\rho)\|_{\text{HS}}. \quad (5.5)$$

$e = E_a(\rho)$ est une projection de dimension finie car $\text{Tr}(e) < \infty$ et on a :

$$\|[u_k, e]\|_{\text{HS}} \leq \delta \|e\|_{\text{HS}}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.6)$$

Soit ψ_0 l'état normal sur N tel que

$$\psi_0(y) = \langle ye, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}} = \text{Tr}(eye) / \text{Tr}(e), \quad y \in N. \quad (5.7)$$

Alors pour chaque k , avec $e_k = u_k^* e u_k$ et $y \in N$, on a

$$\psi_0(\text{Ad } u_k(y)) = \langle y u_k^* e, u_k^* e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}} = \langle y e_k, e_k \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}},$$

donc, comme $\|e_k - e\|_{\text{HS}} \leq \delta \|e\|_{\text{HS}}$, nous obtenons : $\|\psi_0 - \psi_0 \cdot \text{Ad } u_k\| \leq 2\delta$, et par (5.2) nous obtenons la dernière inégalité de 6. $\square$

Démonstration de 6. $\Rightarrow$ 5. Soient $a_1, \dots, a_n \in N$, $\|a_j\| \leq 1$, et $b_1, \dots, b_n \in N$. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire et par 6., soit $e \neq 0$ une projection de dimension finie telle que :

$$\|[b_j^*, e]\|_{\text{HS}} \leq \epsilon \|e\|_{\text{HS}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.8)$$

$$|\tau(\sum a_j b_j^*) - \langle \sum a_j b_j^* e, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq \epsilon. \quad (5.9)$$

Par (5.8) et $\|a_j\| \leq 1$, nous avons $\|a_j(e b_j^* - b_j^* e)e\|_{\text{HS}} \leq \epsilon \|e\|_{\text{HS}}$; donc

$$|\langle (ea_j e)(eb_j e)^* e, e \rangle_{\text{HS}} - \langle a_j b_j^* e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq \epsilon \|e\|_{\text{HS}}^2,$$

et donc

$$|\langle \sum a'_j b'_j e, e \rangle_{\text{HS}} - \langle \sum a_j b_j^* e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq n\epsilon \|e\|_{\text{HS}}^2, \quad a'_j = ea_j e, \quad b'_j = eb_j e.$$

Soit $\mathcal{H} = e\mathcal{H}$ l'image de e et Q l'algèbre de von Neumann réduite de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par e . Alors $\mathcal{H}$ est de dimension finie ainsi que Q , et $a'_j, b'_j \in Q$. La trace normalisée de tout $x \in Q$ est

$$\tau_q(x) = \text{Tr}(x) / \text{Dim } e = \langle xe, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}}.$$

Donc l'inégalité ci-dessus, avec (5.9), donne :

$$|\tau_q(\sum a'_j b'_j) - \tau(\sum a_j b_j^*)| \leq (n+1)\epsilon. \quad (5.11)$$

Soit J l'involution isométrique de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c$ telle que $J(\xi \otimes \eta^c) = \eta \otimes \xi^c$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Alors pour $x \in Q$, on a $J(x \otimes 1)J = 1 \otimes x^c$. Soit m la dimension de $\mathcal{H}$ et $\xi_1, \dots, \xi_m$ une base orthonormale pour $\mathcal{H}$,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum \xi_j \otimes \xi_j^c \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c.$$

Alors $\|\xi\| = 1$ et $\langle x \otimes 1\xi, \xi \rangle = \tau_q(x)$ pour tout $x \in Q$.

De plus, $J = J_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c}$, donc $J\xi = \xi$ et $J(x \otimes 1)\xi = (x^* \otimes 1)\xi$ pour tout $x \in Q$, comme on peut le vérifier directement pour les unités matricielles canoniques $e_{ij} : \xi_j \mapsto \xi_i$, $i, j = 1, \dots, m$ de Q .

Par conséquent, nous avons

$$\langle \sum (a'_j \otimes 1)J(b'_j \otimes 1)J\xi, \xi \rangle = \langle (\sum a'_j b_j'^*) \otimes 1 \rangle \xi, \xi \rangle = \tau_q(\sum a'_j b_j'^*)$$

tandis qu'elle est aussi égale à $\langle (\sum a'_j \otimes b_j'^c)\xi, \xi \rangle$. Maintenant, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c$ est inclus dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c$ et $\xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^c$ satisfait $(e \otimes e^c)\xi = \xi$, donc nous avons, comme $(e \otimes e^c)(\sum a_j \otimes b_j^c)(e \otimes e^c) = \sum a'_j \otimes b_j'^c$,

$$\tau_q(\sum a'_j b_j'^*) = \langle \sum a_j \otimes b_j^c \xi, \xi \rangle. \quad (5.12)$$

Comme $\|\xi\| = 1$, ceci, avec (5.11), achève la démonstration. $\square$

Démonstration de 5. $\Rightarrow$ 4. (implicitement contenue dans [19. , démonstration de la Proposition 4.5].)
Soit $N \odot N'$ le produit tensoriel algébrique de N par N' et $N \otimes_{\min} N'$ la C^* -algèbre engendrée par $N \odot N'$ dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Soit η l'homomorphisme de $N \odot N'$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui satisfait

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \sum x_i y_i, \quad x_i \in N, \quad y_i \in N'. \quad (5.13)$$

Soit ξ un vecteur trace cyclique et séparant de N , et J l'involution correspondante. Alors pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in N$,

$$\tau(\sum a_j b_j^*) = \langle \sum a_j b_j^* \xi, \xi \rangle = \langle \sum a_j J b_j J \xi, \xi \rangle$$

parce que, comme ξ est un vecteur trace, $J b_j \xi = b_j^* \xi$. Donc, en utilisant 5., nous avons :

$$|\langle \sum_j a_j J b_j J \xi, \xi \rangle| \leq \left\| \sum_j a_j \otimes J b_j J \right\| \|\xi \otimes \xi\| \quad ? \quad (5.14)$$

Comme $JNJ = N'$, nous obtenons :

$$|\langle \sum_j x_j y_j \xi, \xi \rangle| \leq \left\| \sum_j x_j \otimes y_j \right\|, \quad x_j \in N, \quad y_j \in N'. \quad (5.15)$$

En d'autres termes, l'application de $N \odot N'$ dans $\mathbb{C}$ qui satisfait $w(A) = \langle \eta(A)\xi, \xi \rangle$ est bornée et s'étend donc uniquement à un état de $N \otimes_{\min} N'$.

Donc nous avons, pour tout $A, B \in N \odot N'$,

$$w(B^* A^* A B) \leq \|A\|_{\min}^2 w(B^* B). \quad (5.14)$$

Comme η est un $*$ -homomorphisme, nous avons $w(A^* A) = \|\eta(A)\xi\|^2$ et par (5.14),

$$\|\eta(A)\eta(B)\xi\| \leq \|A\|_{\min} \|\eta(B)\xi\| \quad \text{pour tout } A, B \in N \odot N'.$$

Comme les $\eta(B)\xi$ sont denses dans $\mathcal{H}$, nous obtenons que $\|\eta(A)\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\min}$ et, comme $\min$ est la plus petite norme C^* sur $N \odot N'$, nous obtenons l'égalité désirée par [44], Théorème 2. $\square$

Démonstration de 3. $\Rightarrow$ 4. Par le Corollaire 3.2 ci-dessus, par [19], Corollaires 4, 6 et Proposition 3.9, nous avons 4. $\Rightarrow$ 3.

Réciproquement, soit N agissant dans $\mathcal{H}$, $N \otimes N$ dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, et σ la symétrie de $N \otimes N$. Par hypothèse, $\sigma \in \overline{\text{Int}}N \otimes N$, donc le Théorème 3.1 montre que, pour $a_1, \dots, a_n \in N \otimes N$, $b_1, \dots, b_n \in N' \otimes N'$, on a

$$\|\sum a_i b_i\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}} = \|\sum \sigma(a_i) b_i\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}.$$

Soient $x_1, \dots, x_n \in N$, $y_1, \dots, y_n \in N'$, $a_i = x_i \otimes 1$, $b_i = y_i \otimes 1$; alors (5.15) signifie, comme $\sigma(x_i \otimes 1) = 1 \otimes x_i$,

$$\|(\sum x_i y_i) \otimes 1\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}} = \|\sum y_i \otimes x_i\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}.$$

□

Démonstration de 3. $\Rightarrow$ 2. Soit N un facteur de type II_1 satisfaisant 3. Alors il satisfait 4. et par le Corollaire 2.2, il a la propriété Γ . Donc $\text{Int } N \neq \overline{\text{Int}}N$ par [9], Théorème 3.1, p. 429. Soit σ la symétrie de $N \otimes N$. Soit $\theta \in CtN$, alors par le Corollaire 4.4, nous avons $\theta \otimes 1 \in CtN \otimes N$ et par [12], Lemme 2.2.2, nous avons $(\theta \otimes 1)\sigma(\theta \otimes 1)^{-1}\sigma^{-1} \in \text{Int } N \otimes N$. Donc $\theta \otimes \theta^{-1}$ est intérieur et il en est de même pour θ ([28]). Par conséquent, nous avons $CtN = \text{Int } N \neq \overline{\text{Int}}N$ et donc, avec ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$, le centralisateur asymptotique N_ω n'est pas abélien par [12], Théorème 2.2.1, (c) $\Rightarrow$ (d). Donc par [17], N est isomorphe à $N \otimes R$.

Nous construisons maintenant un plongement approché de N dans R . Apparemment, un tel plongement devrait exister pour tous les facteurs II_1 car il existe pour la représentation régulière des groupes libres. Cependant, la construction ci-dessous repose sur la condition 6. Observons d'abord que 4. implique 7. par [19], Corollaire 4.6 et (5.10), et la démonstration de 1. $\Rightarrow$ 7. Nous avons besoin de quelques notations et lemmes.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}^{*n}$ le groupe libre à n générateurs $g_1, \dots, g_n$. Pour $m \in \mathbb{Z}^{*n}$, soit la longueur de m la somme des valeurs absolues des exposants des g_i dans la forme réduite de m . Enfin, pour des opérateurs unitaires $u_1, \dots, u_n$ dans $\mathcal{H}$, soit, pour $m \in \mathbb{Z}^{*n}$, $u(m)$ l'opérateur unitaire obtenu en remplaçant chaque g_i par le u_i correspondant et en calculant le produit dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Donc $m \mapsto u(m)$ est l'homomorphisme de $\mathbb{Z}^{*n}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $u^{g_i} = u_i$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Lemme 36. *Soit N un facteur fini satisfaisant 6, $u_1, \dots, u_n$ des opérateurs unitaires de N , $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les mots $m \in \mathbb{Z}^{*n}$ dont la longueur est inférieure à k . Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un facteur de dimension finie Q et des opérateurs unitaires $v_1, \dots, v_n \in Q$ tels que :*

$$|\tau(u(m)) - \tau_q(v(m))| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } m \in \mathcal{K},$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et τ_q est la trace normalisée de Q .

Démonstration. Soit $\delta = \epsilon/3k$ et, en utilisant 6, soit $e \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une projection non nulle de dimension finie telle que :

$$\|[e, u_j]\|_{\text{HS}} \leq \delta \|e\|_{\text{HS}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.18)$$

$$|\tau(u(m)) - \langle u(m)e, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq \epsilon, \quad m \in \mathcal{K}.$$

Soit $e_j = u_j e u_j^*$; alors $\|e_j - e\|_{\text{HS}} \leq \delta \|e\|_{\text{HS}}$ et, par le Lemme 1.4, il existe des opérateurs unitaires w_j dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $w_j e_j w_j^* = e$ et $\|w_j - 1\|_{\text{HS}} \leq 3\delta \|e\|_{\text{HS}}$. Soit $v'_j = w_j u_j$; alors nous avons :

$$v'_j e = e v'_j, \quad \|v'_j - u_j\|_{\text{HS}} \leq \epsilon/k \|e\|_{\text{HS}}, \quad (5.19)$$

Soit $v_j = v'_j e = e v'_j$. Alors chaque v_j est un opérateur unitaire du facteur de dimension finie Q réduit de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $e \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. La trace normalisée de Q est $\tau_q(x) = \langle x e, e \rangle_{\text{HS}} / \langle e, e \rangle_{\text{HS}}$, $x \in Q$. Par induction sur la longueur du mot m , on obtient :

$$\|u(m) - v'(m)\|_{\text{HS}} \leq \text{longueur}(m) \frac{\epsilon}{k} \|e\|_{\text{HS}}$$

comme conséquence de (5.19), car pour des opérateurs unitaires $a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on a :

$$\|a u_j b - a v'_j b\|_{\text{HS}} \leq \epsilon/k \|e\|_{\text{HS}}, \quad (5.20)$$

Maintenant, par (5.19), e commute avec tous les v'_j , donc $(v'(m))e = v(m)$ pour tous les mots m . Donc nous obtenons :

$$|\langle u(m)e, e \rangle_{\text{HS}} - \langle v(m)e, e \rangle_{\text{HS}}| \leq \epsilon \|e\|_{\text{HS}}^2, \quad (5.21)$$

Par 5.18 et la définition de τ_q , nous obtenons la conclusion. $\square$

Lemme 37. *Soit N satisfaisant la condition 6, soit ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et R^ω l'ultraproduit associé au facteur hyperfini R . Alors il existe un homomorphisme normal de N dans R^ω .*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \mathbb{Z}^{*\infty}$ le groupe libre avec une infinité dénombrable de générateurs $g_1, \dots, g_n, \dots$. Soit τ la trace normalisée sur N , τ_0 sur R . Soit $u_1, \dots, u_n, \dots$ une suite d'opérateurs unitaires de N engendrant N comme algèbre de von Neumann. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{K}_k \subset \mathcal{F}$ l'ensemble de tous les mots $m \in \mathcal{F}$ ne faisant intervenir que $g_1, \dots, g_k$ et de longueur inférieure à k .

Par le Lemme 5.17, pour chaque k , soit $v_1^k, v_2^k, \dots, v_k^k$ des opérateurs unitaires de R tels que :

$$|\tau(u(m)) - \tau_0(v^k(m))| \leq 1/k, \quad \text{où } v^k = (v_1^k, v_2^k, \dots, v_k^k, 1, 1, \dots). \quad (5.23)$$

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, soit v_j l'opérateur unitaire de R^ω représenté par la suite $(v_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors, comme chaque mot $m \in \mathcal{F}$ appartient à tous les $\mathcal{K}_k$ pour $k \geq k(m)$, nous obtenons, avec $v = (v_1, \dots, v_j, \dots)$:

$$\tau_{0,\omega}(v(m)) = \lim_{k \rightarrow \omega} \tau_0(v^k(m)) = \tau(u(m)), \quad m \in \mathcal{F}. \quad (5.24)$$

Pour $x \in \mathbb{C} = *$ -algèbre engendrée par les u_j , $j \in \mathbb{N}$, soit $\pi(x) = \sum \lambda_m v(m)$, lorsque $x = \sum \lambda_m u(m)$. Si $\sum \lambda_m u(m) = 0$, alors $\sum \overline{\lambda_m} \lambda_{m'} \tau(u(m)^* u(m')) = 0$ et donc, par (5.24), $\sum \overline{\lambda_m} \lambda_{m'} \tau_{0,\omega}(v(m)^* v(m')) = 0$, de sorte que la définition de π est non ambiguë. Par construction, π est un $*$ -homomorphisme préservant la trace de α dans R^ω . Donc par [35], nous pouvons étendre π à un $*$ -homomorphisme préservant la trace de N dans R^ω ; π est alors normal, injectif. $\square$

Lemme 38. *Soit N satisfaisant la condition 6, alors il existe, pour chaque ultrafiltre libre ω sur $\mathbb{N}$, un isomorphisme normal θ de $N \otimes N$ dans l'ultraproduit $(N \otimes R)^\omega$ tel que :*

- (a) *Pour chaque $x \in N$, $\theta(x \otimes 1)$ est représenté par la suite $(x \otimes 1_R)_{\nu \in \mathbb{N}}$.*
- (b) *Pour chaque $y \in N$, $\theta(1 \otimes y)$ est représenté par une suite de la forme $(1_N \otimes z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $z_\nu \in R$.*

Démonstration. Soit π_1 l'unique isomorphisme de N dans $(N \otimes R)^\omega$ tel que $\pi_1(x) = (x \otimes 1_R)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $x \in N$. Soit π comme dans le Lemme 5.22 et π_2 l'isomorphisme de N dans $(N \otimes R)^\omega$ tel que $\pi_2(y) = (1_N \otimes (\pi(y))_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ où $(\pi(y))_\nu$ est une suite représentante pour $\pi(y) \in R^\omega$, $y \in N$. Par construction, $\pi_1(N)$ et $\pi_2(N)$ sont des sous-facteurs commutant de $(N \otimes R)^\omega$, et comme nous sommes dans un facteur fini, nous pouvons identifier $\pi_1(N) \otimes \pi_2(N)$ avec le sous-facteur de $(N \otimes R)^\omega$ engendré par $\pi_1(N)$ et $\pi_2(N)$. Alors $\pi_1 \otimes \pi_2$ est un isomorphisme de $N \otimes N$ dans $(N \otimes R)^\omega$ satisfaisant (a) et (b). $\square$

Fin de la démonstration de 3. $\Rightarrow$ 2. Soit $\theta : N \otimes N \rightarrow (N \otimes R)^\omega$ comme dans (5.25). Soient $x_1, \dots, x_n \in N$, $\epsilon > 0$, et par l'hypothèse sur la symétrie $\sigma : N \otimes N \rightarrow N \otimes N$, soit v un opérateur unitaire de $N \otimes N$ tel que :

$$\|x_j \otimes 1 - v(1 \otimes x_j)v^*\|_2 \leq \epsilon/2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.26)$$

Comme θ préserve la norme L^2 et est un $*$ -homomorphisme,

$$\|\theta(x_j \otimes 1) - \theta(v)\theta(1 \otimes x_j)\theta(v)^*\|_2 \leq \epsilon/2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.27)$$

Soit $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite représentante d'opérateurs unitaires de $N \otimes R$ pour $X = \theta(v) \in (N \otimes R)^\omega$. Soit, pour chaque j , $(z_j)_\nu$ une suite d'éléments de R telle que $(1 \otimes z_j)_\nu$ représente $\theta(1 \otimes x_j)$. Alors nous avons, par (5.27) :

$$\lim_{\nu \rightarrow \omega} \|x_j \otimes 1 - X_\nu(1 \otimes z_j^*)X_\nu^*\|_2 \leq \epsilon/2, \quad (5.28)$$

Donc pour un $\nu \in \mathbb{N}$ convenable, nous avons la conclusion 2. $\square$

Démonstration de 2. $\Rightarrow$ 1. Soit N satisfaisant 2. et donc soit $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante engendrant des sous-facteurs de N , tous isomorphes à N , avec commutant relatif isomorphe à R et donnant des factorisations $N = N_k \otimes N'_k$. Soient $x_1, \dots, x_n \in N$, $\epsilon > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$, $x'_1, \dots, x'_n \in N_k$ tels que $\|x_j - x'_j\|_2 \leq \epsilon/2$. Nous voulons prouver la condition d'approximation appelée condition C ([34]), pour $x_1, \dots, x_n$ et ϵ . Par l'argument ci-dessus, nous pouvons supposer que tous les x_j appartiennent à $M \otimes \mathbb{C}$ dans une factorisation $N = M \otimes R$ de N , avec M isomorphe à N . Soit alors $z_1, \dots, z_n \in R$ et X unitaire, $X \in M \otimes R$ avec

$$\|x_j - X(1_M \otimes z_j)X^*\|_2 \leq \epsilon/2, \quad (5.29)$$

Par le choix de R , soit Q un sous-facteur de dimension finie de R , et $q_1, \dots, q_n \in Q$ avec $\|z_j - q_j\|_2 \leq \epsilon/2$ pour tout j . Alors $X(1 \otimes Q)X^*$ est un sous-facteur de dimension finie de $M \otimes R = N$ et $\|x_j - X(1_M \otimes q_j)X^*\|_2 \leq \epsilon$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

Remarque 39. Soient N et $\mathcal{H}$ comme dans l'hypothèse de (5.1), soit $\mathfrak{U}$ le groupe unitaire de N avec la topologie discrète et π la représentation identité de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{H}$. Alors la représentation de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{HS}}$ définie par $\rho(u)(y) = uyu^*$ est unitairement équivalente à $\pi \otimes \pi^*$, le produit tensoriel de π par son conjugué. Donc une reformulation de 7. $\Rightarrow$ 1. du Théorème 5.1 est :

$$(5.30) \quad N \text{ hyperfini} \Rightarrow \pi \otimes \pi^* \text{ contient faiblement la représentation triviale.}$$

Avec les notations de (5.1), nous avons aussi, par 7. $\Rightarrow$ 1. :

$$(5.31) \quad N \text{ hyperfini} = \text{pour tous opérateurs unitaires } u_1, \dots, u_n \in N, \quad \dots$$

Notons également que la dernière condition de (5.31) était la seule utilisée dans la démonstration du Corollaire 3.2.

Remarque 40. La démonstration de 5. $\Rightarrow$ 4. donnée ci-dessus s'étend aux facteurs infinis et montre qu'un facteur M est semi-discret si et seulement si un état normal fidèle (et alors tous) ϕ sur M admet une purification (au sens de Powers-Størmer [36] et Woronowicz [48]) $\bar{\phi}$ sur le produit tensoriel C^* de M par M^0 .

Remarque 41. Une algèbre de Banach B est dite moyennable [4], [26] lorsque $H^1(B, Y) = \{0\}$ pour tout B -bimodule dual Y . Une algèbre de von Neumann M est dite moyennable lorsque $H^1(M, Y) = \{0\}$ pour tout B -bimodule dual normal [27]. Dans [27], Johnson, Kadison et Ringrose ont montré que toutes les algèbres de von Neumann approximativement de dimension finie sont moyennables.

Nous montrons ci-dessous que si N est un facteur moyennable de type II_1 , il satisfait la condition 7. du Théorème 5.1.

Prenons N agissant dans $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$ (τ la trace canonique) avec 1 comme vecteur trace unitaire. Soit X l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires ψ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telles que :

- (a) Pour un certain $K < \infty$, $|\psi(xAy)| \leq K\|x\|_2\|A\|\|y\|_2$ pour tous $x, y \in N$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. (Le plus petit tel K est noté $\|\psi\|_X$.)
- (b) $\psi(x) = 0$ pour tout $x \in N$.

Il est facile de voir que la boule unité de X est faiblement compacte (pour la topologie faible $\sigma(X, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$) et que X est naturellement un N -bimodule dual normal, avec les opérations :

$$(x\psi)(A) = \psi(Ax), \quad (\psi x)(A) = \psi(xA),$$

pour $x \in N$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Maintenant, soit $D \in Z^1(N, X)$ la dérivation de N dans X telle que :

$$D(x)(A) = \langle (xA - Ax)1, 1 \rangle, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Alors dire que $D \in B^1(N, X)$ est trivialement équivalent à l'existence d'un état ψ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ satisfaisant la condition 5.1.7.

Remarque 42. Appelons un état ϕ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, tel que $N \subset (\mathcal{L}(\mathcal{H}))_\phi$, une hypertrace pour le facteur N . Alors l'existence d'une hypertrace sur N implique que N est fini et par le Théorème 5.1, que N est hyperfini, ce qui est cohérent avec la terminologie de Dixmier [15].

Remarque 43. On peut considérer la condition 6. du Théorème 5.1 comme un analogue de la condition de Folner pour les groupes moyennables [21] et une hypertrace comme un analogue d'une moyenne invariante sur un tel groupe. Alors la démonstration, donnée ci-dessus, de 7. $\Rightarrow$ 6. est exactement analogue à la démonstration, donnée par Namioka, du théorème de Folner [23].

6. Propriétés de stabilité de la classe des algèbres de von Neumann injectives

Cette section est un exposé de définitions et de résultats dus à J. T. Schwartz [42], Choda et Echigo [6], [7], Hakeda et Tomiyama [25], Arveson [3], Effros et Lance [19] et Choi et Effros [5]. Si certains des énoncés sont nouveaux, ils sont faciles à déduire des articles cités, sauf peut-être pour le Corollaire 6.9 (c). On considère la catégorie des C^* -algèbres avec unités, les morphismes étant les applications linéaires complètement positives préservant l'unité.

Une C^* -algèbre A est dite *injective* lorsque l'analogue suivant du théorème de Hahn-Banach est vrai (cf. [19]) :

Pour toutes C^* -algèbres $B \subset C$ et tout morphisme θ de B dans A , il existe une extension $\bar{\theta}$ de θ à C : $\bar{\theta} : C \rightarrow A$.

Le théorème d'Arveson [3] montre que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est injective pour tout $\mathcal{H}$.

Définition 44. Une algèbre de von Neumann M est dite *injective* lorsqu'elle est injective en tant que C^* -algèbre.

Cette définition est liée à la propriété d'extension de [25] par :

Proposition 45. Une algèbre de von Neumann M dans $\mathcal{H}$ est injective si et seulement si elle est l'image d'une projection E de norme un de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Comme dans de nombreuses catégories, l'injectivité des algèbres de von Neumann est liée à l'existence de solutions à certaines équations, plus précisément Choi et Effros démontrent dans [5] que :

Proposition 46. Pour chaque n , soit $F_n = M_n(\mathbb{C})$. Soit M une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$. Alors M est injective si et seulement si pour chaque $s = s^* \in M \otimes F_n$, chaque $\sigma = \sigma^* \in F_n$ tel que $b \otimes \sigma \leq s$ pour un certain $b = b^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un $x \in M$ tel que $x \otimes \sigma \leq s$, $\|x\| \leq \|b\|$, $x = x^*$.

La proposition suivante montre que les algèbres de von Neumann injectives forment une classe monotone.

Proposition 47. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

- (a) Si M dans $\mathcal{H}$ est une algèbre de von Neumann injective, alors son commutant M' l'est aussi (cf. [25]).
- (b) La fermeture faible d'une réunion croissante d'algèbres de von Neumann injectives est injective (cf. [19]).
- (c) De même pour les intersections de familles décroissantes.

En particulier, comme toute algèbre de von Neumann de dimension finie ou de type I est injective, les algèbres approximativement de dimension finie le sont aussi (voir [20] pour des définitions équivalentes de cette classe).

Proposition 48. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, X un espace borélien standard avec mesure de probabilité μ et $\alpha \mapsto M(\alpha)$ une application borélienne de X vers les sous-algèbres de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $M = \int M(\alpha) d\mu(\alpha)$ (les éléments de M sont des classes de fonctions boréliennes essentiellement bornées $(x_\alpha)_{\alpha \in X}$, $x_\alpha \in M(\alpha)$ pour tout $\alpha \in X$) est injective si et seulement si presque toutes les $M(\alpha)$, $\alpha \in X$, sont injectives.

Démonstration. Par le théorème de séparation de Hahn-Banach, et par 6.3, si une algèbre de von Neumann N dans $\mathcal{H}$ n'est pas injective, il existe $n \in \mathbb{N}$, $s = s^* \in N \otimes F_n$, $b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $b = b^*$, $\|b\| \leq 1$, $\sigma = \sigma^* \in F_n$ et $\phi \in (\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes F_n)_*$, $\epsilon > 0$, tels que :

$$b \otimes \sigma \leq s, \quad \phi(x \otimes \sigma) \geq \phi(s) + \epsilon, \quad \text{pour tout } x = x^* \in N, \|x\| \leq 1. \quad (6.6)$$

En remplaçant s par $s + \epsilon/2$, on montre que (6.6), avec $\epsilon/3$ au lieu de ϵ , est encore satisfaite pour σ dans un ouvert (en norme) $\mathfrak{V}$ de la partie auto-adjointe de F_n .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $(\sigma_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$ une suite dense en norme dans la partie auto-adjointe de F_n . Alors N n'est pas injective si et seulement si pour certains entiers n, j, q, k , il existe $s = s^* \in N \otimes F_n$, $b = b^*$, $b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|b\| \leq 1$, et $\phi \in (\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes F_n)_*$ avec

$$\|s\| \leq k, \quad \|\phi\| \leq k, \quad b \otimes \sigma_{n,j} \leq s$$

et

$$\phi(x \otimes \sigma_{n,j}) \geq \phi(s) + 1/q, \quad \text{pour tout } x = x^* \in N, \|x\| \leq 1.$$

Maintenant, si $M(\alpha)$ n'est pas injective pour un ensemble non négligeable de α , il existe des entiers n, j, q, k tels que l'ensemble correspondant de α soit non négligeable, et disons égal à X . Alors pour chaque $\alpha \in X$, nous choisissons (en utilisant [10], Appendice V) un $b_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|b_\alpha\| \leq 1$, $b_\alpha = b_\alpha^*$, un $s_\alpha = s_\alpha^* \in M(\alpha)$, $\|s_\alpha\| \leq k$, et un $\phi_\alpha \in (\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes F_n)_*$, avec $\|\phi_\alpha\| \leq k$, et tels que les familles correspondantes soient boréliennes, tandis que

$$b_\alpha \otimes \sigma_{n,j} \leq s_\alpha, \quad \phi_\alpha(x \otimes \sigma_{n,j}) \geq \phi_\alpha(s_\alpha) + 1/q \quad \text{pour tout } x \in M(\alpha), x = x^*, \|x\| \leq 1. \quad (6.7)$$

La sélection ci-dessus est possible car il suffit de vérifier (6.7) pour un ensemble fortement dense de $x \in M(\alpha)$. Alors soit

$$b = (b_\alpha)_{\alpha \in X} \in \int_X \mathcal{L}(\mathcal{H}) d\mu = P, \quad s = (s_\alpha)_{\alpha \in X} \in M \otimes F_n,$$

et $\phi \in (M \otimes F_n)_*$ tel que pour tout $y = (y_\alpha)_{\alpha \in X}$, $y_\alpha \in M(\alpha) \otimes F_n$, on ait $\phi(y) = \int \phi_\alpha(y_\alpha) d\mu(\alpha)$. Alors

$$b \otimes \sigma_{n,j} \leq s, \quad \phi(x \otimes \sigma_{n,j}) \geq \phi(s) + 1/q \quad \text{pour tout } x \in M, x = x^*, \|x\| \leq 1.$$

Ceci montre que M n'est pas injective, par 6.3. L'implication inverse suit par un argument similaire. $\square$

Proposition 49. *Soit M une algèbre de von Neumann engendrée par une sous-algèbre de von Neumann N et un sous-groupe $\mathfrak{G}$ du normalisateur de N . Alors si N est injective et $\mathfrak{G}$ est moyennable en tant que groupe discret, M est injective.*

Démonstration. Par 6.4(a), nous devons seulement montrer que M' est injective, mais M' est égal à $(N')^\mathfrak{G}$, pour l'action naturelle de $\mathfrak{G}$ sur N' . Comme $\mathfrak{G}$ est moyennable, il existe une projection de norme un de N' sur $(N')^\mathfrak{G}$. On applique alors 6.4(a) et 6.2. $\square$

Corollaire 50. (a) *Toute représentation continue π d'un groupe localement compact moyennable $\mathfrak{G}$ est telle que $(\pi(\mathfrak{G}))'$ et $\pi(\mathfrak{G})'$ sont injectives.*

(b) *La construction espace de mesures de groupes à partir d'un triplet $X, \mu, \mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}$ discret moyennable donne une algèbre de von Neumann injective.*

(c) *Toute représentation π d'un groupe localement compact séparable connexe G est telle que $\pi(G)'$ et $\pi(G)''$ sont injectives.*

Démonstration. (a) et (b) découlent trivialement de (6.6). Pour obtenir (c), on peut se restreindre aux représentations de facteurs par 6.5, puis aux groupes de Lie réels connexes par [31], Proposition 2.2, et enfin appliquer (6.6) en utilisant [16], Proposition 1.7 et Proposition 2.3. $\square$

Nous sommes reconnaissants à J. Dixmier de nous avoir indiqué la démonstration de 6.7 (c).

7. Classification des facteurs injectifs

Nous restreignons notre attention aux facteurs agissant dans un espace de Hilbert séparable. Les types I_n , $n < \infty$ et I_∞ sont bien connus ; il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul facteur dans chacun de ces types.

Théorème 51. *À isomorphisme près, le facteur hyperfini est le seul facteur injectif de type II_1 ; tous ses sous-facteurs sont hyperfinis et donc classifiés par leur type (I_n , $n < \infty$, ou II_1).*

Démonstration. Soit N un facteur injectif de type II_1 agissant standardement dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Soit E une projection de norme un de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sur N ; alors par des résultats classiques de Tomiyama [47], c'est une espérance conditionnelle :

$$E(axb) = aE(x)b, \quad x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad a, b \in N.$$

Donc $\tau \circ E$ (τ la trace normalisée de N) satisfait la condition 7. du Théorème 5.1 :

$$\phi(uxu^*) = \phi(x), \quad x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad u \text{ unitaire dans } N.$$

□

Par le Théorème 7.1, R est le seul facteur de dimension infinie qui est contenu dans tous les autres. La terminologie hyperfini est également justifiée par la condition 7. du Théorème 5.1 : un facteur de dimension infinie est le facteur hyperfini R si et seulement s'il existe sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ un état invariant sous les automorphismes intérieurs de R , un renforcement de la condition d'existence d'une trace sur R .

Corollaire 52. *Soit $\mathcal{G}$ un groupe discret dénombrable avec des classes de conjugaison infinies ; alors la représentation régulière gauche de $\mathcal{G}$ engendre le facteur hyperfini R si et seulement si $\mathcal{G}$ est moyennable.*

Démonstration. Si $\mathcal{G}$ est moyennable, appliquer 6.7 (a) et 7.1. Sinon, voir [42].

□

En combinant le Théorème 7.1 et la Proposition 6.5, nous voyons que toute sous-algèbre de von Neumann M de R est une intégrale directe de facteurs hyperfinis ou de facteurs de type I_n , $n < \infty$. Cette observation a la conséquence importante suivante :

Corollaire 53. *Soit $\bar{s}$ un sous-ensemble auto-adjoint de R . Alors la sous-algèbre de von Neumann de R engendrée par $\bar{s}$ est : $M = \{x \in R \mid [x, y_n] \rightarrow 0 \text{ fortement, pour toute suite bornée d'éléments de } R \text{ telle que } [y_n, s] \rightarrow 0 \text{ fortement pour } s \in \bar{s}\}$.*

Démonstration. Soit N l'algèbre de von Neumann engendrée par $\bar{s}$. Nous avons $N \subset M$. Soit $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de N , engendrant N . Supposons que pour un certain $\epsilon > 0$ et $y \in M$, on ait $\|y - x\|_2 \geq \epsilon$ pour tout $x \in N$. Alors comme le commutant relatif de $N'_k \cap R$ dans R est égal à N_k pour chaque $k \in \mathbb{N}$ (car N_k est de dimension finie), il existe un unitaire $u_k \in N'_k \cap R$ tel que $\|u_k y u_k^* - y\|_2 \geq \epsilon$ (car l'enveloppe convexe fermée forte des $u y u^*$, u unitaire dans $N'_k \cap R$, contient un élément de $(N'_k \cap R)'$ par des arguments standards). Alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait $[u_k, s] \rightarrow 0$ fortement, pour $s \in \bar{s}$, mais $[u_k, y] \rightarrow 0$ fortement. □

Par la Proposition 6.4, le théorème suivant montre qu'à isomorphisme près, il n'y a qu'un seul facteur de type II_∞ qui est la fermeture faible d'une réunion croissante d'algèbres de von Neumann de dimension finie. La terminologie "hyperfini" pour désigner la dernière propriété est inadéquate ; nous suivrons [20] et l'appellerons "approximativement de dimension finie".

Théorème 54. *Soit $R_{0,1} = R \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors, à isomorphisme près, $R_{0,1}$ est le seul facteur injectif de type II_∞ , donc le seul approximativement de dimension finie.*

Démonstration. Soit $M = N \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ injectif, avec N de type II_1 . Alors en utilisant une espérance conditionnelle de M sur N , on obtient que N est injectif (par 6.2) et donc 7.1 s'applique. $\square$

En combinant le Corollaire 6.7 (c) et le théorème de Dixmier-Pukanszky ([37]), on obtient que $R_{0,1}$ est, avec $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, le seul facteur qui apparaît dans la décomposition intégrale directe de l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche d'un groupe localement compact séparable connexe.

Théorème 55. *Soit M un facteur injectif de type III_0 ; alors M est un facteur de Krieger, c'est-à-dire qu'il est le produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un automorphisme ergodique.*

Démonstration. Soit $M = W^*(N, \theta)$ une décomposition discrète de M . Par construction, N est le centralisateur d'un poids sur M et est donc injectif comme M . Donc, en combinant 6.5 avec 7.4, nous trouvons que $R_{0,1}$ est le seul facteur apparaissant dans la décomposition intégrale directe de N . Par conséquent, le Théorème II.1 [10] s'applique. $\square$

Corollaire 56. *Deux facteurs injectifs de type III_0 sont isomorphes si et seulement si leurs flots de poids sont isomorphes.*

Ceci est un résultat connu de W. Krieger [29] combiné avec 7.5 et [13].

Théorème 57. *Pour chaque $\lambda \in]0, 1[$, le facteur de Powers R_λ est, à isomorphisme près, le seul facteur injectif de type III_λ (voir [8]), et en particulier le seul approximativement de dimension finie.*

Démonstration. Soit $M = W^*(N, \theta)$ une décomposition discrète de M (cf. [8]). Alors, comme ci-dessus, N est injectif et le Théorème 7.4 montre que N est isomorphe à $R_{0,1}$. Alors par [12], on obtient la conclusion. $\square$

Théorème 58. *Tout facteur injectif de type III_1 est semi-discret et approximativement de dimension finie.*

Démonstration. Par [8], p. 167 et le Théorème 7.7, le produit croisé de M par σ_{T_0} , l'automorphisme modulaire pour un $T_0 \neq 0$, est isomorphe à R_λ , $T_0 \log \lambda = 2\pi$. Les conclusions s'ensuivent facilement. $\square$

Références

- [1] C. Akemann, *The dual space of an operator algebra*, Trans. A.M.S. **126** (1967), 286-302.
- [2] C. Akemann and P. Ostrand, *On a tensor product C^* algebra associated with the free group on two generators* (preprint).
- [3] W. Arveson, *Subalgebras of C^* algebras*, Acta Math. **123** (1969), 141-224.
- [4] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 80.
- [5] M. Choi and E. Effros, *Injectivity and operator algebras* (preprint).
- [6] H. Choda, M. Echigo, *A new algebraical property of certain von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad. **39** (1963), 651-655.
- [7] H. Choda, M. Echigo, *A remark on a construction of finite factors I, II*, Proc. Japan Acad. **40** (1964), 474-481.
- [8] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. École Normale Sup. 4ème Série, **6** fasc 2 (1973), 133-252.
- [9] A. Connes, *Almost periodic states and factors of type III*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 415-445.
- [10] A. Connes, *On hyperfinite factors of type III and Krieger's factors*, J. Funct. Anal. **18** (1975), 318-327.
- [11] A. Connes, *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1* , Queen's University preprint, 1974-75.
- [12] A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Queen's University preprint 1975.
- [13] A. Connes, M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type III* (preprint).
- [14] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France **81** (1953), 9-39.
- [15] J. Dixmier, *Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien*, 2ème édition Paris, Gauthier Villars, 1969.
- [16] J. Dixmier, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4ème Série* **2** (1969), 423-436.
- [17] D. McDuff, *Central sequences and the hyperfinite factor*, Proc. London Math. Soc. **XXI** (1970), 443-461.
- [18] D. McDuff, *On residual sequences in a II_1 factor*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 271-280.
- [19] E. Effros, C. Lance, *Tensor products of operator algebras* (preprint).
- [20] G. Elliott, E. J. Woods, *The equivalence of various definitions of hyperfiniteness of a properly infinite von Neumann algebra*, preprint.
- [21] E. Folner, *On groups with full Banach mean value*, Math. Scand. **3** (1955), 243-254.
- [22] V. Ya. Golodets, *Cross products of von Neumann algebras*, Y. Math. N. **26** No. 5 (1971), 3-50.
- [23] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand Math. Studies No. 16, 1965.
- [24] U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras*, Math. Scand. **37** (1975).
- [25] J. Hakeda, J. Tomiyama, *On some extension property of von Neumann algebras*, Tohoku Math. J. **19** (1967), 315-323.
- [26] B. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Memoir A.M.S. **127** (1972).
- [27] B. Johnson, R. V. Kadison, J. Ringrose, *Cohomology of operator algebras III*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 73-96.
- [28] R. Kallman, *A generalisation of free action*, Duke Math. J. **36** (1969), 781.
- [29] W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphism of factors*, preprint.
- [30] O. Maréchal, *Une remarque sur un théorème de Glimm*, Bull. Soc. Math. 2ème Série **99** (1975), 41-44.
- [31] C. Moore, *Groups with finite dimensional irreducible representations*, Trans. A.M.S. **166** (1972), 401.
- [32] F. J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. **37** (1936), 116-229.
- [33] F. J. Murray, J. von Neumann, *Rings of operators II*, Trans. A.M.S. **41** (1937), 208-248.
- [34] F. J. Murray, J. von Neumann, *Rings of operators IV*, Ann. of Math. **44** (1943), 716-804.
- [35] C. Percy, J. Ringrose, *Trace preserving isomorphisms in finite operator algebras*, Amer. Math. J. **90** (1968), 444-455.

- [36] R. Powers, E. Stormer, *Free states of the canonical anti-commutation relations*, Commun. Math. Phys. **16** (1970), 1-33.
- [37] Pukansky, *Actions of algebraic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup 4ème Série **5** (1972), 379-396.
- [38] S. Sakai, *The absolute value of W^* algebras of finite type*, Tohoku Math. J. **8** (1956).
- [39] S. Sakai, *Automorphisms and tensor products of operator algebras*, to appear in Am. J. of Math.
- [40] S. Sakai, *On automorphism groups of II_1 factors*, Tohoku Math. J. **26** (1974), 423-430.
- [41] S. Sakai, *C^* and W^* algebras*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Band 60.
- [42] J. Schwartz, *Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 19-26.
- [43] I. Segal, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. of Math. **57** (1953), 401-457.
- [44] M. Takesaki, *On the cross norm of the direct product of C^* algebras*, Tohoku Math. J. **16** (1964), 111-122.
- [45] M. Takesaki, *On the singularity of a positive linear functional on operator algebras*, Proc. Japan Acad. **35** (1959), 365-366.
- [46] M. Takesaki, *Duality in cross products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta Math. **131** (1973), 249-310.
- [47] J. Tomiyama, *On the projection of norm one in W^* algebras*, Proc. Japan Acad. **33** (1957), 608-612.
- [48] S. L. Woronowitz, *On the purification of factor states*, Commun. Math. Phys. **28** (1972), 221-235.