

Entropie pour les automorphismes des algèbres de von Neumann de type II₁

A. Connes

E. Størmer

Queens University, Kingston, Ontario, Canada

University of Oslo(1), Oslo, Norway

Dans cet article, nous étudions le problème suivant : démontrer que pour $n \neq m$, le n -décalage du facteur hyperfini de type II₁ n'est pas conjugué au m -décalage. Pour chaque n , le n -décalage est l'automorphisme correspondant à la translation de $\mathbb{Z}$ dans le produit tensoriel infini $R_1 = \otimes_{r \in \mathbb{Z}} (N, \tau)$, où N est l'algèbre des matrices $n \times n$ et τ la trace normalisée sur N . Comme le R_1 ci-dessus ne dépend pas de n , à isomorphisme près, car c'est l'unique facteur hyperfini de type II₁, le problème ci-dessus a un sens.

Il y a une analogie évidente entre ce problème et le problème de la conjugaison des décalages de Bernoulli en théorie ergodique. En fait, les deux sont des cas particuliers du problème de conjugaison pour les automorphismes correspondant à la translation de $\mathbb{Z}$ dans $\otimes_{r \in \mathbb{Z}} (N, \tau)$, où τ est une trace normalisée sur l'algèbre de von Neumann de dimension finie N .

Il est donc naturel d'essayer d'étendre la notion d'entropie, de la théorie ergodique au cadre non commutatif. On sait depuis longtemps que, étant donné une algèbre de von Neumann M avec une trace normale semi-finie fidèle τ , et considérant un état ϕ sur M , avec $\phi = \tau(\phi \cdot)$, la quantité $S(\phi) = \tau(\eta(\phi))$ où $\eta(x) = -x \log x$, mesure le degré d'aléa dans ϕ pour les besoins de la mécanique quantique. Wigner et Yanase ont également défini la notion purement non commutative d'information oblique entre ϕ et un observable auto-adjoint K :

$$I_1(\rho, K) = \frac{1}{2} \tau([\rho^{1/2}, K]^2).$$

Dyson a étendu cette définition et a introduit, pour $0 < p < 1$,

$$I_p(\rho, K) = \frac{1}{2} \tau([\rho^p, K][\rho^{1-p}, K]) = \tau(\rho^{1-p} K \rho^p K) - \tau(\rho K^2).$$

Ils ont conjecturé que I_p était une fonction concave de ϕ pour chaque K fixé. Cette conjecture a été démontrée par E. Lieb, avec K pas nécessairement auto-adjoint et $I_p = \tau(\rho^{1-p} K^* \rho^p K) - \tau(\rho K^* K)$. En fait, il découle facilement du théorème de Lieb, qui a été démontré pour les facteurs de type I, mais dont la démonstration s'étend aussi aux algèbres de von Neumann finies, que

$$I(\rho, K) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} I_p(\rho, K) = \tau(\rho K^* [\log \rho, K])$$

est une fonction concave de ρ pour chaque K [5].

G. Lindblad définit dans [7] l'entropie relative d'un état ρ_1 par rapport à l'état ρ_2 par la formule

$$S(\rho_1 \mid \rho_2) = \tau(\rho_1(\log \rho_1 - \log \rho_2)).$$

Il a démontré [7, Théorème 1], [8] que S est une fonction conjointement convexe de ρ_1, ρ_2 , fait qui découle également de l'égalité

$$S(\rho_1 \mid \rho_2) = -I \left(\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Grâce à de tels progrès dans la théorie de l'information non commutative, il était raisonnable de s'attendre à pouvoir obtenir une définition correcte de l'entropie des automorphismes dans le cadre non abélien.

La difficulté principale vient du fait que deux sous-algèbres de dimension finie d'une algèbre de von Neumann non abélienne peuvent ne pas engendrer une algèbre de dimension finie, en effet les algèbres abéliennes le font, voir par exemple [1, Théorème 3(ii)]. Ainsi, il n'y a pas d'analogue immédiat pour l'opération $P \vee Q$ entre partitions d'algèbres de von Neumann abéliennes. Nous avons donc cherché un remplacement, non pas de la $\vee$ ci-dessus, mais de la quantité $H(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n)$. Nous construisons pour chaque n une fonction $H(P_1, \dots, P_n)$, où les P_j sont des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie arbitraires d'une algèbre de von Neumann donnée R avec trace finie τ , et H est symétrique en ses arguments.

Cette fonction satisfera les exigences suivantes :

- (A) $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k)$ lorsque $N_j \subset P_j$, $j = 1, \dots, k$.
- (B) $H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_p) \leq H(N_1, \dots, N_k) + H(N_{k+1}, \dots, N_p)$.
- (C) $P_1, \dots, P_n \subset P \Rightarrow H(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots, P_m) \leq H(P, P_{n+1}, \dots, P_m)$.
- (D) Pour toute famille de projections minimales de N , $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ telle que $\sum e_\alpha = 1$, on a

$$H(N) = \sum_{\alpha \in I} \eta \tau(e_\alpha).$$

- (E) Si $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$ est engendrée par des sous-algèbres de von Neumann commutant deux à deux P_j de N_j , alors

$$H(N_1, \dots, N_k) = H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'').$$

Les autres propriétés de H la relient à une fonction d'entropie relative $H(N \mid P)$ analogue à l'entropie relative de la théorie ergodique :

- (F) $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k) + \sum_j H(N_j \mid P_j)$.
- (G) $H(N \mid Q) \leq H(N \mid P) + H(P \mid Q)$.
- (H) $H(N \mid P)$ est croissante en N et décroissante en P .
- (I) Soient N_1, N_2 commutant, alors

$$H(N_2 \mid N_1) = H((N_1 \cup N_2)'' \mid N_1) = H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1).$$

De plus, nous démontrerons que H est fortement continue, plus précisément, étant donné n et $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\dim N = n, \quad N \overset{\delta}{\sim} P) \Rightarrow H(N \mid P) < \epsilon.$$

Équipé d'une telle fonction H , il est alors facile de définir pour un automorphisme arbitraire θ préservant τ du couple (R, τ) les quantités :

$$H(N, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \theta^2(N), \dots, \theta^k(N)),$$

$$H(\theta) = \sup_{N \text{ de dimension finie}} H(N, \theta).$$

De plus, le théorème de Kolmogorov-Sinaï est vrai, à condition que R soit hyperfini (il ne peut même pas être énoncé autrement) et prend la forme suivante :

Théorème 1. *Soit N_k une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R avec $\cup N_k$ dense faiblement dans R , alors*

$$H(\theta) = \sup_{k \in \mathbb{N}} H(N_k, \theta) \quad \text{pour tout } \theta \text{ préservant } \tau.$$

En utilisant les propriétés D et E , on obtient

Théorème 2. *Soit S_n le n -décalage du facteur hyperfini de type II_1 , alors $H(S_n) = \log n$.*

Ceci prouve en particulier que ces décalages ne sont pas conjugués pour des n différents. Nous généraliserons dans le Théorème 4 le Théorème 2 aux décalages de Bernoulli θ de R définis par des nombres positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1. Pour un tel θ , $H(\theta) = -\sum \lambda_j \log \lambda_j$.

1. Préliminaires

Ici nous fixons nos notations et rappelons au lecteur quelques faits connus de la théorie de l'information non commutative, puis nous démontrons une inégalité importante ((8)) qui sera utilisée ultérieurement. Dans tout ce qui suit, R désignera une algèbre de von Neumann finie avec une trace normale finie fidèle τ . Lorsque N est une sous-algèbre de von Neumann de R , nous notons E_N l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de R sur N qui préserve τ .

La lettre η désigne la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto -x \log x$. Nous rappelons que

$$\log \text{ est une fonction croissante sur } [0, +\infty[\text{ au sens des opérateurs, [11] Prop. 2.5.8} \quad (1)$$

$$\eta \text{ est une fonction concave au sens des opérateurs sur } [0, +\infty[, \text{ [9]}. \quad (2)$$

$$\eta(xy) = \eta(x)y + x\eta(y) \text{ pour des opérateurs commutant } x, y. \quad (3)$$

Nous posons, pour $x, y \in R_+$, $x \leq \lambda y$ pour un certain $\lambda > 0$,

$$S(x \mid y) = \tau(x(\log x - \log y)),$$

et il s'ensuit, comme montré dans l'introduction, que

$$S(x \mid y) \text{ est une fonction conjointement convexe de } (x, y). \quad (4)$$

Ceci implique en particulier l'inégalité bien connue de Peierls-Bogoliubov

$$\tau(x)(\log \tau(x) - \log \tau(y)) \leq \tau(x(\log x - \log y)). \quad (5)$$

Notons également que

$$S(\lambda x \mid \lambda y) = \lambda S(x \mid y), \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

En utilisant (4) et (6), l'inégalité suivante est alors facile à démontrer :

$$y_i, x_i \in R_+, \quad y_i \leq x_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{implique} \quad \sum_{i=1}^n \tau(y_i(\log x_i - \log y_i)) \leq \tau\eta\left(\sum_{i=1}^n y_i\right). \quad (7)$$

(Parce que $\sum_{i=1}^n S(y_i \mid x_i) \geq S(\sum y_i \mid \sum x_i) = -\tau\eta(\sum_{i=1}^n y_i)$.)

Nous dérivons maintenant de (7) une inégalité qui jouera un rôle fondamental dans la suite, et est utilisée dans la démonstration de la propriété C.

Soient I, J deux ensembles finis, $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ une famille d'éléments de R_+ telle que $\sum_{I \times J} x_{ij} = 1$, alors

$$\sum_{i,j} \tau\eta(x_{ij}) \leq \sum_i \tau\eta(x_i^1) + \sum_j \tau\eta(x_j^2), \quad (8)$$

où $x_i^1 = \sum_j x_{ij}$, $x_j^2 = \sum_i x_{ij}$.

Pour démontrer (8), il suffit de montrer que

$$\sum_{i,j} \tau\eta(x_{ij}) - \sum_j \tau\eta(x_j^2) = \sum_i \tau(x_{ij}(\log x_j^2 - \log x_{ij}))$$

puis d'appliquer (7). Mais l'égalité ci-dessus découle de

$$\sum_i \tau(x_{ij} \log x_j^2) = -\tau\eta(x_j^2) \quad \text{pour tout } j \in J.$$

2. Définition de H et démonstration des propriétés (A) à (I) de l'entropie jointe

Soient R et τ comme dans la section 1. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous notons S_k l'ensemble de toutes les familles $(x_{i_1, i_2, \dots, i_k})_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments positifs de R , nuls sauf pour un nombre fini d'indices, et satisfaisant :

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1, \dots, i_k} = 1.$$

Pour $x \in S_k$, $l \in \{1, \dots, k\}$ et $i_l \in \mathbb{N}$, nous posons

$$x_{i_l}^l = \sum_{i_1, \dots, \widehat{i_l}, \dots, i_k} x_{i_1, \dots, i_k}.$$

Définition 3. Soient $N_1, \dots, N_k$ des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R , alors :

$$H(N_1, \dots, N_k) = \sup_{x \in S_k} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k} \eta\tau(x_{i_1, \dots, i_k}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta E_{N_l}(x_{i_l}^l) \right].$$

Il est clair que H est positive et symétrique, mais il n'est pas clair qu'elle ait une valeur finie. Ceci découlera en fait des propriétés (B), (D).

Proposition 4 (Propriété (A)). $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k)$ lorsque $N_j \subset P_j$ pour tout j .

Démonstration. Pour tout $y \in R_+$ et $j \in \{1, \dots, k\}$, nous avons par l'inégalité de Jensen, qui découle de (2),

$$\eta(E_{N_j}(y)) = \eta(E_{N_j}E_{P_j}(y)) \geq E_{N_j}\eta(E_{P_j}(y)).$$

Donc $\tau\eta E_{N_j}(y) \geq \tau\eta E_{P_j}(y)$, ce qui rend la démonstration évidente. $\square$

Proposition 5 (Propriété (B)). $H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_p) \leq H(N_1, \dots, N_k) + H(N_{k+1}, \dots, N_p)$.

Démonstration. Soit $x \in S_p$, et définissons $x' \in S_k$, $x'' \in S_{p-k}$ par

$$x'_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{i_{k+1}, \dots, i_p} x_{i_1, \dots, i_p}, \quad x''_{i_1, \dots, i_{p-k}} = \sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1, \dots, i_k, i_1, \dots, i_{p-k}}.$$

Nous avons $x'^l_{i_l} = x^l_{i_l}$ pour $l \in \{1, \dots, k\}$ et $x''^l_{i_l} = x^{l+k}_{i_l}$ pour $l \in \{1, \dots, p-k\}$.

Il nous suffit donc de prouver que

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} \eta\tau(x_{i_1, \dots, i_p}) \leq \sum_{i_1, \dots, i_k} \eta\tau(x'_{i_1, \dots, i_k}) + \sum_{i_1, \dots, i_{p-k}} \eta\tau(x''_{i_1, \dots, i_{p-k}}).$$

Pour ce faire, soit m la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, $\mathcal{D}$ une partition de $[0, 1]$ dont l'atome générique $a_{i_1, \dots, i_p}$ a pour mesure $\tau(x_{i_1, \dots, i_p})$. Soit $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}''$) la partition dont les atomes sont des réunions d'atomes de $\mathcal{D}$ avec les k premiers indices fixés (resp. les $p-k$ derniers), alors l'inégalité ci-dessus découle clairement de $h(\mathcal{D}' \vee \mathcal{D}'') \leq h(\mathcal{D}') + h(\mathcal{D}'')$ où h est l'entropie classique de la théorie ergodique. $\square$

Proposition 6 (Propriété (C)). $P_1, \dots, P_n \subset P \Rightarrow H(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots, P_m) \leq H(P, P_{n+1}, \dots, P_m)$.

Démonstration. En utilisant la propriété A, on peut supposer que $P_j = P$ pour $j = 1, \dots, n$. Soit $x \in S_m$, alors nous construisons un $X \in S_{m-n+1}$ tel que, avec $E_i = E_{P_i}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on ait

$$\sum \eta\tau(x_{i_1, \dots, i_m}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta E_l(x^l_{i_l}) \leq \sum \eta\tau(X_{i_1, \dots, i_{m-n+1}}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta E_{l+n-1}(X^l_{i_l}). \quad (9)$$

Pour obtenir X , soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^n$ et posons :

$$X_{i_1, \dots, i_{m-n+1}} = x_{\phi(i_1), \dots, \phi(i_n), i_1, \dots, i_{m-n+1}}.$$

Clairement, pour $l > 1$, $X^l_{i_l} = x^{n+l-1}_{i_l}$ et aussi :

$$X^1_{i_1} = \sum_{i_1, \dots, i_{m-n+1}} x_{\phi(i_1), \dots, \phi(i_n), i_1, \dots, i_{m-n+1}} = x^1_{\phi(i_1), \dots, \phi(i_n), i_1, \dots, i_{m-n+1}}$$

où

$$x^1_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{i_2, \dots, i_m} x_{i_1, \dots, i_m}.$$

Ainsi l'inégalité (9) est équivalente à

$$\sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{i_l} \tau\eta E_l(x^l_{i_l}) \geq \sum_{i_1} \tau\eta E_n(x^1_{\phi(i_1), \dots, \phi(i_n), i_1, \dots, i_{m-n+1}}). \quad (10)$$

Mais $E_l = E_n$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ et avec $y_{i_1, \dots, i_m} = E_n(x^1_{i_1, \dots, i_m})$ on obtient

$$\sum_{i_2, \dots, i_m} y_{i_1, \dots, i_m} = E_n(x^1_{i_1}).$$

Donc l'inégalité (10) découle de (8). $\square$

Proposition 7 (Propriété (D)). *Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de projections minimales de N telle que $\sum_{\alpha \in I} e_\alpha = 1$. Alors $H(N) = \sum_{\alpha \in I} \eta\tau(e_\alpha)$.*

Démonstration. Comme $\eta(e_\alpha) = 0$, nous avons

$$\sum_i \eta\tau(e_i) - \sum_i \tau\eta(E_N(e_i)) = \sum_i \eta\tau(e_i).$$

Donc, pour démontrer la propriété D , il suffit de vérifier le point suivant : pour $x \in S_1$, on a

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(E_N(x_i)) \leq \sum_{\alpha \in I} \eta\tau(e_\alpha). \quad (11)$$

Comme $\tau(E_N(x_i)) = \tau(x_i)$, on peut supposer, pour démontrer (11), que tous les x_i sont dans N . Nous avons pour chaque $a \in N^+$,

$$\eta\tau(a) - \tau\eta(a) = \tau(a(\log a - \log \tau(a))) = S(a \mid \tau(a)).$$

Donc par (9) et (6), on a

$$a, b \in N^+, \quad \eta\tau(a+b) - \tau\eta(a+b) \leq (\eta\tau(a) - \tau\eta(a)) + (\eta\tau(b) - \tau\eta(b)).$$

En fait, (12) est aussi une conséquence facile de l'inégalité de Peierls-Bogoliubov (5).

En utilisant (12) et la décomposition spectrale de chaque x_i , on voit que pour démontrer (11), on peut supposer que chaque x_i est le produit d'un scalaire positif λ_i par une projection minimale f_i de N .

Soit c une projection minimale dans le centre de N . Pour $i \in \mathbb{N}$, on a $x_i c = x_i$ ou $x_i c = 0$, et pour $\alpha \in I$, $e_\alpha c = 0$ ou $e_\alpha c = c$. Soit $A_c = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i c \neq 0\}$, $J_c = \{\alpha \in I \mid e_\alpha c \neq 0\}$. Pour démontrer (11), il suffit clairement de montrer que :

$$\sum_{i \in A_c} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(x_i) = \sum_{\alpha \in J_c} \eta\tau(e_\alpha). \quad (12)$$

Or $x_i = \lambda_i f_i$ donc par (3), $\eta(x_i) = \eta(\lambda_i) f_i$ et $\eta\tau(x_i) - \tau(\eta(\lambda_i) f_i) = \lambda_i \eta\tau(f_i)$. Comme les f_i , $i \in A_c$, sont toutes équivalentes,

$$\sum_{i \in A_c} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(x_i) = - \left(\sum_{i \in A_c} \lambda_i \tau(f_i) \right) \log \tau(f) = -\tau(c) \log \tau(f)$$

où f est une projection minimale arbitraire de N telle que $f \leq c$. Le même calcul montre que $\sum_{\alpha \in J_c} \eta\tau(e_\alpha) = -\tau(c) \log \tau(f)$ et prouve l'égalité (13). $\square$

Proposition 8 (Propriété (E)). *Si $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$ est engendrée par des sous-algèbres commutant deux à deux P_j de N_j , alors $H(N_1, \dots, N_k) = H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$.*

Démonstration. Supposons d'abord que les N_j sont abéliennes et commutent deux à deux. Il découle des propriétés A et C que $H(N_1, \dots, N_k)$ est inférieure à $H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$. Soit $(e_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, k\}$ la liste des projections minimales de N_j , puis soit $x \in S_k$ tel que $x_{i_1, \dots, i_k} = e_{i_1}^1 e_{i_2}^2 \dots e_{i_k}^k$. Par la définition 1, nous avons

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} \eta\tau(e_{i_1}^1 e_{i_2}^2 \dots e_{i_k}^k) \leq H(N_1, \dots, N_k).$$

Mais le premier terme est égal à $H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$ par la propriété D . Maintenant, nous ne supposons plus les N_j abéliennes ni commutant. Par C , $H(N_1, \dots, N_k) \leq H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$. Pour démontrer que $H(N_1, \dots, N_k) \geq H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$, nous pouvons remplacer chaque N_j par le P_j correspondant, c'est-à-dire supposer que les N_j commutent deux à deux.

Soit maintenant $A_j \subset N_j$ maximale abélienne dans N_j pour chaque j . Nous avons

$$H(N_1, \dots, N_k) \geq H(A_1, \dots, A_k) = H((A_1 \cup \dots \cup A_k)'').$$

Il nous suffit donc de vérifier que $(A_1 \cup \dots \cup A_k)''$ est maximale abélienne dans $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$. Pour ce faire, vérifions que tout produit de projections minimales e_i de N_i , disons $e = e_1 \dots e_k$, est une projection minimale de $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$. $\square$

Proposition 9 (Propriété (F)). $H(N_1, N_2, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k) + \sum_j H(N_j | P_j)$, où

$$H(N | P) = \sup_{x \in S_1} \sum_i (\tau \eta E_P(x_i) - \tau \eta E_N(x_i)).$$

Démonstration. Immédiat d'après la définition 1. $\square$

Proposition 10 (Propriété (G)). $H(N | Q) \leq H(N | P) + H(P | Q)$.

Démonstration. Soit $x \in S_1$, alors :

$$\begin{aligned} & \sum_i (\tau \eta E_Q(x_i) - \tau \eta E_N(x_i)) \\ &= \sum_i (\tau \eta E_Q(x_i) - \tau \eta E_P(x_i)) + \sum_i (\tau \eta E_P(x_i) - \tau \eta E_N(x_i)) \leq H(P | Q) + H(N | P). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 11 (Propriété (H)). $H(N | P)$ est croissante en N et décroissante en P .

Démonstration. Même démonstration que pour la propriété A. $\square$

Proposition 12 (Propriété (I)). Soient N_1 et N_2 des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie commutant de R . Alors

$$H(N_2 | N_1) = H((N_1 \cup N_2)'' | N_1) = H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1).$$

Démonstration. On peut supposer que $R = (N_1 \cup N_2)''$. Alors $C_1 = \text{Centre de } N_1$ est contenu dans le centre de R et il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} H(N_2 | N_1) &= \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c) H((N_2)_c | (N_1)_c), \\ H((N_1 \cup N_2)'' | N_1) &= \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c) H((N_1 \cup N_2)''_c | (N_1)_c), \\ H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1) &= \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c) (H((N_1 \cup N_2)''_c) - H((N_1)_c)), \end{aligned}$$

où dans chacun des termes comme $H((N_2)_c | (N_1)_c)$, l'entropie est calculée dans R_c par rapport à $\tau/\tau(c)$.

Il s'ensuit que nous pouvons supposer N_1 facteur, auquel cas les égalités découlent de la seconde propriété de sous-additivité forte de Lieb-Ruskai ([6]) qui montre que

$$H((N_1 \cup N_2)'' | N_1) \leq H(N_2).$$

$\square$

3. Continuité de l'entropie relative dans la topologie forte

Soit R une algèbre de von Neumann finie donnée avec trace τ (*). Si N, P sont des sous-algèbres de von Neumann de R , nous écrirons (cf. [12]) $N \stackrel{\delta}{\sim} P$ pour $\delta > 0$, si et seulement si :

$$\forall x \in N, \|x\|_{\infty} \leq 1, \exists y \in P, \|y\|_{\infty} \leq 1, \|x - y\|_2 < \delta,$$

où pour chaque $p \in [1, \infty]$, et $a \in R$, $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$ et $\|a\|_{\infty}$ est la norme C^* de a .

Théorème 13. Soient R et τ comme ci-dessus. Pour chaque entier $n < \infty$, et chaque $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann N, P de R :

$$(\dim N = n, \quad N \stackrel{\delta}{\sim} P) \Rightarrow H(N | P) < \epsilon.$$

Première partie

Lemme 14. Pour chaque $m > 0$ et $\eta > 0$, il existe un $\delta = \delta_m(\eta)$ tel que pour toute sous-algèbre de von Neumann P de R , toute sous-algèbre de von Neumann abélienne $\mathcal{A}$ de R avec projections minimales $(a_i)_{i=1, \dots, m}$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, on a

$$(\mathcal{A} \stackrel{\delta}{\sim} P) \Rightarrow \left(\|a_i - a'_i\|_2 < \epsilon, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m a'_i = 1 \right.$$

pour une certaine famille de projections $a'_i \in P$).

Démonstration. Pour $m = 1$, le lemme est évident. Nous le supposons démontré pour $m \leq m_0$ et nous le démontrons pour $m = m_0 + 1$. Choisissons η_1 tel que :

$$9(3\eta_1)^{1/2} + \eta_1 \leq \eta.$$

Puis prenons δ inférieur à $\delta_m(\eta_1)$ et à η_1 . Soient $\mathcal{A}$ et P donnés, avec $\mathcal{A} \stackrel{\delta}{\sim} P$, et appelons B la sous-algèbre de von Neumann abélienne de $\mathcal{A}$ dont la liste des projections minimales est $b_1 = a_1, \dots, b_{m_0-1} = a_{m_0-1}, b_{m_0} = a_{m_0} + a_{m_0+1}$. Il existe par hypothèse des projections $(b'_j)_{j=1, \dots, m_0}, b'_j \in P$ telles que

$$\|b'_j - b_j\|_2 \leq \eta_1, \quad j = 1, \dots, m_0.$$

Comme $\delta \leq \eta_1$, il existe un $x \in P_+$, $\|x\|_{\infty} \leq 1$ tel que $\|x - a_{m_0}\|_2 \leq \eta_1$.

Or $b'_{m_0} x b'_{m_0}$ est un élément positif de R_+ tel que

$$\|b'_{m_0} x b'_{m_0} - a_{m_0}\|_2 = \|b'_{m_0} x b'_{m_0} - b_{m_0} a_{m_0} b_{m_0}\|_2 \leq 2\|b'_{m_0} - b_{m_0}\|_2 + \|x - a_{m_0}\|_2 \leq 3\eta_1.$$

D'après [3] Lemme 4 p. 273, il existe une projection spectrale a'_{m_0} de $b'_{m_0} x b'_{m_0}$ telle que :

$$\|a'_{m_0} - a_{m_0}\|_2 \leq 9(3\eta_1)^{1/2}.$$

Nous avons $a'_{m_0} \in P$ et $a'_{m_0} \leq b'_{m_0}$, donc la famille $(b'_1, \dots, b'_{m_0-1}, a'_{m_0}, b'_{m_0} - a'_{m_0})$ de projections de P satisfait les conditions requises. $\square$

Lemme 15. Soit e une projection, $e \in R$, et soit $y \in R$ tel que $y^*y \leq e$. Soit $y = up$ la décomposition polaire de y . Alors il existe une projection spectrale f de ρ telle que

$$\|f - e\|_2 \leq 9\|y^*y - e\|_2^{1/2}, \quad \|uf - y\|_2 \leq 8\|y^*y - e\|_2^{1/2}.$$

Démonstration. D'après [3] Lemme 4, p. 273, si l'on pose $\epsilon = \|\rho - e\|_2^{1/2}$ et si l'on suppose $\epsilon < \frac{1}{2}$, la projection spectrale f de ρ correspondant à $[1 - \epsilon, 1]$ satisfera la première des inégalités requises. De plus, d'après [3], p. 274, nous avons $\|\rho - f\|_2 \leq 8\epsilon$, donc $\|uf - up\|_2 \leq 8\epsilon$. $\square$

Lemme 16. Soient $n > 0$ et $\epsilon > 0$ donnés. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann Q et P de R avec $Q \subset P$, $\dim Q = n$, et tout système d'unités matricielles $(e_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n_k,k=1,\dots,s}$, avec $\sum_{i,k} e_{ii}^{(k)} = 1$, de Q , il existe un système d'unités matricielles $(p_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n_k,k=1,\dots,s}$ de P tel que

$$\|e_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}\|_2 < \epsilon \quad \forall j, k.$$

Démonstration. Choisissons d'abord $\eta > 0$ tel que

$$3\eta + 9(7\eta)^{1/2} \leq \epsilon/3\sqrt{n}.$$

Puis choisissons $\delta = \delta_n(\eta)$ comme dans le Lemme 2 avec $\delta < \eta$. Soient Q et P donnés, $Q \overset{\delta}{\sim} P$, et $(e_{ij}^{(k)})$ un système d'unités matricielles dans Q . Par le Lemme 2, nous pouvons trouver une famille $(b_j^{(k)})_{j=1,\dots,n_k,k=1,\dots,s}$ de projections de P avec $\sum_{j,k} b_j^{(k)} = 1$ et $\|e_{jj}^{(k)} - b_j^{(k)}\|_2 \leq \eta$, $\forall j, k$. Nous fixons maintenant k et nous construisons un système $n_k \times n_k$ d'unités matricielles $p_{ij}^{(k)}$ appartenant toutes à $P_{\sum_j b_j^{(k)}}$. Soit $j \in \{1, \dots, n_k\}$, et $x \in P$ tel que $\|e_{1j}^{(k)} - x\|_2 < \eta$. Alors

$$\|b_j^{(k)} x b_j^{(k)} - e_{1j}^{(k)}\|_2 \leq \|b_j^{(k)} - e_{jj}^{(k)}\|_2 + \|x - e_{1j}^{(k)}\|_2 + \eta \leq 3\eta$$

et

$$\|(b_j^{(k)} x b_j^{(k)})^* (b_j^{(k)} x b_j^{(k)}) - b_j^{(k)}\|_2 \leq 7\eta.$$

Donc par le Lemme 3, il existe une isométrie partielle $u_j^{(k)} \in P$ avec support initial $f_j^{(k)} \leq b_j^{(k)}$ et telle que :

$$u_j^{(k)} u_j^{(k)*} \leq b_j^{(k)}, \quad \|u_j^{(k)} - e_{1j}^{(k)}\|_2 \leq 3\eta + 8(7\eta)^{1/2}$$

et $\|b_j^{(k)} - f_j^{(k)}\|_2 \leq 9(7\eta)^{1/2}$.

Posons $p_{jj}^{(k)} = \bigwedge_j f_j^{(k)}$. Alors $\tau(b_j^{(k)} - p_{jj}^{(k)}) \leq \sum_j \tau(b_j^{(k)} - f_j^{(k)})$, ce qui découle de la relation $f - e \wedge f \sim e \vee f - e$ pour des projections e et f . Ainsi $\|b_j^{(k)} - p_{jj}^{(k)}\|_2 \leq \epsilon/3$, donc $\|e_{jj}^{(k)} - p_{jj}^{(k)}\|_2 \leq 2\epsilon/3$. Posons également $p_{1j}^{(k)} = u_j^{(k)} p_{jj}^{(k)}$. Clairement les $p_{ij}^{(k)} p_{1j}^{(k)*}$ forment un système d'unités matricielles $n_k \times n_k$, et nous avons :

$$\|p_{1j}^{(k)} - e_{1j}^{(k)}\|_2 \leq \|u_j^{(k)} - e_{1j}^{(k)}\|_2 + \|p_{jj}^{(k)} - e_{jj}^{(k)}\|_2 \leq \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon.$$

$\square$

Lemme 17. Soient $n > 0$ et $\alpha > 0$ donnés. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann N et P de R avec $N \subset P$, $\dim N = n$, il existent une sous-algèbre de von Neumann $\bar{N}$ de P , $\dim \bar{N} \leq n + 1$, une paire de projections $f \in N'$, $\bar{f} \in \bar{N}'$ et un unitaire $u \in R$ tels que

$$ufu^* = \bar{f}, \quad uN^f u^* = \bar{N}^{\bar{f}}, \quad (2) \quad \|f - 1\|_2 \leq \alpha, \quad \|\bar{f} - 1\|_2 \leq \alpha, \quad (3) \quad \|u - 1\|_2 \leq \alpha.$$

Démonstration. Choisissons d'abord $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < \alpha/8n, \quad 14\epsilon^{1/4} \leq \alpha/8n.$$

Puis appliquons le Lemme 4 pour ce n et cet ϵ pour obtenir δ . Soient N et P donnés, $N \overset{\delta}{\sim} P$, et $(e_{ij}^{(k)})$ un système d'unités matricielles dans N . Par le Lemme 4, il existe un système d'unités matricielles $(p_{ij}^{(k)})$ de P tel que

$$\|e_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}\|_2 < \epsilon, \quad \forall i, j, k.$$

Soit $\bar{N}$ la sous-algèbre de von Neumann de P engendrée par les $p_{ij}^{(k)}$. Clairement $\dim \bar{N} \leq n + 1$.

(Elle est égale à $n + 1$ si la somme des $p_{jj}^{(k)}$ est différente de 1.)

La démonstration du Lemme 5 p. 274 de [3] n'utilise pas l'hypothèse "facteur". Par conséquent, nous obtenons pour chaque $k \in \{1, \dots, s\}$ une isométrie partielle w_k telle que : $w_k^* w_k \leq e_{11}^{(k)}$, $w_k w_k^* \leq p_{11}^{(k)}$, $\|w_k - e_{11}^{(k)}\|_2 \leq \alpha/8n$. Nous prenons $w = \sum_k \sum_j p_{j1}^{(k)} w_k e_{1j}^{(k)}$. Les isométries partielles $p_{j1}^{(k)} w_k e_{1j}^{(k)}$ ont des projections initiales deux à deux orthogonales et des projections finales deux à deux orthogonales. Donc w est une isométrie partielle,

$$w^* w = \sum_{j,k} e_{jj}^{(k)} w_k^* w_k e_{jj}^{(k)}, \quad ww^* = \sum_{j,k} p_{jj}^{(k)} w_k w_k^* p_{jj}^{(k)}.$$

Donc $f = w^* w$ appartient à N' et $\bar{f} = ww^*$ appartient à $(\bar{N})'$. Pour chaque i, j, k , nous avons $w e_{ij}^{(k)} w^* = p_{ij}^{(k)} w_k e_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)} w_k^* p_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)} w_k w_k^* p_{ij}^{(k)} = \bar{f} p_{ij}^{(k)}$.

Soit u un unitaire dans R tel que $uf = w$. Alors

$$ufu^* = ww^* = \bar{f}, \quad u f e_{ij}^{(k)} f u^* = \bar{f} p_{ij}^{(k)} \bar{f} \quad \forall i, j, k.$$

Donc $uN^f u^* = \bar{N}^{\bar{f}}$.

De plus,

$$\|w - \sum_k \sum_j e_{1j}^{(k)} e_{jj}^{(k)} e_{j1}^{(k)}\|_2 \leq n\epsilon + n \frac{\alpha}{8n} \leq \frac{\alpha}{4},$$

donc

$$\|w - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{4}, \quad \|f - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \|\bar{f} - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{2},$$

et

$$\|u - 1\|_2 \leq \|uf - 1\|_2 + \|u(1 - f)\|_2 \leq \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \leq \alpha.$$

□

Lemme 18. Soient $\alpha > 0$, u un unitaire dans R tel que $\|u - 1\|_2 \leq \alpha$, alors il existe des unitaires v et v' tels que

$$\|v - 1\|_\infty \leq \alpha^{1/2}, \quad \tau(\text{Support}(v' - 1)) \leq \alpha^{1/2} \quad \text{et} \quad vv' = u.$$

Démonstration. Soit e' la projection spectrale de u telle que $|u - 1|^2 e' \geq \alpha e'$, $|u - 1|^2(1 - e') \leq \alpha(1 - e')$. Prenons alors $v = u(1 - e') + e'$, $v' = (1 - e') + ue'$ et utilisons l'inégalité $\tau(|u - 1|^2 e') \leq \|u - 1\|_2^2 \leq \alpha^2$ pour obtenir $\tau(e') \leq \alpha$. $\square$

Lemme 19. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que si N est une sous-algèbre de von Neumann de R avec $n = \dim N$, alors pour toute projection $e \in R$, il existe une projection $E \in N' \cap R$ telle que $E \leq e$ et $\tau(1 - E) \leq k(n)\tau(1 - e)$.*

Démonstration. Considérons N comme plongée en blocs le long de la diagonale principale dans les matrices $n \times n$ M_n . M_n est engendrée par le groupe H d'unitaires dont les coefficients sont 0, ± 1 . Soit $k(n) = \text{card } H$. Si $G = H \cap N'$, alors $(G)' = N$. Soit $E = \bigwedge_{u \in G} ueu^*$. $\square$

Lemme 20. *Soient n et $\epsilon' > 0$ donnés. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann de R , avec $N \subset P$ et $\dim N = n$, il existe un unitaire v , $\|v - 1\|_\infty < \epsilon'$, une projection E , $\tau(E) > 1 - \epsilon'$, et une sous-algèbre de von Neumann $\bar{N}$ de P , $\dim \bar{N} \leq n + 1$, tels que :*

$$E \in N', \quad vEv^* \in \bar{N}', \quad \text{et} \quad vN^E v^* = \bar{N}^{vEv^*}.$$

Démonstration. Choisissons $\alpha > 0$ tel que si $k(n)$ est comme dans le Lemme 8, alors

$$\alpha^{1/2} \leq \epsilon', \quad \alpha^{1/2} + \alpha^2 \leq \epsilon'/k(n).$$

Puis choisissons δ correspondant à n et α par le Lemme 6. Soit $N \subset P$ et $\dim N = n$. Alors soit $\bar{N} \subset P$, $u, f, \bar{f}$ satisfaisant les conditions du Lemme 6. Par le Lemme 7, il existe des unitaires $v, v' \in R$ avec $v'e = ev' = e$ et $e \leq f$. (Prenons $e = f \wedge (1 - \text{support}(1 - v'))$ de sorte que $\tau(1 - e) \leq \tau(1 - f) + \tau(\text{support}(1 - v')) \leq \|1 - f\|_2^2 + \alpha^{1/2} \leq \alpha^2 + \alpha^{1/2} \leq \epsilon'/k(n)$.)

Soit $E \in N'$ une projection telle que $E \leq e$, $\tau(1 - E) \leq k(n)\tau(1 - e) \leq \epsilon'$ (Lemme 8). Comme $E \leq f$, nous avons $(N')^E = N^E$, $(\bar{N})^{\bar{f}} uEu^* = (uN'u^*)^{uEu^*} = uN^E u^*$, et comme $uEu^* \leq \bar{f}$, $\bar{N}^{uEu^*} = uN^E u^*$. De plus $E \leq e$ donc $uEu^* = vEv^*$, et $uN^E u^* = vN^E v^*$, d'où $vN^E v^* = \bar{N}^{vEv^*}$. $\square$

Deuxième partie

Lemme 21. *Soient $n > 0$, $\epsilon > 0$ donnés, alors il existe un $\epsilon' > 0$ tel que pour toute sous-algèbre de von Neumann Q de R de dimension n , on ait :*

$$H(Q \mid vQv^*) < \epsilon, \quad \forall v \text{ unitaire}, \quad \|v - 1\|_\infty < \epsilon'.$$

Démonstration. Choisissons ϵ' tel que pour toute famille de réels positifs $\alpha_i, i = 1, \dots, n, \sum \alpha_i = 1$, toutes familles $\lambda_i, \lambda'_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum \lambda_i = \sum \lambda'_i = 1$,

$$\sum |\lambda_i - \lambda'_i| \alpha_i < 2\epsilon' \Rightarrow \left| \sum (\eta(\lambda_i) - \eta(\lambda'_i)) \alpha_i \right| < \epsilon.$$

Soient Q et v donnés. Soit $x \in R_+, \tau(x) = 1$. Nous avons $E_{vQv^*}(x) = vE_Q(v^*xv)v^*, \tau\eta E_{vQv^*}(x) = \tau\eta E_Q(v^*xv)$. Or $X = E_Q(x)$ et $X' = E_Q(v^*xv)$ appartiennent tous deux à Q^+ et satisfont $\tau(X) = \tau(X') = 1, \|X' - X\|_1 \leq \|v^*xv - x\|_1 \leq 2\epsilon'$, puisque E_Q est une contraction pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $q_1, \dots, q_s$ la liste des atomes du centre de Q , où Qq_k est de type n_k , et $\sum n_k^2 = n$, donc $\sum n_k \leq n$. Soit $X = \sum_{k,j} \lambda_j^{(k)} e_j^{(k)}$ (resp. $X' = \sum_{k,j} \lambda'_j{}^{(k)} e_j^{(k)}$) la décomposition spectrale de X (resp. X'), où

pour chaque k, j , $e_j^{(k)}$ et $e_j'^{(k)}$ sont des projections minimales de Q_{q_k} . Nous avons, pour un choix convenable des décompositions [10, Théorème 5.6],

$$\sum |\lambda_j^{(k)} - \lambda_j'^{(k)}| \tau(e_j^{(k)}) \leq 2\epsilon',$$

d'où

$$|\tau \eta E_{vQv^*}(x) - \tau \eta E_Q(x)| = \left| \sum (\eta(\lambda_j^{(k)}) - \eta(\lambda_j'^{(k)})) \tau(e_j^{(k)}) \right| \leq \epsilon.$$

Nous avons montré que $\forall x \in R_+$, $|\tau \eta E_{vQv^*}(x) - \tau \eta E_Q(x)| \leq \epsilon \tau(x)$; il s'ensuit facilement que $H(Q | vQv^*) < \epsilon$. $\square$

Lemme 22. *Soit N une sous-algèbre de von Neumann de R de dimension $\leq n$, et $E \in N'$ une projection, alors*

$$\begin{aligned} H(N^E | N) &\leq \eta(\tau(E)) + \eta(1 - \tau(E)), \\ H(N | N^E) &\leq \eta(\tau(E)) + \eta(1 - \tau(E)) + \tau(1 - E) \log n. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit Q l'algèbre de von Neumann engendrée par N et la sous-algèbre de von Neumann abélienne $\mathcal{A}$ de N' engendrée par E . Nous avons (propriété I) $H(Q | N) \leq H(\mathcal{A}) = \eta\tau(E) + \eta\tau(1 - E)$. Comme N^E et N^{1-E} commutent et engendrent Q , nous avons (propriété I)

$$H(Q | N^E) \leq H(N^{1-E}) \leq \eta\tau(1 - E) + \eta(\tau(E)) + \tau(1 - E) \log n.$$

Alors

$$H(N | N^E) \leq H(Q | N^E) \leq \eta(\tau(1 - E)) + \eta\tau(E) + \tau(1 - E) \log n$$

et

$$H(N^E | N) \leq H(Q | N) \leq \eta(\tau(E)) + \eta(\tau(1 - E)).$$

$\square$

Fin de la démonstration du Théorème 1

Choisissons d'abord ϵ' tel que le Lemme 10 soit satisfait avec $n + 1$ et $\epsilon/2$, et tel que, $\epsilon' \leq 1/2$,

$$2(\eta(\epsilon') + \eta(1 - \epsilon')) + \epsilon' \log(n + 1) \leq \epsilon/2.$$

Puis choisissons δ tel que le Lemme 9 soit satisfait pour n et ϵ' . Maintenant soient N et P donnés, avec $N \stackrel{\delta}{\sim} P$ et $\dim N = n$. Par le Lemme 9, nous trouvons $E \in N'$, $\tau(E) > 1 - \epsilon'$, et $\widetilde{N}, \widetilde{N} \subset P$, $\dim \widetilde{N} \leq n + 1$, $v \in R$, $\|v - 1\|_\infty < \epsilon'$ avec $vN^E v^* = \widetilde{N}^{vEv^*}$. Par le Lemme 11, nous avons :

$$H(N | N^E) \leq \eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon') + \epsilon' \log(n + 1).$$

Par le Lemme 10, nous avons

$$H(N^E | vN^E v^*) \leq \epsilon/2.$$

Par le Lemme 11, nous avons :

$$H(\widetilde{N}^{vEv^*} | N) \leq \eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon').$$

Nous obtenons donc, en utilisant la propriété G et $H(\widetilde{N} | P) = 0$,

$$H(N | P) \leq 2(\eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon')) + \epsilon' \log(n + 1) + \epsilon/2 \leq \epsilon.$$

4. Le théorème de Kolmogorov-Sinai non abélien

Définition 23. Soit θ un automorphisme de l'algèbre de von Neumann finie R , préservant la trace normale fidèle τ , $\tau(1) = 1$, alors

(a) Pour toute sous-algèbre de von Neumann de dimension finie N de R , posons

$$H(N, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \dots, \theta^k(N)).$$

(b) Posons

$$H(\theta) = \sup_N H(N, \theta).$$

Notons que dans (a) la limite existe en raison de la propriété B.

Théorème 24. Soit R une algèbre de von Neumann hyperfinie de type II_1 , et τ, θ comme ci-dessus. Soit $(P_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de R avec $(\bigcup_{q=1}^{\infty} P_q)^- = R$ (fermeture faible), alors :

$$H(\theta) = \lim_{q \rightarrow \infty} H(P_q, \theta).$$

Démonstration. Soit N une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de R , et $\epsilon > 0$. Appliquons le Théorème 1 de la section 3 pour obtenir un q tel que $H(N | P_q) < \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned} H(N, \theta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \dots, \theta^k(N)) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(P_q, \theta(P_q), \dots, \theta^k(P_q)) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k H(\theta^j(N) | \theta^j(P_q)) \\ &\leq H(P_q, \theta) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 25. Soit N_0 une algèbre de von Neumann de dimension finie avec une trace normalisée fidèle τ_0 . Posons $(R, \tau) = \otimes_{r \in \mathbb{Z}} (N_0, \tau_0)_r$ et soit S l'automorphisme de R correspondant à la translation de 1 dans $\mathbb{Z}$. Alors S préserve τ et :

$$H(S) = H(N_0).$$

Démonstration. Soit π_j l'homomorphisme de N_0 dans R tel que

$$\pi_j(x) = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots$$

Nous avons par construction $S\pi_j = \pi_{j+1}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P_k = (\bigcup_{|j| \leq k} \pi_j(N))''$. Clairement les P_k forment une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R et $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ est dense faiblement dans R .

La propriété E montre que $H(P_k, SP_k, \dots, S^r P_k) = (2k + r + 1)H(N_0)$, d'où le théorème 3 découle du théorème 2. □

Nous étendons maintenant le Théorème 3 à une classe plus large d'automorphismes ergodiques du facteur hyperfini R qui sont les analogues des décalages de Bernoulli. Rappelons que si M_n est le facteur I_n avec trace T_{r_n} telle que $T_{r_n}(1) = n$, et ω est un état de M_n , alors $\omega(x) = T_{r_n}(hx)$, où h est un opérateur positif de trace 1, alors la liste des valeurs propres de ω est le spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de h compté avec multiplicité. Si R_m est une algèbre de von Neumann et ϕ_m un état normal de R_m , $m \in \mathbb{Z}$, nous désignons comme précédemment par $\otimes_m(R_m, \phi_m)$ l'algèbre de von Neumann obtenue à partir de la représentation GNS de l'état $\otimes \phi_m$ sur le produit tensoriel des C^* -algèbres $\otimes R_m$. Si ϕ est un état sur une algèbre de von Neumann M , son centralisateur est l'algèbre $\{x \in M : \phi(xy - yx) = 0 \forall y \in M\}$. Le théorème suivant a également été noté par W. Krieger.

Théorème 26. Soit M_0 les matrices $n \times n$ et ϕ_0 un état fidèle sur M_0 de liste de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, soit $M_m = M_0$ et $\phi_m = \phi_0$. Soit $M = \otimes_{m \in \mathbb{Z}} (M_m, \phi_m)$. Alors :

- (1) Si R est le centralisateur de l'état $\otimes \phi_m$ dans M , alors R est le facteur hyperfini de type II_1 .
- (2) La restriction du décalage sur M à R est un automorphisme ergodique d'entropie $-\sum_{j=1}^n \lambda_j \log \lambda_j$.

Définition 27. L'automorphisme de R construit ci-dessus est le décalage de Bernoulli défini par $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Démonstration. Soit ϕ l'état normal $\otimes \phi_m$ sur M . Il est bien connu que ϕ est fidèle et que M est un facteur. Si $p \leq q$ sont des entiers, soit M_p^q l'image de $\otimes_p^q M_m$ dans M sous son plongement naturel. Soit F_p^q le centralisateur de $\phi \mid M_p^q$ dans M_p^q . Si $p \leq r \leq s \leq q$, alors clairement $F_r^s \subset F_p^q$. Nous affirmons que $\bigcup_r^\infty F_p^q$ est fortement dense dans R .

Soit $\sigma_t = \sigma_t^\phi$ l'automorphisme modulaire de M défini par ϕ , voir [15]. Puisque ϕ est un état produit, pour chaque $p \leq q$ nous avons $\sigma_t = \sigma_t \mid M_p^q \otimes \sigma_t \mid (M_p^q)^c$, où $(M_p^q)^c = (M_p^q)' \cap M$, et M est identifié à $M_p^q \otimes (M_p^q)^c$. Soit Φ l'espérance conditionnelle fidèle fortement continue σ -invariante de M sur R [4]. Alors $\Phi(M_p^q) = F_p^q$. Soit $x \in R$. Puisque $\bigcup_r^\infty M_p^q$ est fortement dense dans M , il existe un filet $\{x_\alpha\}$ dans $\bigcup_r^\infty M_p^q$, convergeant fortement vers x . Ainsi $x = \Phi(x) = \lim \Phi(x_\alpha)$, avec $\Phi(x_\alpha) \in \bigcup_r^\infty F_p^q$. L'affirmation est démontrée.

Nous montrons que R est un facteur, donc par le paragraphe ci-dessus R est le facteur hyperfini de type II_1 . Soit P le groupe des permutations finies sur $\mathbb{Z}$ et G le groupe des $*$ -automorphismes de M définis par l'action de P sur les facteurs dans le produit tensoriel infini. Puisque ϕ est G -invariant, les automorphismes sont bien définis, et R est globalement invariant pour chaque $g \in G$. Si $g \in G$, il existe des entiers $p \leq q$ tels que g soit un automorphisme de M_p^q et l'identité sur $(M_p^q)^c$. Puisque M_p^q est un facteur de type I, g est un automorphisme intérieur de M , donc implémenté par un opérateur unitaire $u_g \in M$. Puisque ϕ est G -invariant, $u_g \in R$. Les arguments dans [13] montrent que la C^* -algèbre $\otimes M_m$ est asymptotiquement abélienne par rapport à G et que $\otimes \phi_m$ est un état invariant extrémal. Puisque ϕ est fidèle sur M , G agit ergodiquement sur M , voir [14]. Puisque $u_g \in R$ pour tout $g \in G$, R est un facteur comme affirmé.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, soit α l'automorphisme de M qui décale les facteurs dans le produit tensoriel infini d'un facteur vers la droite, donc $\alpha(M_p^q) = M_{p+1}^{q+1}$, et soit H le groupe cyclique engendré par α . Comme ci-dessus, ϕ est H -invariant, l'automorphisme est bien défini, et $\otimes M_m$ est asymptotiquement abélienne par rapport à H . Puisque M est un facteur, $\otimes \phi_m$ est ergodique [14], et H agit ergodiquement sur M [14]. Soit θ la restriction de α à R . Alors θ est un automorphisme ergodique de R .

Par le Théorème 2, $H(\theta) = \lim H(F_{-p}^p, \theta)$. Fixons p ; alors

$$H(F_{-p}^p, \theta(F_{-p}^p), \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) = H(F_{-p}^p, F_{-p+1}^{p+1}, \dots, F_{-p+k}^{p+k}).$$

Par la propriété C ,

$$H(F_{-p}^p, \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) \leq H(F_{-p}^{p+k}).$$

Soit A_{-p}^p une sous-algèbre abélienne maximale de F_{-p}^p telle que A_{-p}^p commute avec $\theta^j(A_{-p}^p)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et telle que $A = (A_{-p}^p \cup \theta(A_{-p}^p) \cup \dots \cup \theta^k(A_{-p}^p))''$ soit une sous-algèbre abélienne maximale de F_{-p}^{p+k} . Ce choix est possible puisque ϕ est un état produit. Ainsi, par les propriétés C, D, E avec l'inégalité ci-dessus, nous avons

$$H(F_{-p}^p, \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) = H(A) = (2p + k) \left(- \sum_1^n \lambda_j \log \lambda_j \right).$$

La démonstration est achevée. $\square$

Remarque : Récemment, G. Emch a défini une entropie pour les automorphismes des algèbres de von Neumann. Sa définition est différente de la nôtre, et dans la mesure où son entropie ne peut pas être calculée dans les exemples ci-dessus en l'absence d'un théorème de Kolmogorov-Sinaï, nous ne savons pas si les deux définitions coïncident dans le cas des décalages. En fait, sa définition de $H(N, \theta)$ n'est même pas croissante en N , de sorte que nous ne croyons pas que l'analogie de notre Théorème 2 puisse être démontré dans son contexte.

Remarque : Soit

$$H_a(\theta) = \sup H(\theta \mid \mathcal{A}),$$

où le sup est pris sur toutes les sous-algèbres de von Neumann abéliennes $\mathcal{A}$ de R avec $\theta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ et $H(\theta \mid \mathcal{A})$ est l'entropie de $\theta \mid \mathcal{A}$ définie dans le cas abélien. Si θ est le décalage de Bernoulli défini par $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, nous obtenons à nouveau $H_a(\theta) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log \lambda_i$. Cependant, cette définition n'est pas satisfaisante en ce qu'il n'est pas clair s'il existe de grandes sous-algèbres de von Neumann abéliennes invariantes pour un θ donné. Dans la remarque suivante (Remarque 6), nous montrons comment calculer $H(\theta^k)$ à partir de $H(\theta)$; il est hautement improbable que la même formule soit valable pour l'entropie abélienne H_a , car une sous-algèbre de von Neumann abélienne $\mathcal{A} \subset R$ globalement invariante sous θ^k n'est pas nécessairement globalement invariante sous θ .

Remarque : Soit R une algèbre de von Neumann de type II_1 , et θ un automorphisme préservant une trace normale fidèle τ satisfaisant $\tau(1) = 1$. Nous montrons que si p est un entier, alors $|p|H(\theta) \geq H(\theta^p)$, et si R est hyperfinie, alors $|p|H(\theta) = H(\theta^p)$.

Le cas $p = 0$ est trivial ainsi que l'identité $H(\theta^{-1}) = H(\theta)$. Nous supposons donc $p > 0$. Soit $\epsilon > 0$ et N une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de R et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$H(\theta^p) < \frac{1}{r} H(N, \theta^p N, \dots, \theta^{pr} N) + \epsilon \quad \text{pour } r \geq n_0.$$

Il est immédiat d'après les propriétés A et C que

$$H(N_1, \dots, N_k) \leq H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1})$$

pour des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie $N_1, \dots, N_{k+1}$ de R . Par conséquent, pour n_0 suffisamment grand, et $r \geq n_0$,

$$H(\theta) + \epsilon > \frac{1}{rp} H(N, \theta N, \dots, \theta^{rp} N) \geq \frac{1}{rp} H(N, \theta^p N, \dots, \theta^{pr} N) > \frac{1}{p} H(\theta^p) - \epsilon/p.$$

Ainsi $pH(\theta) \geq H(\theta^p)$.

Pour l'inégalité inverse, supposons R hyperfinie, donc il existe une suite croissante $\{F_j\}$ de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie avec réunion dense faiblement dans R . Soit $\epsilon > 0$. Par le Théorème 2, il existe $k, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left| H(\theta) - \frac{1}{n} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^n F_k) \right| < \epsilon/p \quad \text{pour } n \geq n_0. \quad (1)$$

Soit $m = \dim F_k$. Choisissons par le Théorème 1, $\delta > 0$ si petit que pour N et P sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R nous ayons

$$\dim N = m, \quad N \stackrel{\delta}{\sim} P \Rightarrow H(N | P) < \epsilon/p. \quad (2)$$

Puisque la suite $\{F_j\}$ est croissante avec réunion dense dans R , il existe $q \in \mathbb{N}$, $q \geq k$, tel que $F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{p-1} F_k \subset F_q$. Choisissons $r \in \mathbb{N}$ si grand que

$$rp \geq n_0, \quad (3)$$

$$\left| H(\theta^p, F_q) - \frac{1}{r} H(F_q, \theta^p F_q, \dots, \theta^{pr} F_q) \right| < \epsilon. \quad (4)$$

Par la propriété C ,

$$H(F_q, \theta^p F_q, \dots, \theta^{pr} F_q) \geq H(F_q, \dots, F_q, \theta^p F_q, \dots, \theta^p F_q, \dots, \theta^{(r-1)p} F_q, \dots, \theta^{(r-1)p} F_q, \theta^{pr} F_q),$$

où toutes les répétitions se produisent p fois. En utilisant ceci avec la propriété F , nous obtenons de (1)-(4),

$$\begin{aligned} H(\theta^p, F_q) + \epsilon &> \frac{1}{r} H(F_q, \theta F_q, \dots, \theta^{pr} F_q) \\ &\geq \frac{1}{r} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{pr} F_k) - \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^{sp+t} F_k | \theta^{sp} F_q) - \frac{1}{r} H(\theta^{sp} F_k | \theta^{sp} F_q) \\ &= \frac{p}{rp} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{pr} F_k) - \frac{1}{r} \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^t F_k | F_q) - \frac{1}{r} H(F_k | F_q) \\ &> p(H(\theta) - \epsilon/p) - \left(p + \frac{1}{r}\right) \epsilon/p \geq pH(\theta) - 3\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $H(\theta^p) \geq pH(\theta)$, comme affirmé.

Références

- [1] Behnke, H., *Topics in C^* - and von Neumann algebras*. Lectures in operator algebras, Lecture Notes Math. 247, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972. 2-55.
- [2] Choi, M. D., *Positive linear maps on C^* -algebras*, Canad. J. Math., **24** (1972), 520-529.
- [3] Dixmier, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Paris, Gauthier-Villars 1969.
- [4] Kovács, I., Szűcs, J., *Ergodic type theorems in von Neumann algebras*. Acta Sci. Math., **27** (1966), 233-246.
- [5] Lieb, E. H., *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*. Advances Math., **11** (1973), 267-288.

- [6] Lieb, E. H., RUSKAI, M. B., *Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy*. J. Math. Physics, **14** (1973), 1938-1941.
- [7] Lindblad, G., *Entropy, information and quantum measurements*. Commun. Math. Phys., **33** (1973), 305-322.
- [8] *Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems*. Commun. Math. Phys., **39** (1974), 111-119.
- [9] Nakamura, M., Umegaki, H., *A note on the entropy for operator algebras*. Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149-154.
- [10] Powers, R. T., *Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings*. Ann. of Math., **86** (1967), 138-171.
- [11] Ruelle, D., *Statistical mechanics, rigorous results*. W. A. Benjamin, New York, Amsterdam 1969.
- [12] Sakai, S., *C^* and W^* algebras*. Ergebnisse der Math., Band 60.
- [13] St, E., *Symmetric states of infinite tensor products of C^* -algebras*. J. Funct. Anal., **3** (1969), 48-68.
- [14] *Asymptotically abelian systems*. Cargèse lectures in physics, Vol. 4, 195-213, New York, Gordon and Breach 1970.
- [15] Takesaki, M., *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. Lecture Notes Math. 128, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1970.

Received September 17, 1974.