

Calcul de l'invariant $\chi(M)$ pour les facteurs de type II_1

A. Connes

Séance du 26 mai 1975

1. Définition de l'invariant $\chi(M)$.

Soit M un facteur à prédual séparable M_* . On munit le groupe $\text{Aut } M$ des automorphismes de M de la topologie de la convergence simple normique dans M_* . On note ϵ l'application canonique de $\text{Aut } M$ sur $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$ où $\text{Int } M$ est le groupe des automorphismes intérieurs. Une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M est dite *centralisante* quand, pour tout $\psi \in M_*$, on a $\|[x_n, \psi]\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On pose

$$\text{Ct } M = \{\alpha \in \text{Aut } M \mid \alpha(x_n) - x_n \rightarrow 0 \text{ fortement pour toute suite centralisante } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

On a $\text{Int } M \subset \text{Ct } M$. L'assertion a du théorème 1 utilise un résultat de McDuff (3).

Théorème 1. *Soient R un facteur hyperfini de type II_1 , et M , $\text{Int } M$, ϵ , $\text{Ct } M$ comme ci-dessus,*

- a. M est isomorphe à $M \otimes R$ si et seulement si le groupe $\epsilon(\text{Int } M)$ est non commutatif.*
- b. Dans les conditions de a, $\epsilon(\text{Ct } M)$ est le commutant de $\epsilon(\text{Int } M)$ dans $\text{Out } M$.*

Le théorème suivant montre que si le centre de $\epsilon(\text{Int } M)$ est trivial on peut décrire tous les éléments de $\overline{\text{Int } M}$.

Théorème 2. *Soient R et M comme dans 1. Supposons que $\overline{\text{Int } M} \neq \text{Int } M$ et que $\text{Centre } \epsilon(\text{Int } M) = \{1\}$. Alors pour tout $\sigma \in \overline{\text{Int } M}$ il existe une factorisation $M = N \otimes R$ de M telle que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(1_N \otimes s'_p)$ où $p = p_0(\sigma)$, $\gamma = \gamma(\sigma)$ et s'_p sont comme dans [1].*

Rappelons que $p_0(\sigma)$ est la période de $\epsilon(\sigma)$ dans $\text{Out } M$ et que $\gamma(\sigma)$ est la racine p_0 -ième de 1 dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\sigma^{p_0} = \text{Ad } u \Rightarrow \sigma(u) = \gamma u \quad (u \text{ unitaire dans } M).$$

On peut aussi montrer que $\epsilon(\text{Int } M)$ est un groupe simple dans les conditions du théorème 2.

Munissons $\text{Aut } M$ de sa structure borélienne standard, alors $\text{Int } M$ et $\text{Ct } M$ sont des boréliens. Le théorème 1 montre que le centre de $\epsilon(\text{Int } M)$ est égal à $\epsilon(\text{Ct } M \cap \text{Int } M)$ ce qui permet de parler de sa structure borélienne quotient.

Définition 3. *On pose $\chi(M) = \text{Centre } \epsilon(\text{Int } M)$ muni de la structure borélienne quotient.*

Dès que toute suite hypercentralisante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur M ¹ est triviale ($x_n - \lambda_n \rightarrow 0$ fortement pour une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$) on montre que $\chi(M)$ est dénombrablement séparé. À la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{U} \longrightarrow \text{Int } M \longrightarrow \text{Ct } M \cap \text{Int } M \longrightarrow \chi(M) \longrightarrow 1$$

où $\mathbf{U}$ est

le groupe unitaire de M , on associe alors un élément $\Omega_M \in H^3(\chi(M), \mathbf{T})$, où l'action de $\chi(M)$ sur $\mathbf{T}$ est triviale et où les cochaines sont boréliennes [(5) p.42]. Quand M est infini et $\chi(M)$ localement compact, pour une topologie donnant la même structure borélienne, la condition $\Omega_M = 1$ équivaut à l'existence d'un homomorphisme $x \longrightarrow \sigma_x$ de $\chi(M)$ dans $\text{Aut } M$ tel que $\epsilon \circ \sigma = \text{identité}$. (Pour un résultat cohomologique général, voir un article à paraître de C. Sutherland.)

2. Calcul de l'invariant $\chi(M)$.

Soient R le facteur hyperfini de type II_1 , et pour $n \in \mathbb{N}$, F_n le groupe libre à n générateurs et $U(F_n)$ le facteur de la représentation régulière de F_n . On a $\chi(M) = \{1\}$ pour

$$M = R, \quad M = U(F_n), \quad M = R \otimes U(F_n), \quad \text{et} \quad M = \otimes_{\nu=1}^{\infty} (U(F_n))_{\nu},$$

où le produit tensoriel est pris relativement à l'unique trace τ_n de $U(F_n)$.

Soient N un facteur, G un sous-groupe fini de $\text{Aut } N$, nous introduisons deux groupes abéliens $K^{\perp}$ et L permettant de calculer $\chi(M)$ où M est le produit croisé de N par G .

Soient $K = G \cap \text{Ct } N$ et $K^{\perp}$ le groupe des homomorphismes de G dans $\mathbf{T}$ qui s'annulent sur K .

Soit L l'intersection dans $\text{Out } N$ de $G \text{Ct } N$ avec le sous-groupe de $\text{Aut } N$ adhérence de $\{\text{Ad } u, u \text{ unitaire de } N\}$.

Pour tout $l \in L$ soit α_l dans l'adhérence ci-dessus, tel que $\epsilon(\alpha_l) = l$. Pour $l_1, l_2 \in L$ on a $\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \alpha_{l_1 l_2}^{-1} = \text{Ad } v$ pour un unitaire $v \in N$. Comme $\text{Ad } v$ commute avec G , v définit un élément $c(l_1, l_2)$ de $K^{\perp}$ par l'égalité :

$$gv = c(g)v \quad \text{pour tout } g \in G.$$

La classe c du cocycle $c \in Z^2(L, K^{\perp})$ ne dépend pas du choix des représentants α_l .

Théorème 4. *Soient N un facteur sans suite hypercentralisante non triviale, et $G \subset \text{Aut } N$ un groupe fini tel que $G \cap \overline{\text{Int } N} = \{1\}$. Pour $\chi \in K^{\perp}$ soit σ_{χ} l'automorphisme de $M = W^*(G, N)$ qui fixe N et multiplie l'unitaire U_g associé à $g \in G$ par $\chi(g)$. Il existe alors une application canonique Π de $\chi(M)$ sur L telle que*

$$1 \rightarrow K^{\perp} \rightarrow \chi(M) \xrightarrow{\Pi} L \rightarrow 1$$

soit une suite exacte, de cocycle c défini ci-dessus.

Le corollaire suivant répond à une question de (6), Probl. 4.4.12.

Corollaire 5. *Il existe un facteur M de type II_1 , tel que ses puissances tensorielles $M \otimes M \otimes \dots \otimes M$ soient deux à deux non isomorphes.*

On prend $N = \otimes(U(F_2))$ et l'automorphisme β , $\beta^2 = 1$, de N qui correspond à l'échange des générateurs de F_2 . Alors avec $G = \{1, \beta\}$ et $M = W^*(G, N)$ on a $\chi(M \otimes \dots \otimes M) = (\mathbb{Z}_2)^n$.

1. i.e. $[x_n, y_n] \rightarrow 0$ fortement pour toute suite centralisante $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corollaire 6. *Le centre de $\text{Out } M$ n'est pas trivial pour certains facteurs de type II_1 . On prend M comme ci-dessus [voir [2], Probl. 8].*

Corollaire 7. *Il existe un facteur de type II_1 , non antiisomorphe à lui-même.*

M est obtenu comme produit croisé de $U(F_4) \otimes R$ par un automorphisme d'ordre 3, β , avec $\epsilon(\beta) = \epsilon(S \otimes s)$, où $S \in \text{Aut } U(F_4)$, $s \in \text{Aut } R$, $p_0(S) = p_0(s) = 3$, $\gamma(S) = j$, $\gamma(s) = j^2$ où $j = \exp(i2\pi/3)$. En particulier M n'est isomorphe au facteur de la représentation régulière d'aucun groupe discret [(5), Probl. 4.4.30]. L'invariant $\chi(M)$ se calcule aussi pour les produits croisés par des groupes infinis, cela permet de montrer que tout groupe abélien compact est le χ d'un facteur de type II_1 . De ce calcul résulte en particulier :

Corollaire 8. *Pour tout $\lambda \in]0, 1[$, soient R_λ et P_λ les facteurs de Powers et Pukanszky de type III_λ et N_λ le facteur de type II_∞ de la décomposition discrète [(2), th. 4.4.1] de $P_\lambda \otimes R_\lambda$. Alors $\chi(N_\lambda) = \mathbf{T}$ et les N_λ sont deux à deux non isomorphes.*

Ainsi les N_λ forment une famille continue de facteurs de type II_∞ construits à partir d'actions ergodiques d'un même groupe discret, et ils sont deux à deux non isomorphes.

Références

- [1] A. Connes, Outer Conjugacy Classes of Automorphisms of Factors, Queen's, preprint, No. 1975-12.
- [2] A. Connes, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 6, fasc. 2, 1973.
- [3] D. McDuff, Proc. London Math. Soc., 21, 1970.
- [4] C. Moore, Trans. Amer. Math. Soc., 113, 1964.
- [5] S. Sakai, C^* and W^* algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete, 80.

Department of Mathematics, Queen's University, Kingston (Ontario), Canada.