

Classification des automorphismes des facteurs hyperfinis de type II_1 et II_∞ et application aux facteurs de type III

A. Connes

Communiqué par I. M. Singer, le 10 avril 1975

Résumé

Pour chaque entier $p = 0, 1, 2, \dots$ et nombre complexe γ , $\gamma^p = 1$ ($\gamma = 1$ pour $p = 0$), nous définissons un automorphisme s_p^γ du facteur hyperfini de type II_1 , R . Pour tout automorphisme α de R , il existe un unique couple (p, γ) et un unitaire $v \in R$ tels que α soit conjugué à $\text{Ad } v \circ s_p^\gamma$. Soit $R_{0,1}$ le produit tensoriel de R par un facteur I_∞ . Il existe, à conjugaison près, un seul automorphisme θ_λ de $R_{0,1}$ tel que θ_λ multiplie la trace par λ , pourvu que $\lambda \neq 1$.

Introduction

La classification des facteurs de type III que nous avons proposée dans [2] relie les classes d'isomorphisme des facteurs de type III_λ , $\lambda \in]0, 1[$, aux classes de conjugaison externe d'automorphismes de facteurs de type II_∞ . Une critique évidente de la valeur d'une telle relation est alors la suivante : Est-il possible de classer les automorphismes, même pour le facteur le plus simple de type II_∞ , à savoir $R_{0,1}$, le produit tensoriel de R , le facteur hyperfini II_1 , par un facteur I_∞ ? Nous répondons à cette question dans cet article, en montrant que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, il n'existe, à conjugaison près, qu'un seul automorphisme de $R_{0,1}$ qui multiplie la trace par λ . La preuve de ce fait repose sur la classification des automorphismes du facteur hyperfini R (voir le Théorème 1) qui, à son tour, utilise principalement l'analogie entre la théorie ergodique classique et la théorie ergodique sur une algèbre de von Neumann non abélienne.

Automorphismes du facteur hyperfini de type II_1

Rappelons que si M est un facteur et $\theta \in \text{Aut } M$, on définit la *période externe* $p_0(\theta)$ comme la période de θ modulo les automorphismes intérieurs (i.e. $\theta^k \in \text{Int } M \Leftrightarrow k \in p_0(\theta)\mathbb{Z}$). De plus, l'*obstruction* de θ , notée $\gamma(\theta)$, est la racine de l'unité dans $\mathbb{C}$ telle que $(\theta^{p_0} = \text{Ad } v, v \text{ unitaire dans } M) \Rightarrow \theta(v) = \gamma v$. Enfin, α et $\beta \in \text{Aut } M$ sont *extérieurement conjugués* ssi β est conjugué au produit de α par un automorphisme intérieur.

Théorème 1. *Deux automorphismes α, β de R sont extérieurement conjugués si et seulement si $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$ et $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.*

En particulier, deux automorphismes apériodiques α, β de R sont extérieurement conjugués. Ceci repose sur un analogue du théorème de Rokhlin. Dans le cas $p_0(\alpha) \neq 0$, la démonstration utilise le produit tensoriel comme structure de groupe sur l'ensemble $Br(\mathbb{Z}/p, R)$ des classes de conjugaison externe d'automorphismes α avec $p_0(\alpha) = p$ (voir [5]). Pour $p \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma^p = 1$, il n'existe, à conjugaison près, qu'un seul automorphisme s_p^γ de R de période p , d'ordre γ et d'invariants p, γ . Cet automorphisme s_p^γ a été décrit dans [4], [5]. Pour $p = 0$, nous notons s_0 le décalage bilatère sur R lorsque R s'écrit $R = \bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} (R_1)_\nu$ avec R_1 isomorphe à R . Le théorème 1 signifie qu'à conjugaison près, tout automorphisme de R est le produit d'un s_p^γ par un automorphisme intérieur.

Corollaire 2. *Le groupe $\text{Out } R = \text{Aut } R / \text{Int } R$ n'a pas de sous-groupe normal non trivial.*

En particulier, le centre de $\text{Out } R$ est trivial, contrairement à ce qui se passe pour les facteurs de type III [2, 1.2.8b].

Le corollaire 2 signifie que R ne peut pas être décomposé de manière significative et invariante en objets plus simples.

Corollaire 3. *Soit N une algèbre de von Neumann finie engendrée par une sous-algèbre de von Neumann hyperfinie P et un unitaire U , $UPU^* = P$; alors N est hyperfinie.*

On montre, en utilisant le Théorème 1, que tout automorphisme α de P engendre le même groupe plein [2, 1.5.4] qu'un automorphisme β tel que, pour une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie K_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, de P , on ait $\beta(K_\nu) = K_\nu$ pour tout ν , et $\bigcup_{\nu=1}^\infty K_\nu$ dense dans P . On remplace alors U , $\text{Ad } U/P = \alpha$, par un unitaire $V \in N$ tel que $\text{Ad } V/P = \beta$.

Avec le Corollaire 3, on peut alors démontrer un résultat, dû à Golodets lorsque N est proprement infini (voir [6]).

Corollaire 4. *Soient P une algèbre de von Neumann hyperfinie et G un groupe résoluble d'unitaires dans $L(H)$ tel que $uPu^* = P$ pour tout $u \in G$; alors $(P \cup G)''$ est hyperfinie.*

En particulier, toute représentation d'un groupe résoluble engendre une algèbre de von Neumann hyperfinie.

Automorphismes du facteur hyperfini connu de type II_∞

Soient N un facteur de type II_∞ , τ une trace normale semi-finie fidèle sur N , $\theta \in \text{Aut } N$; alors nous appelons *module* de θ l'unique $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tau \circ \theta = \lambda \tau$: $\lambda = \text{mod } \theta$.

Théorème 5. *Soit $R_{0,1} = R \otimes L(H)$ le facteur hyperfini connu de type II_∞ . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \neq 1$, il n'existe, à conjugaison près, qu'un seul $\theta \in \text{Aut } R_{0,1}$ de module égal à λ .*

De plus, deux automorphismes α, β de $R_{0,1}$ de module égal à 1 sont extérieurement conjugués ssi ils ont la même période externe et la même obstruction.

Corollaire 6. *Un automorphisme $\theta \in \text{Aut } R_{0,1}$ est un commutateur $\theta = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ pour $\alpha, \beta \in \text{Aut } R_{0,1}$ si et seulement si son module est égal à 1.*

Corollaire 7. *Soit M un facteur de type III, et $M = W^*(\theta, N)$ sa décomposition discrète [2, Théorème 4.4.1]. Alors M est isomorphe au facteur de Powers R_λ ssi N est isomorphe à $R_{0,1}$.*

Références

- [1] A. Connes, W. Krieger, *Outer conjugacy of noncommutative Bernoulli shifts* (à paraître).
- [2] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 133–252.
- [3] A. Connes, *On hyperfinite factors of type III and Krieger’s factors*, J. Functional Analysis (à paraître).
- [4] A. Connes, *A factor not anti-isomorphic to itself*, Bull. London Math. Soc. (à paraître).
- [5] A. Connes, *Periodic automorphisms of the II_1 hyperfinite factor*, Queen’s preprint, 1974-25.
- [6] A. Connes, P. Ghez, R. Lima, D. Testard and E. J. Woods, *Review of Crossed products of von Neumann algebras* (article de Golodets).

Department of Mathematics, Queen’s University, Kingston, Ontario, Canada