

Une classification des facteurs de type III

Alain Connes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, t. 6, 1973, p. 133 à 252

Table des matières

1. Invariant T	4
1.1. Préliminaires	5
1.2. L'homomorphisme δ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Out } M$	5
1.3. Invariant T pour les algèbres de von Neumann	6
1.4. Calcul de l'invariant T pour les produits croisés	7
1.5. Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est un $T(M)$	7
1.6. Non-normalité des facteurs de type III	8
2. Groupes d'automorphismes	8
2.1. Préliminaires	8
2.2. Équivalence extérieure et invariant Γ	9
2.3. Interprétation de l'orthogonal de $\Gamma(U)$	9
3. Invariant S	9
3.1. Préliminaire	10
3.2. Égalité $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma)$	10
3.3. Calcul de l'invariant S pour les produits croisés	11
3.4. Comparaison des invariants S et T	11
3.5. Interprétation spatiale de S(M)	11
3.6. Relations des invariants S et T avec les invariants d'Araki et Woods	11
4. Facteurs de type III, avec $0 < \lambda < 1$	12
4.1. Préliminaire	12
4.2. Comparaison des centralisateurs	13
4.3. Traces généralisées	13
4.4. Classification des facteurs de type III, $(\lambda \in]0, 1[)$	14
5. Facteurs de type III_0	14
5.1. Préliminaire	15
5.2. Centralisateurs et sous-algèbres abéliennes maximales	15
5.3. Tout facteur de type III_0 est un produit croisé	15
5.4. Classification des facteurs de type III_0	15
5.5. Existence de facteurs hyperfinis qui ne sont pas des facteurs d'Araki-Woods	16

Introduction

Le problème principal de la théorie des algèbres de von Neumann est celui de la classification à isomorphisme près des algèbres de von Neumann opérant dans un espace hilbertien séparable. Un théorème de von Neumann permet de se limiter au cas des *facteurs* (i.e. des algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires). La théorie de la dimension relative des projecteurs (de Murray et von Neumann) répartit les facteurs en types I, II et III. À tout facteur M de type I est associé un entier $n \in [1, \infty]$ et M est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ où $\mathcal{H}_n$ est un espace hilbertien de dimension n . Mc Duff a montré (en 1968) l'existence d'une infinité continue de facteurs de type II_1 deux à deux non isomorphes. R. T. Powers a montré (en 1967) l'existence d'une infinité continue $(R_\lambda)_{\lambda \in]0,1[}$ de facteurs de type III deux à deux non isomorphes. De plus, dans [40], E. J. Woods a prouvé l'impossibilité de construire « effectivement » une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de facteurs de type III et l'ensemble des nombres réels.

Cependant, dans [2], H. Araki et E. J. Woods ont défini, par référence aux facteurs R_λ de Powers, deux invariants algébriques r_∞ et $\mathcal{E}$, et ont donné une classification des facteurs produits tensoriels infinis de facteurs de type I; cette classification a été généralisée par W. Krieger (cf. [23] à [27]) aux facteurs construits à partir de transformations ergodiques.

Rappelons qu'un facteur est de type $\neq \text{III}$ si et seulement s'il possède une trace normale fidèle semi-finie. La donnée d'un couple (algèbre de von Neumann, trace normale fidèle semi-finie) est équivalente à la donnée d'une algèbre hilbertienne achevée. Plus généralement F. Combes, G. Pedersen et M. Takesaki ont montré l'équivalence entre la donnée d'un couple (algèbre de von Neumann, poids normal fidèle semi-fini) et celle d'une algèbre hilbertienne à gauche achevée (notion due à M. Tomita [36]). Sur toute algèbre de von Neumann M il existe des poids normaux fidèles semi-finis. L'écart entre un tel poids φ sur M et une trace donne naissance à un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M , associé à l'opérateur modulaire Δ_φ de l'algèbre hilbertienne à gauche du couple (M, φ) .

Le point de départ de notre travail a été la confrontation de la théorie de Tomita et Takesaki [36] avec la classification d'Araki et Woods [2]. Cela nous a amené à définir deux invariants S et T : $S(M)$ est l'intersection des $\text{Sp } \Delta_\varphi$ pour φ poids normal fidèle semi-fini sur M , et $T(M)$ est l'ensemble des périodes possibles des groupes d'automorphismes modulaires de M . Les invariants r_∞ et $\mathcal{E}$ se calculent en fonction de S et T dans le cas des facteurs d'Araki et Woods. Cependant, les formules définissant S et T dans le cas général étaient d'un emploi difficile : en effet, le plus souvent, une algèbre de von Neumann est donnée avec un poids particulier facile à analyser, mais il est très rarement possible de passer en revue l'ensemble de tous les poids sur M . Il était donc nécessaire de déterminer les propriétés d'un couple (M, φ) qui ne dépendent que de M et non de l'éclairage particulier provenant de φ . C'est là qu'intervient l'idée essentielle de ce texte : pour comparer deux poids φ_1 et φ_2 sur M on considère un troisième poids θ , défini sur $M \otimes \mathbb{F}_2$ par l'égalité

$$\varphi \left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}).$$

Il en résulte facilement que l'automorphisme σ_t^φ est, à t fixe, indépendant de φ modulo les automorphismes intérieurs de M . On en déduit alors l'existence d'un homomorphisme canonique δ de $\mathbb{R}$ dans le groupe $\text{Out } M$ des classes d'automorphismes. Cet homomorphisme est trivial si et seulement si M est semi-finie. De plus, $T(M)$ est le noyau de δ et $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ est le spectre (au sens de 2.2) de δ . En corollaire $T(M)$ et $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ sont des groupes, propriété qui était loin d'être immédiate à partir de leurs anciennes définitions. Enfin, bien que les invariants S et T soient indépendants,

$T(M)$ est l'orthogonal de $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ quand $S(M) \neq \{0, 1\}$. Ce fait, traduit sur r_∞ et $\mathcal{E}$, a pour corollaire le principal résultat de la classification d'Araki et Woods (cf. 3.6).

Pour les facteurs M construits à partir de groupes ergodiques de transformations $\mathcal{G}$, les invariants $S(M)$ et $T(M)$ se calculent simplement en fonction des invariants $r(\mathcal{G})$ et $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ de W. Krieger (voir 1.4 et 3.3). Ce calcul prouve que les relations entre S, T et $r_\infty, \mathcal{E}$ valables pour les facteurs d'Araki-Woods ne sont pas valables en général.

La nature de $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$, sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$, permet de subdiviser le type III en types $\text{III}_\lambda, \lambda \in [0, 1]$. Le résultat principal sur la structure des facteurs de type III est la possibilité de synthétiser tout facteur M de type $\text{III}_\lambda, \lambda \neq 1$, par produit croisé à partir d'une algèbre de von Neumann semi-finie N et d'un automorphisme θ de N . Les critères obtenus pour l'unicité du couple (N, θ) associé à M ramènent le problème de classification des facteurs de type $\text{III}_\lambda, \lambda \neq 1$, à un problème de classification d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann de type II_∞ . Pour $\lambda \in]0, 1[$ on peut choisir pour N un facteur, et la classification des facteurs de type II_1 retentit ainsi sur celle des facteurs de type III. Le cas $\lambda = 0$ correspond à l'impossibilité de choisir pour N un facteur, mais permet par exemple, d'obtenir M comme limite inductive, en un sens très strict (cf. 5.3), d'une suite d'algèbres de von Neumann semi-finies. Les résultats obtenus dans le cas $\text{III}_\lambda, \lambda \neq 1$, ne restent en général pas vrais dans le cas III_0 . Par exemple, M. Takesaki et R. Herman ont montré dans [18] l'existence d'un facteur de type III_0 et d'un état normal fidèle dont le centralisateur est réduit aux scalaires. À l'opposé le centralisateur de tout état normal fidèle sur un facteur de type $\text{III}_\lambda, \lambda \neq 1$, contient une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale du facteur. Ce qui précède montre ainsi l'existence de trois degrés principaux ($\text{III}_\lambda, \text{III}_\lambda$ pour $\lambda \in]0, 1[$, et III_0) dans le caractère « purement infini » des facteurs de type III.

En application, nous avons pu résoudre certains problèmes de la théorie des algèbres d'opérateurs. Les conclusions sont les suivantes :

1. Il existe un facteur hyperfini, qui opère dans un espace séparable, et qui n'est pas un produit tensoriel infini de facteurs de type I (cf. [33], Pb. 4.4.10).
2. Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, la propriété L_λ de Powers n'est pas équivalente à la propriété L_λ d'Araki (question posée dans [1]).
3. Tout facteur normal opérant dans un espace séparable est de type I (Pb. 10 de *On rings of Operators* de Murray et von Neumann).
4. La classification des facteurs non hyperfinis opérant dans un espace séparable n'est pas standard (question posée dans [40]).
5. Pour tout facteur d'Araki-Woods M , l'ensemble des $T_0 \geq 0$ tels que $\exp(-2\pi/T_0) \in \mathcal{E}(M)$ est la partie positive d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (question posée dans [2], p. 124).
6. Le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ dépend continument (pour la topologie simple-forte) de l'état normal fidèle φ (1).
7. L'automorphisme modulaire d'indice t est unique modulo les automorphismes intérieurs (6° et 7° répondent à une question de M. Takesaki dans [38]).

Un des résultats de cet article (voir [12]) a été obtenu en collaboration avec A. Van Daele. Dans [17], V. Ya. Golodets a étudié les propriétés spectrales des opérateurs modulaires à l'aide de suites centrales. Nous montrons ci-dessous que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ il existe un facteur de type $\text{III}_\lambda, P_\lambda$, sur lequel toute suite centrale est équivalente à une suite de scalaires mais tel que $\lambda \in S(P_\lambda)$. Il en résulte que les deux invariants S et S' de [17] ne coïncident pas en général avec l'invariant S que nous avons défini ci-dessus.

Les principaux résultats de ce texte ont été annoncés dans [7], [8], [9], [10] et [11]. Araki, Størmer et Takesaki ont obtenu récemment d'autres applications des invariants S et T (travaux à paraître). Nous remercions J. Dixmier pour son aide au cours de l'élaboration de ce travail.

Nous utilisons la terminologie courante de la théorie des algèbres d'opérateurs, avec les précisions suivantes : les topologies faible et $\star$ -forte sont définies par référence au prédual $M_\star$ de l'algèbre de von Neumann M comme dans [33], p. 20. Sur le groupe des automorphismes de M les topologies de la convergence simple forte et de la convergence simple faible coïncident. Une partition de l'unité dans M est une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux de somme 1. Une représentation normale fidèle π d'une algèbre de von Neumann M est dite standard s'il existe une involution isométrique J qui commute avec les projections du centre de $\pi(M)$ et vérifie $J\pi(M)J = \pi(M)'$. Une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dite standard quand la représentation identité est standard. Nous écrirons automorphisme au lieu de $\star$ -automorphisme ; de plus nous dirons qu'un automorphisme σ de M est intérieur s'il existe un unitaire u de M tel que $\sigma(x) = uxu^*$ pour $x \in M$. Enfin, si $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'éléments d'un espace topologique, indexée par un ensemble filtrant A , nous écrirons « $a_\alpha \rightarrow a$ quand $\alpha \rightarrow \infty$ » au lieu de « $a_\alpha \rightarrow a$ selon A ».

1 Invariant T

Le résultat principal obtenu ici est le théorème 1.2.1 qui montre que modulo les automorphismes intérieurs de l'algèbre de von Neumann M , l'automorphisme modulaire σ_t^φ d'indice t , est indépendant du poids normal fidèle semi-fini φ sur M .

Nous étudions ensuite l'homomorphisme correspondant δ de $\mathbb{R}$ dans le groupe $\text{Out } M$ quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs.

Dans 1.1 nous rappelons les éléments de la théorie des poids sur les algèbres de von Neumann et nous prouvons un lemme technique caractérisant le groupe d'automorphismes σ_t^φ à partir de φ .

Dans 1.2 nous démontrons d'abord le résultat annoncé plus haut. Puis, à partir d'un poids normal fidèle semi-fini arbitraire φ sur M , nous définissons une bijection $\psi \rightarrow (D\psi : D\varphi)$ entre poids normaux fidèles semi-finis sur M et applications fortement continues de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de M telles que $u_{t_1+t_2} = u_{t_1}\sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2})$ pour t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$. Quand ψ est σ_t^φ -invariant pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'unique opérateur positif h affilié à M , tel que $h^{it} = (D\psi : D\varphi)_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est la dérivée de Radon-Nikodym [30] de ψ par rapport à φ .

Dans 1.3 nous étudions le noyau $T(M)$ de l'homomorphisme δ défini plus haut. Nous montrons que $T(M_1 \otimes M_2) = T(M_1) \cap T(M_2)$ et nous calculons $T(M)$ pour les facteurs d'Araki-Woods. Nous donnons de plus un exemple de famille continue de facteurs non hyperfinis deux à deux non isomorphes.

Dans 1.4 nous relient, pour les facteurs construits à partir d'un groupe ergodique de transformations bimesurables, l'invariant T à un invariant $\mathcal{E}$ introduit par Krieger [23].

Dans 1.5 nous étendons à des produits croisés plus généraux les résultats de 1.4. En particulier, utilisant 1.2.1, nous montrons l'unicité de l'espérance conditionnelle normale fidèle d'une algèbre de von Neumann M sur une sous-algèbre N qui contient son commutant relatif. En application nous montrons que pour tout sous-groupe G de $\mathbb{R}$ il existe un facteur de genre dénombrable M tel que $T(M) = G$.

Enfin dans 1.6 nous démontrons que tout facteur normal dans un espace de Hilbert séparable est de type I.

1.1 Préliminaires

Dans la suite, M désigne une algèbre de von Neumann. Un poids φ sur M est une application de M_+ dans $[0, \infty]$ telle que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour x et y dans M_+ et $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda > 0$ et $x \in M_+$ (cf. [5], p. 50). Le sous-espace vectoriel complexe $\mathfrak{M}_\varphi$ de M , $\mathfrak{M}_\varphi = \{x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4, x_j \in M_+, \varphi(x_j) < \infty\}$ est égal à $\mathcal{N}_\varphi^* \mathcal{N}_\varphi$ ou $\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M, \varphi(x^*x) < \infty\}$ ([5], p. 50).

Définition 1.1.1. *On dit qu'un poids φ sur M est :*

1. *Normal, s'il existe une famille (ω_α) de formes linéaires positives normales sur M telles que, pour tout $x \in M_+$, $\varphi(x) = \sup \omega_\alpha(x)$.*
2. *Fidèle, si pour tout $x \in M_+$, $x \neq 0$ entraîne $\varphi(x) \neq 0$.*
3. *Semi-fini, si $\mathfrak{M}_\varphi$ (ou de manière équivalente $\mathcal{N}_\varphi$) est faiblement dense dans M .*

Sur toute algèbre de von Neumann il existe un poids normal fidèle semi-fini. Soient $\mathfrak{U}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée ([36], def. 5.1), $\mathcal{L}^p(\mathfrak{U})$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi_\mathfrak{U}(\xi)$ pour $\xi \in \mathfrak{U}$ [pour ξ et η dans $\mathfrak{U}$, par définition, on a $\pi_\mathfrak{U}(\xi)(\eta) = \xi\eta$]. L'application de $\mathcal{L}^p(\mathfrak{U})_+$ dans $[0, +\infty]$, qui à x associe $+\infty$ si x n'est pas de la forme $\pi_\mathfrak{U}(\xi)^* \pi_\mathfrak{U}(\xi)$ et $\|\xi\|^2$ si $x = \pi_\mathfrak{U}(\xi)^* \pi_\mathfrak{U}(\xi)$, est un poids semi-fini normal fidèle sur $\mathcal{L}^p(\mathfrak{U})$, canoniquement associé à $\mathfrak{U}$ ([37], p. 308).

Soit φ un poids semi-fini normal fidèle sur M , nous noterons η_φ l'injection canonique de l'espace préhilbertien $\mathcal{N}_\varphi$ muni du produit scalaire associé à la forme sesquilinéaire $\varphi(y^*x)$, $y \in \mathcal{N}_\varphi$, $x \in \mathcal{N}_\varphi$, dans l'espace de Hilbert complété $\mathcal{H}_\varphi$. Pour tout $x \in M$, on a $x\mathcal{N}_\varphi \subset \mathcal{N}_\varphi$ et l'application $\eta_\varphi(y) \rightarrow \eta_\varphi(xy)$ de $\eta_\varphi(\mathcal{N}_\varphi)$ dans $\eta_\varphi(\mathcal{N}_\varphi)$ se prolonge en un opérateur borné $\pi_\varphi(x)$ de $\mathcal{H}_\varphi$. L'application π_φ est un isomorphisme de M sur une sous-algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(M)$ de l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\varphi$.

L'espace vectoriel $\eta_\varphi(\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*)$ muni du produit $\eta_\varphi(x)\eta_\varphi(y) = \eta_\varphi(xy)$, de l'involution $\eta_\varphi(x) \rightarrow \eta_\varphi(x^*)$ et du produit scalaire de $\mathcal{H}_\varphi$ est une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{U}$ telle que $\mathcal{L}^p(\mathfrak{U}) = \pi_\varphi(M)$ et que le poids canoniquement associé à $\mathfrak{U}$ sur $\mathcal{L}^p(\mathfrak{U})$, transporté sur M par l'isomorphisme π_φ , soit égal à φ ([37], p. 308). La fermeture S_φ de l'application antilinéaire $\eta_\varphi(x) \rightarrow \eta_\varphi(x^*)$ admet une décomposition polaire $S_\varphi = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} = \Delta_\varphi^{-1/2} J_\varphi$ dans laquelle J_φ désigne une involution isométrique (J_φ est antilinéaire et $J_\varphi^2 = 1$) et Δ_φ un opérateur positif autoadjoint non singulier, appelé opérateur modulaire de φ .

On a $J_\varphi \pi_\varphi(M) J_\varphi = (\pi_\varphi(M))'$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\Delta_\varphi^{it} \pi_\varphi(M) \Delta_\varphi^{-it} = \pi_\varphi(M).$$

1.2 L'homomorphisme δ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Out } M$

Théorème 1.2.1. *Soient M une algèbre de von Neumann, φ et ψ deux poids normaux fidèles semi-finis sur M . Il existe une application fortement continue $t \rightarrow u_t$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de M telle que*

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$.

Démonstration. Soit $(e_{ij})_{i,j=1,2}$ un système d'unités matricielles dans un facteur de type I_2 , noté $\mathbb{F}_2$. Le théorème résulte du lemme plus précis :

Lemme 1.2.2. Soit $P = M \otimes \mathbb{F}_2$. L'application θ de P_+ dans $[0, \infty]$ telle que

$$\theta \left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \right) = \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22}) \quad \text{pour } \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geq 0$$

est un poids semi-fini normal fidèle sur P .

1. Pour tout $x \in M$ on a

$$\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\varphi(x) \otimes e_{11}, \quad \sigma_t^\theta(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^\psi(x) \otimes e_{22}.$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un unitaire unique u_t de M tel que

$$\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}.$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*$ pour $x \in M$. Pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2}).$$

□

Définition 1.2.3. L'application fortement continue u de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de M , déterminée par le lemme 1.2.2 (b) sera notée $(D\psi : D\varphi)$.

Théorème 1.2.4. Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids normal fidèle semi-fini sur M .

1. L'homomorphisme $\delta : t \rightarrow \delta_t = \epsilon(\sigma_t^\varphi)$ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Out } M$ ne dépend pas de φ .
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\delta_t \in \text{Centre}(\text{Out } M)$.
3. Supposons que M soit un facteur à préduel séparable. Pour qu'un groupe fortement continu à un paramètre d'automorphismes, $t \rightarrow \alpha_t$, de M soit le groupe d'automorphismes modulaires d'un poids normal fidèle semi-fini sur M il faut et il suffit que $\epsilon(\alpha_t) = \delta_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.5. Soit M une algèbre de von Neumann, on appelle homomorphisme modulaire associé à M l'homomorphisme δ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Out } M$ défini par 1.2.8 (a).

1.3 Invariant T pour les algèbres de von Neumann

Définition 1.3.1. Soit M une algèbre de von Neumann. On pose

$$T(M) = \{T_0 \in \mathbb{R}, \delta_{T_0} = 1\}.$$

Théorème 1.3.2. Soit M une algèbre de von Neumann et soit $T_0 \in \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $T_0 \in T(M)$.
2. Pour tout poids φ normal fidèle semi-fini sur M l'automorphisme $\sigma_{T_0}^\varphi$ est intérieur.
3. Pour tout poids φ normal fidèle semi-fini sur M il existe un unitaire u du centre de M_φ tel que $\sigma_{T_0}^\varphi(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$.
4. Pour tout poids φ normal fidèle semi-fini sur M il existe un poids normal fidèle semi-fini ψ de la forme $\psi = \varphi(h \cdot)$ où h est positif autoadjoint affilié au centre de M_φ tel que $\sigma_{T_0}^\psi = 1$.

5. Il existe un poids φ normal fidèle semi-fini sur M tel que $\sigma_{T_0}^\varphi$ soit un automorphisme intérieur.

Remarque 1.3.3. Si l'algèbre de von Neumann M est de genre dénombrable, soit φ une forme linéaire positive normale fidèle sur M et soit $T_0 \in T(M)$. L'élément h de M_φ tel que $h^{-iT_0} x h^{iT_0} = \sigma_{T_0}^\varphi(x)$ pour $x \in M$ peut être choisi dans le centre de M_φ .

Théorème 1.3.4. Soient M, M_1, M_2 des algèbres de von Neumann :

1. Si M est semi-finie on a $T(M) = \mathbb{R}$.
2. Si M a un prédual séparable et si $T(M) = \mathbb{R}$, M est semi-finie.
3. On a $T(M_1 \otimes M_2) = T(M_1) \cap T(M_2)$.

Corollaire 1.3.5. Soit M une algèbre de von Neumann, non semi-finie, et à prédual séparable ; alors le centre du groupe $\text{Out } M$ est non trivial.

1.4 Calcul de l'invariant T pour les produits croisés

Définition 1.4.1. Soient M une algèbre de von Neumann, E une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur une sous-algèbre de von Neumann N de M . On appelle groupe normalisateur de E le groupe $H(E)$ des unitaires u de M tels que $E(uxu^*) = uE(x)u^*$ pour tout $x \in M$. Pour $u \in H(E)$ et $x \in N$ on pose $i_u(x) = uxu^*$.

Théorème 1.4.2. Soient $T_0 \in \mathbb{R}$, M une algèbre de von Neumann, E une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur une sous-algèbre de von Neumann semi-finie N de M telle que $C = N' \cap M \subset N$, C_u le groupe unitaire de C , $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $H(E)$ tel que M soit l'algèbre de von Neumann engendrée par N et $\mathcal{G}$. Pour toute trace τ normale fidèle semi-finie sur N_+ et tout $v \in \mathcal{G}$, soit $\rho_{v,\tau}$ l'unique opérateur positif affilié à C tel que $\tau(vxv^*) = \tau(\rho_{v,\tau}x)$ pour tout $x \in N_+$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $T_0 \in T(M)$.
2. Pour toute trace normale fidèle semi-finie τ sur N , il existe un $v \in C_u$ tel que pour tout $u \in \mathcal{G}$ on ait $u^*vuv^* = \rho_{u,\tau}^{iT_0}$.
3. Il existe une trace normale fidèle semi-finie τ sur N telle que $\rho_{u,\tau}^{iT_0} = 1$ pour tout $u \in \mathcal{G}$.

Corollaire 1.4.3. Soit $\mathcal{G}$ un groupe agissant presque librement dans Ω , μ comme dans 1.4.7. On a $T_0 \in T(W^*(\mathcal{G}, \Omega))$ si et seulement si il existe une mesure ν sur Ω positive et équivalente à μ telle que pour tout $s \in \mathcal{G}$ et tout $\omega \in \Omega$ on ait

$$ds^{-1}\nu/d\nu(\omega) \in \{\rho^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

avec $\rho = \exp(-2\pi T_0)$.

1.5 Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est un $T(M)$

Corollaire 1.5.1. 1. Pour tout sous-groupe G de $\mathbb{R}$ il existe un facteur M de genre dénombrable (ayant la cardinalité c du continu) tel que $T(M) = G$.

2. Si G est dénombrable, il existe un facteur M opérant dans un espace de Hilbert séparable et tel que $T(M) = G$.
3. Il existe un facteur de type III_0 , de genre dénombrable, tel que $T(M) = \mathbb{R}$.

1.6 Non-normalité des facteurs de type III

Théorème 1.6.1. *Tout facteur normal dans un espace de Hilbert séparable est de type I.*

2 Groupes d'automorphismes

Le résultat (1.5.8) de la 1re partie montre que la topologie de $\mathbb{R}$ n'intervient pas dans les propriétés de $T(M)$. Soient G un groupe abélien localement compact, Γ son dual et M un facteur. Nous associons (2.2.1) à tout homomorphisme continu U (2.1.1) de G dans $\text{Aut } M$ un sous-groupe fermé $\Gamma(U)$ de Γ . Si G est discret, $\Gamma(U)$ est (2.3.1) l'orthogonal du sous-groupe $T(U)$ des $t_0 \in G$ tels que U_{t_0} soit un automorphisme intérieur associé à un unitaire, U_t -invariant pour tout $t \in G$, de M .

Dans 2.1 nous rappelons (cf. [3]) la notion de spectre $\text{Sp } U$ d'une représentation U de G dans M . Dans 2.2 nous définissons $\Gamma(U)$ comme intersection des spectres des représentations réduites de U par les projecteurs U -invariants. Nous définissons une relation d'équivalence $U \sim V$ entre représentations de G dans M , qui est un raffinement topologique et cohomologique [voir 1.2.8 (c) et 2.3.16 (a)] de la relation $\epsilon \circ U = \epsilon \circ V$ d'égalité modulo les automorphismes intérieurs. Nous montrons [2.2.4 (c)] que $\Gamma(U) = \Gamma(V)$ si $U \sim V$.

Dans 2.3 nous obtenons, quand $\text{Sp } U / \Gamma(U)$ est compact, une interprétation (annoncée plus haut dans le cas G discret) de l'orthogonal de $\Gamma(U)$. En corollaire, nous montrons que pour tout $\sigma \in \text{Aut } M$ de spectre distinct de l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, il existe un entier n tel que σ^n soit un automorphisme intérieur de M .

Enfin dans 2.4 nous montrons que si $\Gamma(U)$ est discret, on a $\text{Sp } U = \Gamma(U)$ si et seulement si la sous-algèbre de von Neumann M^U de M formée des éléments U -invariants de M est un facteur.

2.1 Préliminaires

Soient G un groupe abélien localement compact, dt une mesure de Haar sur G , Γ le groupe dual de G , (t, γ) l'image de $t \in G$ par $\gamma \in \Gamma$. On note G et Γ additivement, donc 0 l'élément neutre de G et Γ . Pour $f \in L^1(G)$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(t) \overline{(t, \gamma)} dt.$$

Pour $f \in L^1(G)$,

$$Z(f) = \{\gamma \in \Gamma, \hat{f}(\gamma) = 0\}.$$

Définition 2.1.1. *On appelle représentation de G dans M un homomorphisme U de G dans $\text{Aut } M$ tel que pour tout $x \in M$ et tout $\phi \in M_*$ la fonction $t \rightarrow \phi(U_t(x))$ soit continue.*

Définition 2.1.2. *Soit U une représentation de G dans M .*

1. *On appelle spectre de U l'ensemble*

$$\text{Sp } U = \bigcap_{f \in L^1(G), U(f)=0} Z(f).$$

2. *Pour $x \in M$ on pose*

$$\text{Sp}_U(x) = \bigcap_{f \in L^1(G), U(f)x=0} Z(f).$$

3. *Pour un fermé E de Γ on pose*

$$M(U, E) = \{x \in M, \text{Sp}_U(x) \in E\}.$$

2.2 Équivalence extérieure et invariant Γ

Définition 2.2.1. Soient M un facteur, U une représentation de G dans M . On pose

$$\Gamma(U) = \cap \text{Sp } U^e$$

quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de M^U .

Définition 2.2.2. Soient M un facteur, U et V des représentations de G dans M . On écrit $U \sim V$ (et on dit que U et V sont extérieurement équivalentes) quand il existe une application fortement continue $t \rightarrow u_t$ de G dans le groupe unitaire de M telle que

$$u_{t_1+t_2} = u_{t_1} U_{t_1}(u_{t_2}) \quad \text{pour } t_1 \text{ et } t_2 \text{ dans } G,$$

$$V_t(x) = u_t U_t(x) u_t^* \quad \text{pour tout } x \in M \text{ et tout } t \in G.$$

Théorème 2.2.3. Soient U et V des représentations de G dans le facteur M .

1. $\Gamma(U)$ est un sous-groupe fermé de Γ .
2. On a $\Gamma(U) + \text{Sp } U = \text{Sp } U$.
3. $U \sim V$ entraîne $\Gamma(U) = \Gamma(V)$.

2.3 Interprétation de l'orthogonal de $\Gamma(U)$

Théorème 2.3.1. Soient G un groupe abélien localement compact, M un facteur, U une représentation de G dans M . Si $\text{Sp } U / \Gamma(U)$ est compact, un élément $t \in G$ appartient à l'orthogonal de $\Gamma(U)$ si et seulement s'il existe un unitaire u du centre de M^U tel que $U_t(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$.

Corollaire 2.3.2. Soit U une représentation de G dans le facteur M . Si $\Gamma / \Gamma(U)$ est compact il existe une représentation V de G dans M telle que $V \sim U$ et $\text{Sp } V = \Gamma(V) [= \Gamma(U)]$.

Corollaire 2.3.3. Soit σ un automorphisme d'un facteur M .

1. Si le spectre de σ dans l'algèbre de Banach $B(M)$ n'est multiplicativement invariant par aucun nombre complexe différent de 1, σ est un automorphisme intérieur de M .
2. Si le spectre de σ est différent de l'ensemble des nombres complexes de module 1, il existe un entier $n \neq 0$ tel que σ^n soit un automorphisme intérieur de M .

3 Invariant S

Nous appliquons les résultats de la 2e partie au cas $G = \mathbb{R}$ et $U_t = \sigma_t^\varphi$ où σ^φ est la représentation modulaire associée au poids normal fidèle φ sur le facteur M . Il est commode, ici, d'identifier le groupe dual de $\mathbb{R}$ au groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème 1.2.1 montre que la classe d'équivalence extérieure de σ^φ est indépendante du choix de φ , donc que $\Gamma(\sigma^\varphi)$, qui est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$, est un invariant algébrique de M .

Dans 3.1 nous définissons l'invariant $S(M)$, intersection des spectres des opérateurs modulaires associés aux poids normaux fidèles semi-finis sur M . Puis nous montrons que $0 \notin S(M)$ est équivalent à « M semi-fini » et que dans ce cas $S(M) = \{1\}$.

Dans 3.2 nous montrons, avec les notations ci-dessus, que

$$S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi).$$

Dans 3.3 nous calculons $S(M)$ pour les facteurs construits à partir de groupes ergodiques de transformations bimesurables, le reliant ainsi au « ratio set » de Krieger et montrant que pour tout sous-groupe fermé G de $\mathbb{R}_+^*$ il existe un M tel que $S(M) = G \cup \{0\}$.

Dans 3.4 nous montrons que si $S(M) \neq \{0, 1\}$, $T(M)$ est l'orthogonal de $S(M)$.

Dans 3.5 nous relient l'invariant S à la propriété L_λ de Powers.

Dans 3.6 nous relient les invariants S et T aux invariants r_∞ et $\mathcal{E}$ d'Araki et Woods dans le cas des produits tensoriels infinis de facteurs de type I. En corollaire nous redémontrons les principaux résultats de la classification d'Araki et Woods [2]. Nous prouvons ensuite que les égalités démontrées dans le cas des facteurs d'Araki-Woods ne sont pas vraies en général. Utilisant l'invariant T nous montrons que la classification des facteurs de type III non hyperfinis n'est pas standard (voir 3.6.4).

Dans 3.7 nous montrons, grâce à l'introduction de la notion d'état presque périodique sur une algèbre de von Neumann, l'équivalence pour tout facteur M tel que $S(M) \neq [0, \infty[$ et tout $\lambda \in]0, 1/2[$ entre la propriété L_λ de Powers et la propriété $\lambda/(1 - \lambda) \in S(M)$. Il en résulte que pour tout $\lambda \in]0, 1/2[$ les propriétés L_λ de Powers et L_λ d'Araki sont non équivalentes.

3.1 Préliminaire

Définition 3.1.1. Soit M un facteur. On pose

$$S(M) = \bigcap_{\varphi} \text{Sp } \Delta_\varphi$$

quand φ décrit l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur M (Δ_φ désigne l'opérateur modulaire de φ).

Lemme 3.1.2. Soit M un facteur ; les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $0 \notin S(M)$.
2. $S(M) = \{1\}$.
3. M est semi-fini.

3.2 Égalité $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma)$

Théorème 3.2.1. Soit M un facteur et pour tout poids normal fidèle semi-fini φ sur M soit σ^φ la représentation $t \rightarrow \sigma_t^\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans M . Si on identifie le groupe $\mathbb{R}_+^*$ au dual de $\mathbb{R}$, en posant $(t, \lambda) = \lambda^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi).$$

Corollaire 3.2.2. Soient M un facteur, φ un poids normal fidèle semi-fini sur M .

1. $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe multiplicatif fermé de $\mathbb{R}_+^*$.
2. $\text{Sp } \Delta_\varphi$ est invariant par multiplication par tout élément non nul de $S(M)$.

3.3 Calcul de l'invariant S pour les produits croisés

Théorème 3.3.1. *Soient $\lambda > 0$, E une espérance conditionnelle normale fidèle du facteur M sur une sous-algèbre de von Neumann semi-finie $N \subset M$ telle que $N' \cap M \subset N$, $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $H(E)$ tel que M soit l'algèbre de von Neumann engendrée par N et $\mathcal{G}$. Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur N et pour $u \in \mathcal{G}$, ρ_u l'opérateur positif affilié au centre de N tel que $\tau(uxu^*) = \tau(\rho_u x)$ pour tout $x \in N_+$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lambda \in S(M)$.
2. *Pour tout $\epsilon > 0$, et tout projecteur non nul e du centre de N , il existe un projecteur non nul $d \preceq e$ du centre de N , et un $u \in \mathcal{G}$ tels que $udu^* \preceq e$ et que le spectre de $\rho_u^{-1}d$ dans N_d soit contenu dans l'intervalle $]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[$.*

Corollaire 3.3.2. *Soit $\mathcal{G}$ un groupe agissant ergodiquement et presque librement sur un espace mesurable Ω muni d'une mesure positive σ -finie μ , quasi-invariante par $\mathcal{G}$. On a $S(W^*(\mathcal{G}, \Omega)) = r(\mathcal{G})$.*

Corollaire 3.3.3. *Pour tout sous-groupe fermé $G \neq \{1\}$ de $\mathbb{R}_+^*$ il existe un facteur M opérant dans un espace de Hilbert séparable, tel que $S(M \otimes P) = \{0\} \cup G$ pour un certain facteur P de type III_0 .*

3.4 Comparaison des invariants S et T

Théorème 3.4.1. *Soit M un facteur. Si $S(M) \neq \{0, 1\}$, $T(M)$ est l'orthogonal de $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ [pour la dualité $(t, \lambda) \rightarrow \lambda^{it}$].*

Théorème 3.4.2. *Pour tout $T_0 \in \mathbb{R}$, il existe un facteur M opérant dans un espace de Hilbert séparable, tel que $T(M) = \{nT_0, n \in \mathbb{Z}\}$ mais $S(M) = \{0, 1\}$.*

3.5 Interprétation spatiale de S(M)

Théorème 3.5.1. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, M un facteur opérant dans $\mathcal{H}$, $\lambda \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lambda \in S(M)$.
2. *Pour tout $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in M$ et $y \in M'$ tels que $\|x\xi\| > 1$, $\|x\xi - y\xi\| < \epsilon$ et $\|x^*\xi - \lambda y^*\xi\| < \epsilon$.*

Théorème 3.5.2. *Soient $\lambda \in]0, 1/2[$ et M un facteur ayant la propriété L_λ . Alors $\lambda/(1 - \lambda) \in S(M)$.*

3.6 Relations des invariants S et T avec les invariants d'Araki et Woods

Théorème 3.6.1. *Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur. Considérons les propriétés suivantes :*

1. $\lambda \in r_\infty(M)$.
2. M a la propriété $L_{\lambda/(1+\lambda)}$.
3. $\lambda \in S(M)$.

Alors on a $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. Si M est un facteur d'Araki-Woods, on a $(c) \Rightarrow (a)$.

Théorème 3.6.2. Soient $T_0 > 0$, $\epsilon_0 = \exp(-2\pi/T_0)$, M un facteur. Considérons les propriétés :

$$(\alpha) \quad \epsilon_0 \in \mathcal{E}(M),$$

$$(\beta) \quad T_0 \in T(M).$$

On a alors $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. De plus si M est un facteur d'Araki-Woods on a $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$.

Corollaire 3.6.3. Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur d'Araki-Woods tel que $S(M) = \{\lambda^n, n \in \mathbb{Z}\}^-$. Alors M est isomorphe à R_λ .

Corollaire 3.6.4. L'espace borélien des classes d'isomorphisme algébrique des facteurs de type III non hyperfinis dans un espace de Hilbert séparable n'est pas dénombrablement séparé.

4 Facteurs de type III, avec $0 < \lambda < 1$

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et M un facteur. On dit que M est de type III_λ si $S(M) = \{\lambda^n, n \in \mathbb{Z}\}^-$ (pour $\lambda \neq 1$) ou $S(M) = [0, \infty[$ (pour $\lambda = 1$). Le résultat principal de la 4e partie est la description 4.4.1 de tout facteur de type III_λ , pour $\lambda \in]0, 1[$ comme produit croisé d'un facteur de type II_∞ par un automorphisme θ transformant la trace τ en $\lambda\tau$.

Dans 4.1 nous caractérisons l'injection canonique d'une algèbre de von Neumann dans son produit croisé par un automorphisme.

Dans 4.2 nous montrons que dans un facteur de type III_λ ($\lambda \in]0, 1[$), le centralisateur M_φ de tout poids normal fidèle strictement semi-fini φ sur M contient une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale dans M . De plus nous montrons que l'égalité $\text{Sp } \Delta_\varphi = S(M)$ est équivalente à la maximalité de M_φ dans l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann semi-finies de M qui sont images d'espérances conditionnelles normales fidèles.

Dans 4.3 nous montrons l'unicité et l'existence des « traces généralisées » ayant la propriété de maximalité ci-dessus.

Dans 4.4 nous obtenons le résultat annoncé plus haut.

Dans 4.5 nous montrons l'existence d'une suite exacte (4.5.1) permettant de calculer $\text{Out } M$ en fonction du couple (N, θ) canoniquement associé à M par 4.4.1.

Dans 4.6 nous montrons que tout état normal fidèle sur $M = W^*(\theta, N)$ est transformé par un automorphisme intérieur d'un état normal fidèle de la forme $\phi \circ E$ où E est l'espérance conditionnelle canonique de M sur N .

4.1 Préliminaire

Toutes les algèbres de von Neumann intervenant dans les 4e et 5e parties seront de genre dénombrable par hypothèse ou par construction. Dorénavant nous écrirons « algèbre de von Neumann » pour « algèbre de von Neumann de genre dénombrable ».

Proposition 4.1.1. Soient N une algèbre de von Neumann, θ un automorphisme de N tel que $p(\theta^n) = 0$ pour tout $n \neq 0$ (cf. 1.5), et agissant ergodiquement sur le centre de N . Soient $M = W^*(\theta, N)$, et I comme dans 1.4.6 (a). On a $I(N)' \cap M \subset I(N)$ et M est un facteur.

4.2 Comparaison des centralisateurs

Théorème 4.2.1. Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur de type III_λ , φ , φ_1 et φ_2 des poids normaux fidèles strictement semi-finis sur M .

1. Il existe une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $\mathcal{A}$ de M telle que $\mathcal{A} \subset M_\varphi$.
2. On a $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$ si et seulement si il existe un opérateur positif non singulier h affilié au centre de M_{φ_1} , et tel que $\varphi_2 = \varphi_1(h \cdot)$.

Théorème 4.2.2. Soient $\lambda \in]0, 1[$, $T_0 = 2\pi / \log \lambda$, M un facteur de type III_λ , et φ un poids normal fidèle strictement semi-fini sur M . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sigma_{T_0}^\varphi = 1$.
2. $\text{Sp } \Delta_\varphi = S(M)$.
3. $M'_\varphi \cap M = \mathbb{C}$.
4. M_φ est un facteur.
5. Pour tout poids ψ normal fidèle semi-fini sur M tel que $M_\varphi \subset M_\psi$, ψ est proportionnel à φ .
6. M_φ est maximale pour l'inclusion parmi les sous-algèbres de von Neumann semi-finies de M qui sont images de M par une espérance conditionnelle normale fidèle.

4.3 Traces généralisées

Définition 4.3.1. Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur de type III_λ , φ un poids normal fidèle strictement semi-fini tel que $\varphi(1) = +\infty$. On dit que φ est une trace généralisée sur M s'il vérifie les conditions équivalentes de 4.2.6.

Théorème 4.3.2. Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur de type III_λ , $T_0 = 2\pi / \log \lambda$.

1. Il existe sur M une trace généralisée.
2. Si φ_1 et φ_2 sont deux traces généralisées sur M il existe $\alpha > 0$ et u unitaire de M tels que $\varphi_2(x) = \alpha \varphi_1(uxu^*)$ pour tout $x \in M_+$.
3. Dans (b) le nombre $\alpha^{T_0} = \alpha_0$ est indépendant du choix de u tel que φ_2 et $\alpha \varphi_{1,u}$ soient proportionnelles, et pour tout α tel que $\alpha^{T_0} = \alpha_0$ il existe un unitaire u de M tel que $\varphi_2(x) = \alpha \varphi_1(uxu^*)$ pour tout $x \in M_+$.

Corollaire 4.3.3. Soient $\lambda \in]0, 1[$, M un facteur de type III_λ , φ une trace généralisée sur M , σ la représentation $t \rightarrow \sigma_t^\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans M , E_φ l'espérance conditionnelle normale fidèle de M sur M_φ .

1. Il existe un unitaire $X \in M$ tel que $\varphi_X = \lambda \varphi$. On a alors :
 - (a) $E_\varphi(X^n) = 0$, pour $n \neq 0$;
 - (b) $X \in M(\sigma, \{\lambda^{-1}\})$;
 - (c) $X \in H(E_\varphi)$;
 - (d) M est l'algèbre de von Neumann engendrée par M_φ et X .
2. Le facteur M_φ est de type II_∞ , la restriction τ de φ à M_φ est une trace normale fidèle semi-finie et pour X comme dans (a) et tout $x \in M_{\varphi,+}$ on a

$$\tau(i_X(x)) = \lambda \tau(x).$$

4.4 Classification des facteurs de type III, ($\lambda \in]0, 1[$)

- Théorème 4.4.1.** 1. Soient $\lambda \in]0, 1[$, N un facteur de type II_∞ , τ une trace normale fidèle semi-finie sur N , θ un automorphisme de N tel que $\tau(\theta(x)) = \lambda\tau(x)$ pour tout $x \in N_+$. Alors $W^*(\theta, N)$ est un facteur de type III_λ .
2. Pour tout facteur M de type III_λ ($\lambda \in]0, 1[$), il existe un couple (N, θ) vérifiant les conditions (a) et un isomorphisme de M sur $W^*(\theta, N)$.
3. Soient $\lambda \in]0, 1[$, (N_1, θ_1) , (N_2, θ_2) des couples vérifiant les conditions (a). Pour qu'il existe un isomorphisme de $W^*(\theta_1, N_1)$ sur $W^*(\theta_2, N_2)$ il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme J de N_1 sur N_2 tel que $J\theta_1 J^{-1}\theta_2^{-1}$ soit un automorphisme intérieur de N_2 .

Corollaire 4.4.2. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

1. Soit M un facteur de type III_λ , et soit (N, θ) un couple comme dans 4.4.1 (b) tel que $M = W^*(\theta, N)$. Alors $\overline{N}$ est indépendant du choix de θ et ne dépend que de $\overline{M}$. On note alors $\overline{N} = \overline{M}^*$.
2. Pour qu'une classe $\overline{N}$ d'isomorphisme algébrique de facteurs de type II_∞ , appartienne à l'image de l'application $\overline{M} \rightarrow \overline{M}^*$ de (a) il faut et il suffit que $\lambda \in G(\overline{N})$.
3. Il existe une infinité continue de facteurs de type III_λ deux à deux non isomorphes opérant dans un espace de Hilbert séparable.
4. Soient N un facteur de type II_∞ , et C_λ l'ensemble des classes de conjugaison dans $\text{Out } N$ d'éléments j tels que $\gamma_N(j) = \lambda$. Soit $\overline{W}^*$ l'application qui à $c \in C_\lambda$ associe $\overline{W}^*(\theta, \overline{N})$, indépendamment du choix de $\theta \in \text{Aut } N$ tel que c soit la classe de conjugaison de $\epsilon(\theta)$. Alors $\overline{W}^*$ est une bijection de C_λ sur l'ensemble des classes $\overline{M}$ d'isomorphisme algébrique de facteurs de type III_λ telles que $\overline{M}^* = \overline{N}$.

5 Facteurs de type III_0

Le principal résultat est 5.3.1 : tout facteur de type III_0 est de la forme $W^*(\theta, N)$ où N est une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre diffus, et θ un automorphisme de N ergodique sur le centre et diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie sur N .

Nous montrons d'abord (dans 5.1) la réciproque du fait ci-dessus : pour N et θ comme ci-dessus, $W^*(\theta, N)$ est un facteur de type III_0 .

Dans 5.2 nous montrons l'analogue de 4.2.1 pour les facteurs de type III_0 .

Dans 5.3 nous montrons, pour M donné, l'existence de N et θ tels que $M = W^*(\theta, N)$. Ce résultat permet de décrire l'ensemble des facteurs de type III_0 comme l'ensemble des produits croisés d'algèbres de von Neumann de type II_∞ par des automorphismes diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie.

Dans 5.3.6 nous montrons que tout facteur M de type III_0 est en un sens très strict la limite inductive d'une suite d'algèbres de von Neumann semi-finies.

Dans 5.4 nous donnons un critère d'isomorphisme des facteurs $W^*(\theta, N)$ obtenus comme produits croisés à partir d'un couple (N, θ) comme ci-dessus, généralisant ainsi 4.4.1 (c).

Enfin, dans 5.5 nous montrons l'existence d'un facteur hyperfini ([33], déf. 4.4.5) agissant dans un espace séparable et qui n'est pas un facteur d'Araki-Woods (i.e. il n'est isomorphe à aucun produit tensoriel infini de facteurs de type I).

5.1 Préliminaire

Nous dirons qu'une algèbre de von Neumann abélienne est diffuse si elle ne contient pas de projecteur minimal.

Proposition 5.1.1. *Soit N une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre diffus. Soit θ un automorphisme de N ergodique sur le centre de N . Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur N et $\lambda_0 < 1$ tels que $\tau(\theta(x)) \leq \lambda_0 \tau(x)$ pour tout $x \in N_+$. Alors $W^*(\theta, N)$ est un facteur de type III_0 et $p(\theta^n) = 0$ pour tout $n \neq 0$.*

5.2 Centralisateurs et sous-algèbres abéliennes maximales

Théorème 5.2.1. *Soit M un facteur de type III_0 .*

1. *Pour tout poids normal fidèle strictement semi-fini φ sur M , il existe une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $\mathcal{A}$ de M telle que $\mathcal{A} \subset M_\varphi$.*
2. *Soient φ_1 et φ_2 deux poids normaux fidèles strictement semi-finis sur M . On a $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$ si et seulement si il existe h positif non singulier, affilié au centre de M_{φ_1} tel que $\varphi_2 = \varphi_1(h \cdot)$.*

5.3 Tout facteur de type III_0 est un produit croisé

Théorème 5.3.1. *Soit M un facteur de type III_0 . Il existe alors :*

1. *Une algèbre de von Neumann N de type II_∞ et à centre diffus ;*
2. *Un automorphisme θ de N , ergodique sur le centre de N , et diminuant strictement l'une des traces normales fidèles semi-finies τ sur N [i.e. il existe $\lambda_0 < 1$ tel que $\tau(\theta(x)) \leq \lambda_0 \tau(x)$ pour tout $x \in N_+$] de telle sorte que $M = W^*(\theta, N)$.*

Corollaire 5.3.2. *Soit $\mathcal{G}$ le groupe dénombrable discret somme directe d'une infinité dénombrable de groupes à deux éléments. Soit M un facteur de type III_0 dans un espace séparable. Il existe une algèbre de von Neumann P de type II_∞ , une représentation S de $\mathcal{G}$ dans P , et une suite croissante $\{e_k\}$ de projecteurs non nuls du centre de P tels que :*

1. *Pour tout k les $S_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k, 0, 0, \dots)}(e_k)$, pour $\epsilon_j = 0, 1$, $j = 1, 2, \dots, k$, forment une partition de l'unité dans le centre de P .*
2. *M est isomorphe au produit croisé $W^*(\mathcal{G}, P)$.*

5.4 Classification des facteurs de type III_0

Soient N une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre diffus, θ un automorphisme de N , ergodique sur le centre de N , e un projecteur non nul du centre de N . La restriction $\bar{\theta}$ de θ au centre de N est conservative (cf. [24], § 4, p. 88), donc il existe une suite unique $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ de projecteurs deux à deux orthogonaux du centre de N , de somme e , tels que $e\bar{\theta}^j(e_n) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n-1$ et $\bar{\theta}^n(e_n) \leq e$. On a $\sum_1^n \theta^n(e_n) = e$.

Définition 5.4.1. *Soient N, θ, e et (e_n) comme ci-dessus. On appelle automorphisme induit par θ dans e l'automorphisme θ_e de N_e défini par*

$$\theta_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n(xe_n) \quad \text{pour tout } x \in N_e.$$

Théorème 5.4.2. *Pour $j = 1, 2$, soient N_j une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre diffus, θ_j un automorphisme de N_j ergodique sur le centre et diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie sur N_j , $M_j = W^*(\theta_j, N_j)$. Pour que les facteurs M_1 et M_2 soient isomorphes il faut et il suffit qu'il existe des projecteurs non nuls e_j du centre de N_j pour $j = 1, 2$ et un isomorphisme J de N_{1,e_1} sur N_{2,e_2} tels que l'automorphisme $J\theta_{1,e_1}J^{-1}\theta_{2,e_2}^{-1}$ de N_{2,e_2} soit un automorphisme intérieur.*

5.5 Existence de facteurs hyperfinis qui ne sont pas des facteurs d'Araki-Woods

Théorème 5.5.1. *Il existe un facteur K de type III_0 , opérant dans un espace de Hilbert séparable, hyperfini, et qui n'est isomorphe à aucun produit tensoriel infini de facteurs de type I .*

Problèmes

1. Caractériser les sous-groupes de $\mathbb{R}$ de la forme $T(M)$ pour M facteur à préduel séparable. [D'après 1.5 tout sous-groupe dénombrable est de cette forme.]
2. Pour une représentation U du groupe abélien localement compact G dans le facteur M , la condition $\Gamma(U) = \Gamma$ est-elle nécessaire et suffisante pour que le produit croisé de M par U soit un facteur ? [Le cas « G discret » se déduit de 2.3.1.]
3. Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, la propriété L_λ de Powers est-elle équivalente à la condition $\lambda/(1 - \lambda) \in S(M)$? [Si $S(M) \neq [0, \infty[$ cela résulte de 3.7.2.]
4. Existe-t-il un facteur M de genre dénombrable, ne possédant aucun état normal fidèle presque périodique ? [M serait nécessairement de type III_0 .]
5. Les facteurs de Powers R_λ sont-ils les seuls facteurs hyperfinis de type III , pour $\lambda \in]0, 1[$? [Ce sont les seuls facteurs d'Araki-Woods de type III_λ d'après 3.6.3.]
6. Le facteur R_0 d'Araki et Woods [2] est-il le seul facteur hyperfini de type III_0 ?
7. Parmi les facteurs hyperfinis qui ne sont pas d'Araki-Woods (dont nous connaissons l'existence par 5.5.1), existe-t-il un facteur de type III_0 qui n'est isomorphe au produit tensoriel d'aucun couple de facteurs de type III_0 ?
8. Le centre de $\text{Out } N$ est-il trivial pour tout facteur de type II_1 ?

Bibliographie

Références

- [1] H. Araki, *Asymptotic ratio set and properly L_λ* , (Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, vol. 6, 1970, p. 443-460).
- [2] H. Araki et E. J. Woods, *A classification of factors*, (Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, vol. 4, 1968, p. 51-130).
- [3] W. Arveson, *On groups of automorphisms of operator algebras*, (Preprint).
- [4] D. Bures, *Tensor products of W^* -algebras*, (Pac. J. Math., vol. 27, 1968, p. 13).
- [5] F. Combes, *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche*, (Comp. Math., vol. 23, fasc. 1, 1971, p. 4-77).
- [6] F. Combes, *Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann*, (Bull. Soc. math. Fr., t. 99, 1971, p. 73-112).

- [7] A. Connes, *Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann*, (C. R. Acad. Sc., t. 273, série A, 1971, p. 900-903).
- [8] A. Connes, *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki*, (C. R. Acad. Sc., t. 274, série A, 1972, p. 175-178).
- [9] A. Connes, *États presque périodiques sur une algèbre de von Neumann*, (C. R. Acad. Sc., t. 274, série A, 1972, p. 1402-1405).
- [10] A. Connes, *Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann*, (C. R. Acad. Sc., t. 274, série A, 1972, p. 1923-1926).
- [11] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, (C. R. Acad. Sc., t. 275, série A, 1972, p. 523-525).
- [12] A. Connes et A. van Daele, *The group property of the invariant S* , (à paraître dans Math. Scand.).
- [13] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [14] J. Dixmier et O. Maréchal, *Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann*, (Commun. Math. Phys., vol. 22, 1972).
- [15] S. Eilenberg et S. Mac Lane, *Group extensions and Homology*, (Ann. of Math., vol. 43, 1942).
- [16] B. Fuglede et R. V. Kadison, *On a conjecture of Murray and von Neumann*, (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., t. 37, 1951, p. 420-425).
- [17] V. Ya. Golodets, *Central properties of modular operators*, (Funk. Anal. i ego Priloz., t. 6, vyp. 1, 1972, p. 70-72).
- [18] R. Herman et M. Takesaki, *States and automorphism groups of Operator algebras*, (Commun. Math. Phys., vol. 19, 1970, p. 142-160).
- [19] L. Hörmander, *Introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, 1968.
- [20] R. V. Kadison, *Transformation of states in operator theory and dynamics*, (Topology, vol. 3, Supp. 2, 1965, p. 177-198).
- [21] R. Kallman, *Groups of inner automorphisms of von Neumann algebras*, (J. Funct. Anal., vol. 7, 1971, p. 43).
- [22] R. Kallman, *A generalization of free action*, (Duke Math. J., vol. 36, 1969, p. 781).
- [23] W. Krieger, *On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non singular transformations of a measure space*, (Lecture Notes in Math., n° 160, 1970, p. 158).
- [24] W. Krieger, *On non singular transformations of a measure space I*, (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., Bd II, 1969, p. 83).
- [25] W. Krieger, *On a class of hyperfinite factors that arise from null recurrent Markov chains*, (J. Funct. Anal., vol. 7, 1971, p. 27-42).
- [26] W. Krieger, *On the infinite product construction of non singular transformations of a measure space*, (Inventiones math., vol. 15, 1972, p. 144-163).
- [27] W. Krieger, *On hyperfinite factors and non singular transformations of a measure space*, (Preprint).
- [28] G. Mokobodski, *Sur des mesures qui définissent des graphes d'applications*, (Séminaire Choquet, 6e année, 1962).
- [29] J. von Neumann, *On rings of operators IV*, (Ann. of Math., vol. 41, 1940, p. 94-161).
- [30] G. Pedersen et M. Takesaki, *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*, (Preprint).
- [31] R. T. Powers, *Cargèse Lecture on physics*, 1969.
- [32] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, (Interscience Tracts, n° 12, 1960).
- [33] S. Sakai, *C^* -algebras and W^* -algebras*, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd 60).
- [34] J. T. Schwartz, *Recent progress in the structure theory of factors*, [Functional Analysis (ed. C. O. Wilde), Academic Press, 1970, p. 37-53].
- [35] E. Størmer, *On infinite tensor products of von Neumann algebras*, (Am. J. of Math., vol. 18, n° 3, 1971).
- [36] M. Takesaki, *Tomita's theory and its applications*, (Lecture Notes in Math., n° 128).
- [37] M. Takesaki, *Conditional Expectations in von Neumann algebras*, (J. Funct. Anal., vol. 9, n° 3, 1973).
- [38] M. Takesaki, *The standard representation of a von Neumann algebra*, (Operator algebra newsletter, Toronto, March. 15, 1971).

- [39] J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, (Preprint).
- [40] E. J. Woods, *The classification of factors is not smooth*, (Preprint).
- [41] G. Zeller-Meier, *Produit croisé d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes*, (J. Math. pures et appl., t. 47, 1968, p. 102-239).