

Classification des Facteurs

A. Connes

Nous traitons dans cet exposé le problème, interne à la théorie, de la classification à isomorphisme près des algèbres de von Neumann et plus spécifiquement des facteurs (i.e. des algèbres à centre trivial).

Le résultat final est l'existence d'une classe remarquable de facteurs : les facteurs moyennables (caractérisés par de nombreuses propriétés équivalentes dont l'analogie de la moyennabilité pour les groupes) et d'une classification complète de ces facteurs, (à l'exception possible de facteurs exotiques de type III_1 , problème toujours non résolu) en types :

I_n	$M_n(\mathbb{C})$
I_∞	$\mathcal{L}(\mathbb{H})$
II_1	R facteur hyperfini de Murray et von Neumann
II_∞	$R_{0,1} = R \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$
III_λ	$\lambda \in]0, 1[$, R_λ facteur de Powers
III_1	R_∞ facteur d'Araki et Woods (+ évent. d'autres)
III_0	R_W facteur de Krieger associé au flot ergodique W .

I. Les articles de Murray et von Neumann

Soient $\mathcal{h}$ un espace hilbertien complexe et $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ l'algèbre stellaire des opérateurs bornés de $\mathcal{h}$ dans $\mathcal{h}$. C'est une algèbre de Banach munie de la norme $\|\mathbf{T}\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\mathbf{T}\xi\|$ et de l'involution $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}^*$ définie par :

$$\langle \mathbf{T}^* \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \mathbf{T} \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{h},$$

on a :

$$\|\mathbf{T}^* \mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}\|^2, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{h}).$$

Même si $\mathcal{h}$ est de dimension dénombrable, l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ n'est pas de type dénombrable. Il existe un unique sous-espace fermé du dual $\mathcal{L}(\mathcal{h})^*$ dont $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ est le dual. Il s'agit de l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ qui s'écrivent :

$$L(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T \xi_i, \eta_i \rangle$$

avec $\sum \|\xi_i\|^2 < \infty$, $\sum \|\eta_i\|^2 < \infty$.

L'image $M = \pi(L^\infty(X, \mu))$ est une algèbre de von Neumann commutative dans l'espace $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ et si $n \neq 1$ on a $M' \neq M$.

Définition 1. Soit M_i , $i = 1, 2$ une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$; on dit que M_1 est spatialement isomorphe à M_2 quand il existe un unitaire $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tel que :

$$UM_1U^* = M_2.$$

Si $\mathcal{H}$ est de type dénombrable, toute algèbre de von Neumann commutative dans $\mathcal{H}$ est spatialement isomorphe à l'algèbre $\pi(L^\infty(X, \mu))$ pour un espace X, μ et une fonction n convenables.

Soit alors $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal : $T^*T = TT^*$, soit M l'algèbre de von Neumann engendrée par T , on peut prendre pour $(X, \mathcal{B})$ le spectre $K \subset \mathbb{C}$ de T et la classe de mesure μ donnée par la mesure spectrale de T . L'application qui à la restriction à K de toute fonction polynomiale $\sum a_{ij}z^i\bar{z}^j$ associe $\sum a_{ij}T^iT^{*j}$ se prolonge en un isomorphisme π de $L^\infty(K, \mu)$ sur M avec $\pi(z) = T$. Ainsi pour toute fonction borélienne bornée f sur $\text{Sp } T$ on donne un sens à $f(T)$ et on a :

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(T) = \lambda_1 f_1(T) + \lambda_2 f_2(T),$$

$$(f_1 f_2)(T) = f_1(T) f_2(T),$$

$$(f \circ g)(T) = f(g(T)).$$

La fonction $x \mapsto n(x)$ de K dans $[1, \dots, \infty]$ est unique modulo μ , elle exprime la multiplicité du point x dans le spectre K . Le théorème du bicommutant montre que tout opérateur qui bicomute avec T est une fonction borélienne bornée de T .

Enfin, soient N une algèbre de von Neumann non nécessairement commutative, et $T \in N$, alors $T = T_1 + iT_2$, $T_j = T_j^*$ de sorte que T_j étant normal et toute $f(T_j)$, f borélienne étant encore dans N , on voit que N est engendrée par les projecteurs qu'elle contient.

Le commutant d'une représentation unitaire

Soit G un groupe, et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$ (ou, plus généralement, soient G une algèbre involutive et π une représentation involutive non dégénérée). Le commutant

$$R(\pi) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi), T\pi(x) = \pi(x)T \ \forall x \in G\}$$

est par construction une algèbre de von Neumann. L'intérêt de $R(\pi)$ réside dans la proposition suivante :

Proposition 2. Soient $E \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé et P le projecteur correspondant, alors :

- (a) E réduit $\pi \iff P \in R(\pi)$.
- (b) Soient E_1, E_2 deux sous-espaces fermés réduisant π alors les représentations réduites π_j sont équivalentes si et seulement si $P_1 \sim P_2$ dans $R(\pi)$ i.e. $\exists U \in R(\pi), U^*U = P_1, UU^* = P_2$.
- (c) π_1 est disjointe de π_2 s'il existe P projecteur, P dans le centre de $R(\pi)$ tel que $PP_1 = P_1, (1 - P)P_2 = P_2$.

Il est naturel de dire que la représentation π est isotypique si l'on ne peut trouver deux sous-représentations disjointes. Cela équivaut à dire que $R(\pi)$ est un facteur au sens suivant :

Définition 3. Un facteur M est une algèbre de von Neumann de centre réduit aux scalaires $\mathbb{C}$.

Un autre corollaire immédiat de la proposition et du calcul fonctionnel borélien est le suivant : Pour que π soit irréductible il faut et il suffit que $R(\pi) = \mathbb{C}$.

Algèbres de von Neumann de dimension finie

Soit M une algèbre de von Neumann de dimension finie, et considérons-la, en oubliant l'espace de Hilbert dans lequel on la représentait, comme une algèbre semi-simple sur le corps algébriquement clos $\mathbb{C}$. Elle est donc somme directe d'un nombre fini d'algèbres de matrices :

$$M = \bigoplus_1^k M_{n_k}(\mathbb{C}).$$

Ici le signe $=$ correspond à la définition suivante :

Définition 4. Soit M_i , $i = 1, 2$ une algèbre de von Neumann dans l'espace $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. On dit que M_1 est algébriquement isomorphe à M_2 , s'il existe un isomorphisme algébrique Θ de M_1 sur M_2 tel que $\Theta(x^*) = \Theta(x)^*$, $x \in M_1$.

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien de dimension finie : $\mathcal{H}_\pi$. Alors $R(\pi)$ est de dimension finie et à la décomposition $M = \bigoplus_1^k M_{n_k}(\mathbb{C})$ correspond la décomposition de π en composantes isotypiques π_k de multiplicité n_k .

La théorie de réduction

(Écrite en 1939, publiée vers 1949) ([44]).

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de type dénombrable et $\mathcal{F}$ l'ensemble des facteurs $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe sur $\mathcal{F}$ une structure borélienne qui en fait un espace borélien standard.

Soient alors $(X, \mathcal{B})$ un espace borélien standard, μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$ et $t \mapsto M(t)$ une application borélienne de X dans $\mathcal{F}$. Alors soit M l'algèbre stellaire dont les éléments $x \in M$ sont les sections boréliennes bornées $t \mapsto x(t) \in M(t)$, identifiées si elles sont égales μ -presque partout, munie des opérations évidentes et de la norme :

$$\|x\| = \text{ess sup } \|x(t)\|.$$

On montre que l'algèbre stellaire M est une algèbre de von Neumann (i.e. est algébriquement isomorphe à une algèbre de von Neumann représentée dans un espace convenable), par exemple en considérant l'action de M dans l'espace

$$L^2(X, \mu) \otimes \mathcal{H} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$$

définie par :

$$(\pi(x)g)(t) = x(t)g(t) \quad \forall g \in L^2(X, \mu, \mathcal{H}).$$

On écrit, pour résumer la construction de M , l'égalité :

$$M = \int_X M(t) d\mu(t).$$

Théorème 5. Soit M une algèbre de von Neumann dans un espace de type dénombrable. Alors M est algébriquement isomorphe à une intégrale directe de facteurs $\int_X M(t) d\mu(t)$.

Ce théorème de von Neumann montre que les facteurs contiennent déjà l'originalité de toutes les algèbres de von Neumann ; ils suffisent à reconstruire toute algèbre de von Neumann comme "somme directe généralisée" de facteurs.

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien séparable, à la décomposition de $R(\pi)$ comme intégrale directe de facteurs correspond la décomposition de π comme intégrale directe de représentations isotypiques.

Comparaison des sous-représentations, comparaison des projecteurs et fonction dimension relative

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$. Supposons π isotypique, il est alors naturel d'attendre que, comme en dimension finie, π va être un multiple d'une représentation irréductible π_0 , sous-représentation de π . Dans la correspondance entre sous-représentations de π et projecteurs $P \in R(\pi)$, on voit facilement que les représentations irréductibles correspondent aux projecteurs minimaux de $R(\pi)$ et on a : π a une sous-représentation irréductible $\iff$ le facteur $R(\pi)$ a un projecteur minimal $\iff$ il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ et un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ sur $R(\pi)$.

Toute représentation isotypique ayant une sous-représentation irréductible est un multiple de cette représentation. Pour tout facteur M dans $\mathcal{H}$, ayant un projecteur minimal, on peut factoriser $\mathcal{H}$ en produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_0$ de telle sorte que $M = \mathcal{L}(\mathcal{K}) \otimes 1$.

Cependant il existe des groupes G ayant une représentation isotypique π sans sous-représentation irréductible. Ce phénomène ne se produit pas si G est un groupe de Lie réel semi-simple et π est continue, ou plus simplement si G est compact et π continue. Cependant il se produit pour la représentation régulière de nombreux groupes discrets : soit G un groupe dénombrable discret et H la réunion des classes de conjugaison finies de G , alors H est un sous-groupe normal de G , supposons $H = \{1\}$. Soit λ la représentation régulière gauche de G , on a $\mathcal{H}_\lambda = \ell^2(G)$, l'espace de Hilbert ayant pour base $(\varepsilon_g)_{g \in G}$ et on pose :

$$\lambda(g)\varepsilon_k = \varepsilon_{gk}, \quad \lambda'(g)\varepsilon_k = \varepsilon_{kg^{-1}}.$$

On montre que l'algèbre de von Neumann $R(\lambda)$ est engendrée par les opérateurs $\lambda'(g)$, $g \in G$ et que le vecteur ε_1 est totalisateur et séparateur pour $R(\lambda)$: $R(\lambda)\varepsilon_1$ et $R(\lambda)'\varepsilon_1$ sont denses dans $\mathcal{H}_\lambda$. Les coordonnées de $T\varepsilon_1$, où $T \in R(\lambda) \cap R(\lambda)'$ sont constantes sur les classes de conjugaison de G , de sorte que comme $H = \{1\}$, on a alors $T\varepsilon_1 \in \mathbb{C}\varepsilon_1$ et comme ε_1 est séparateur, $T \in \mathbb{C}$. Ainsi $R(\lambda)$ est un facteur et λ est isotypique. Pour voir que $R(\lambda)$ n'est pas isomorphe à un facteur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on utilise la notion suivante :

Définition 6. Une trace τ sur un facteur M est une forme linéaire telle que $\tau(AB) = \tau(BA)$ pour tous $A, B \in M$.

Sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ il existe une trace non nulle seulement si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, comme on le voit en vérifiant que si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie tout élément est combinaison linéaire de commutateurs. Or sur $R(\lambda)$, on peut définir τ par :

$$\tau(T) = \langle T\varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle \quad \forall T \in R(\lambda).$$

La propriété $\tau(AB) = \tau(BA)$ se vérifie pour A et B de la forme $\lambda'(g)$, $g \in G$ et se déduit en général par bilinéarité et continuité. Comme $\tau(1) = 1$ on a construit une trace non nulle sur le facteur de dimension infinie $R(\lambda)$. Ainsi il existe des facteurs de dimension infinie ne possédant aucun projecteur minimal.

Soit M un facteur, la traduction dans le langage des projecteurs des notions de représentations équivalentes et somme directe de représentations, donne comme dans la proposition 3 les notions suivantes :

Pour P projecteur, $P \in M$, on note $[P]$ la classe d'équivalence de P pour la relation $P_1 \sim P_2$ ssi $\exists U \in M$, $U^*U = P_1$, $UU^* = P_2$. Pour P_1 et P_2 tels que $P_1P_2 = 0$, on note $[P_1] + [P_2]$ la classe de $[P_1 + P_2]$, elle ne dépend que de celles de P_1 et P_2 .

L'hypothèse : M est un facteur, montre que l'ensemble des classes de projecteurs est totalement ordonné par la relation $[P_1] < [P_2]$ quand il existe des représentants $P_1 \leq P_2$. Cet ensemble totalement ordonné est muni d'une loi de composition partiellement définie qui permet de donner un sens à une égalité comme $[P] = m[Q]$, n, m entiers.

Définition 7. *Un projecteur $P \in M$ est dit fini quand $Q \leq P$ et $Q \sim P \Rightarrow Q = P$. Cette propriété ne dépend que de la classe de P .*

Dans le langage des représentations, on adopterait la définition suivante : une représentation π est finie quand toute sous-représentation π' équivalente à π est égale à π . Si π n'est pas finie elle contient une infinité de sous-représentations équivalentes deux à deux, et inversement.

Théorème 8 (Murray et von Neumann). *Soit M un facteur à préduel séparable. Il existe une application D de l'ensemble des projecteurs de M dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, unique à multiplication par $\lambda > 0$ près, telle que :*

- (a) $P_1 \sim P_2 \iff D(P_1) = D(P_2)$,
- (b) $P_1 P_2 = 0 \iff D(P_1) + D(P_2) = D(P_1 + P_2)$,
- (c) P fini $\iff D(P) < \infty$.

De plus, à une normalisation près, l'image de D est l'un des sous-ensembles suivants de $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, n\} & \text{ on dit que } M \text{ est de type } I_n, \\ \{0, 1, \dots, \infty\} & \quad II_\infty, \\ [0, 1] & \quad II_1, \\ [0, +\infty] & \quad II_\infty, \\ \{0, +\infty\} & \quad III. \end{aligned}$$

On voit que pour que M ait un projecteur minimal, il faut et il suffit qu'il soit de type I. Si M est de type I_n , $n < \infty$, c'est $M_n(\mathbb{C})$, et la fonction $D(P)$ est la dimension usuelle du sous-espace de $\mathbb{C}^n$ sur lequel le projecteur $P \in M_n(\mathbb{C})$ projette. Si $n = \infty$, on a $M = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $\mathcal{H}$ de type dénombrable et $D(P) =$ dimension de l'image de P .

Ce qui est remarquable dans le cas II_1 , c'est l'apparition de dimensions à valeurs arbitraires dans $[0, 1]$.

On dit qu'un facteur M est fini s'il ne contient pas de sous-facteur de type I_∞ et cela est équivalent à dire que M est dans l'un des cas I_n , $n < \infty$ ou II_1 . En particulier si M est infini il n'existe sur M aucune trace τ telle que $\tau(1) = 1$.

Un des résultats remarquables des premiers articles de Murray et von Neumann est la réciproque :

Théorème 9 (Murray et von Neumann). *Soit M un facteur de type II_1 . Il existe alors une unique trace τ sur M telle que $\tau(1) = 1$.*

En outre $\tau \in M_*$. Une démonstration récente, due à F.J. Yeadon [62] ramène ce théorème à un résultat puissant de Ryll-Nardzewski : dans tout convexe $\sigma(X, X^*)$ compact d'un Banach X , il y a un point qui est laissé fixe par toute isométrie affine du convexe. On applique ce résultat en montrant que si $\varphi \in M_*$ vérifie $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$ l'enveloppe convexe fermée K de l'orbite de φ sous l'action des automorphismes intérieurs de M (transportés à M_*) est $\sigma(M_*, M)$ compacte. On obtient alors l'existence de $\tau \in M_*$, $\tau(1) = 1$, $\tau(uxu^*) = \tau(x)$ pour u unitaire de M et $x \in M$.

Isomorphisme algébrique et isomorphisme spatial

Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann et Θ un isomorphisme d'algèbres involutives de M_1 sur M_2 . Alors Θ est isométrique (car M_1 et M_2 sont des algèbres stellaires, $\|\mathbf{T}\|^2 = \|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\| =$ rayon spectral de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$) et comme le prédual est unique Θ est $\sigma(M_1, M_{1*})$ continu. Si M_i , $i = 1, 2$ agit dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}_i$, l'isomorphisme Θ n'est cependant pas toujours spatial puisque bien qu'isomorphes M_1 et M_2 peuvent avoir des commutants non isomorphes.

En fait fixons M , supposons M à prédual de type dénombrable et cherchons à décrire tous les isomorphismes π de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ espace hilbertien de type dénombrable. Pour simplifier encore ramenons-nous en utilisant la théorie de réduction au cas où M est un facteur.

On est alors ramené à étudier à équivalence près les représentations π de M dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$ qui sont continues quand on munit M de $\sigma(M, M_*)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de la topologie de dualité avec $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*$. Comme M est un facteur le commutant $R(\pi) = \pi(M)'$ est aussi un facteur et π est isotypique. Il en résulte en prenant $\pi_1 \oplus \pi_2$ que deux représentations π_1 et π_2 ne sont jamais disjointes et que toute représentation π de M est une sous-représentation d'une représentation infinie fixée une fois pour toutes. Ce résultat se prolonge au cas où M n'est plus un facteur : toute représentation π (continue pour $\sigma(M, M_*)$ et $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{L}(\mathcal{H})_*)$) de M est une sous-représentation d'une représentation ρ proprement infinie (au sens où le commutant $R(\rho)$ contient un sous-facteur de type I_∞) et fidèle¹, que l'on choisit arbitrairement, par exemple en partant d'un isomorphisme σ de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et en prenant $\rho = \sigma \oplus \sigma \oplus \dots$.

Il n'y a donc pas de problème sérieux, une fois M connue algébriquement, pour déterminer tous les isomorphismes de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Le problème réel étant celui de la classification des algèbres de von Neumann à isomorphisme algébrique près.

Les deux premiers exemples de facteurs de type II_1 , le facteur hyperfini et la propriété T

Rappelons que si G est un groupe discret dénombrable dont toutes les classes de conjugaison sont infinies et si λ est sa représentation régulière gauche, l'algèbre de von Neumann $R(\lambda)$ est un facteur de type II_1 .

Dans "On rings of operators IV", Murray et von Neumann montrent que tous les facteurs $R(\lambda_G)$ sont isomorphes pour G localement fini (i.e. réunion filtrante croissante de groupes finis) et que si G est le groupe libre à 2 générateurs on obtient un facteur non isomorphe.

Soient N un facteur de type II_1 , et τ l'unique trace ($\tau(1) = 1$) de N ; on définit sur N la norme de Hilbert-Schmidt par :

$$\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}.$$

(C'est l'analogue de la norme $(\sum |a_{ij}|^2)^{1/2}$ d'une matrice (a_{ij})). C'est une norme préhilbertienne sur N et on note d_2 la distance correspondante. Le résultat de Murray et von Neumann est alors :

Théorème 10 (Murray et von Neumann) [43]. / *Il existe à isomorphisme près un facteur de type II_1 et un seul, à prédual de type dénombrable et tel que :*

$$\forall x_1, \dots, x_n \in N, \forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ sous-algèbre stellaire de dimension finie telle que } d_2(x_j, K) \leq \varepsilon \forall j.$$

1. On emploie souvent "représentation fidèle" au lieu de représentation π dont le noyau est réduit à $\mathbf{0} : \pi(x) = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0}$.

Nous désignerons par R cet unique facteur, appelé le facteur hyperfini, pour des raisons évidentes. Dans leur article, Murray et von Neumann montrent que tout facteur de dimension infinie contient une copie de R .

Pour G discret dénombrable localement fini on voit facilement que $R(\lambda_G)$ vérifie la condition du théorème donc est isomorphe à R . En choisissant convenablement G on voit de plus que R vérifie la condition suivante, appelée propriété Γ :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in N, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in \mathcal{U}(N) \text{ unitaire tel que } \|[u, x_j]\|_2 < \varepsilon \text{ et } \tau(u) = 0.$$

III. Le cadre de l'intégration non commutative et la théorie des poids

Pour pouvoir tenir compte de mesures positives non nécessairement finies, il est nécessaire d'introduire l'analogue non commutatif des mesures positives infinies.

La donnée de départ en intégration non commutative est alors un couple (M, φ) d'une algèbre de von Neumann M et d'un poids φ sur M au sens suivant (dû à F. Combes, G. Pedersen et U. Haagerup (Voir [5], [47], [30])).

Définition 11. *On appelle poids sur une algèbre de von Neumann M , une application additive positivement homogène de M_+ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ telle que :*

- (a) *φ est semi-fini, i.e. $\{x \in M_+, \varphi(x) < \infty\}$ est $\sigma(M, M_*)$ -total.*
- (b) *φ est normal, i.e. $\varphi(\sup x_\alpha) = \sup \varphi(x_\alpha)$ pour toute famille filtrante croissante majorée d'éléments de M_+ .*

L'exemple le plus simple de poids infini est celui de la trace usuelle sur les opérateurs bornés dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$. On pose $M = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et pour $T \in M_+$ et toute base orthonormale $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$ on a :

$$\text{Tr}(T) = \sum_i \langle T \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = \sup_{0 \leq A \leq T} \text{Tr}(A), \quad A \text{ de rang fini.}$$

En fait les premiers poids infinis étudiés étaient des traces au sens suivant :

Définition 12. *Un poids φ sur l'algèbre de von Neumann M est une trace s'il est invariant par les automorphismes intérieurs de M .*

Ainsi tout poids sur M qui a une propriété d'unicité est une trace. L'analogue des notions de convergence presque sûre et des espaces L^p , $p \in [1, \infty]$, de la théorie classique, a été obtenu, principalement par Dixmier [14] et Segal [43] pour les traces.

Quand φ est une trace, l'ensemble $\mathcal{L}_p = \{x \in M, \varphi(|x|^p) < \infty\}$ est un idéal bilatère de M et $\|x\|_p = (\varphi(|x|^p))^{1/p}$ définit sur $\mathcal{L}_p$ une semi-norme. Les espaces complétés $L^p(M, \varphi)$ ont de nombreuses propriétés généralisant le cas commutatif et le cas classique des opérateurs de puissance p -ième-sommable dans un espace hilbertien. En particulier, quand $x \geq 0$, $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, (On dit alors que φ est fidèle), le prédual M_* de M s'identifie à l'espace $L^1(M, \varphi)$. De plus l'intersection $L^2(M, \varphi) \cap L^\infty(M, \varphi)$ est une algèbre hilbertienne :

Définition 13. *On appelle algèbre hilbertienne toute algèbre involutive $\mathcal{G}$ munie d'un produit scalaire préhilbertien séparé tel que :*

$$(a) \langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

(b) La représentation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}$ par multiplications à gauche est bornée, involutive et non dégénérée.

La condition (a) définit une isométrie antilinéaire J de l'espace $\mathcal{H}$, complété de $\mathcal{G}$, sur lui-même. La condition (b) permet de parler de la représentation régulière gauche λ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ et donc de lui associer une algèbre de von Neumann : $\lambda(\mathcal{G})''$ dans $\mathcal{H}$. On a alors :

(a) Le commutant de $\lambda(\mathcal{G})''$ est engendré par l'algèbre des multiplications à droite $\lambda'(\mathcal{G}) = J\lambda(\mathcal{G})J$.

(b) L'algèbre de von Neumann associée à l'algèbre hilbertienne $L^2(M, \varphi) \cap L^\infty$ s'identifie à M .

(c) Pour toute algèbre hilbertienne $\mathcal{G}$, il existe sur l'algèbre de von Neumann $\lambda(\mathcal{G})''$ une trace fidèle τ telle que :

$$\tau(\lambda(y^*)\lambda(x)) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{G},$$

et $\mathcal{G}$ est équivalente à l'algèbre hilbertienne associée à τ .

En général, une algèbre de von Neumann M ne possède pas de trace fidèle, par exemple si M est un facteur, il possède une trace fidèle si et seulement s'il n'est pas de type III. On dit que M est semi-finie si elle possède une trace fidèle (dans le cas où M agit dans un espace de type dénombrable cela équivaut à dire que M est une intégrale directe de facteurs dont aucun n'est du type III).

Pour M semi-finie, les outils supplémentaires issus de la théorie des algèbres hilbertiennes permettaient de démontrer des résultats inaccessibles dans le cas général comme :

Théorème 14. Soit M_i , $i = 1, 2$ une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$ alors le commutant $(M_1 \otimes M_2)'$ est engendré par $M_1' \otimes M_2'$.

Pour des algèbres de von Neumann semi-finies M_1 et M_2 , ce résultat est conséquence du théorème de commutation (a) pour les algèbres hilbertiennes.

De même, si G est un groupe localement compact unimodulaire et dg une mesure de Haar sur G , l'algèbre, pour la convolution des fonctions continues à support compact, est une algèbre hilbertienne et le théorème de commutation (a) entraîne :

Théorème 15. Le commutant $R(\lambda)'$ de la représentation régulière gauche λ de G dans $L^2(G, dg)$ est engendré par la représentation régulière droite.

Ce théorème a été démontré pour des groupes localement compacts non nécessairement unimodulaires, par J. Dixmier, qui introduisit la notion d'algèbre quasi-hilbertienne. Le théorème 4 a été démontré pour des algèbres de von Neumann non nécessairement semi-finies par M. Tomita en 1967. En fait sa théorie des algèbres hilbertiennes généralisées est le fondement de toute la théorie non commutative de l'intégration pour les poids qui ne sont pas nécessairement des traces.

La théorie de Tomita doit en fait beaucoup à M. Takesaki qui transforma le papier original très difficile à déchiffrer en un texte accessible (Lecture-Notes n° 128). On peut résumer l'essentiel de la théorie de Tomita-Takesaki, grâce à la définition et au théorème suivant :

Définition 16. On appelle algèbre hilbertienne à gauche toute algèbre involutive $\mathcal{G}$, munie d'un produit scalaire préhilbertien séparé tel que :

(a) L'opérateur $x \mapsto x^*$ est préfermé.

(b) La représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ par multiplications à gauche est bornée, involutive et non dégénérée.

Ainsi la seule différence avec une algèbre hilbertienne est que la fermeture S de l'opérateur $x \mapsto x^*$ peut avoir un module $|S| \neq 1$. Soit alors $\Delta = S^*S$ le carré du module de S on a : $S = J\Delta^{1/2}$ où J est une involution isométrique et le résultat fondamental :

Théorème 17 (Tomita-Takesaki). *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre hilbertienne à gauche et M l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de $\mathcal{G}$. Alors*

$$JMJ = M'$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M \quad (\text{Voir [58]}).$$

De plus, de même que les algèbres hilbertiennes sont associées aux traces, les algèbres hilbertiennes à gauche sont associées aux poids ([5]) :

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre hilbertienne à gauche et M l'algèbre de von Neumann associée, il existe alors sur M un poids fidèle φ tel que :

$$\varphi(\lambda(y^*)\lambda(x)) = \langle y^*, x \rangle \quad x, y \in \mathcal{G}.$$

Inversement, soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids fidèle. Alors

$$\mathcal{G}_\varphi = \{x \in M, \varphi(x^*x) < \infty, \varphi(xx^*) < \infty\}$$

muni du produit de M et du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \varphi(y^*x)$ est une algèbre hilbertienne à gauche, l'algèbre de von Neumann associée s'identifie à M et le poids correspondant s'identifie à φ .

Comme toute algèbre de von Neumann possède un poids fidèle (si M agit dans un espace de type dénombrable elle possède en fait un état fidèle), il en résulte en particulier que toute algèbre de von Neumann est isomorphe à l'algèbre engendrée par la représentation régulière gauche d'une algèbre hilbertienne à gauche.

C'est là que se situe une découverte remarquable de Takesaki et Winnink qui relie la théorie de Tomita et plus exactement le groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre de von Neumann M défini par $\sigma_t(x) = \Delta^{it}x\Delta^{-it}$ avec une équation fondamentale en mécanique statistique quantique. Bien sûr le groupe d'automorphismes σ_t n'est pas unique, il dépend de l'algèbre hilbertienne $\mathcal{G}$, c'est-à-dire du poids fidèle φ sur M :

Définition 18. *Soit φ un poids fidèle sur l'algèbre de von Neumann M . On appelle groupe d'automorphismes modulaires sur M le groupe à un paramètre $(\sigma_t^\varphi)_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de M associé à l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathcal{G}_\varphi$.*

En mécanique statistique quantique des systèmes finis, l'état d'équilibre à la température absolue T est l'état de l'algèbre $M = M_n(\mathbb{C})$ donné par l'égalité :

$$\varphi(x) = \frac{\text{Tr}(xe^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}$$

où Tr est la trace usuelle, $\beta = \frac{1}{kT}$ où k est la constante de Boltzmann et H est l'hamiltonien, i.e. le générateur du groupe à un paramètre d'évolution du système : $\alpha_t(x) = e^{itH}xe^{-itH}$, $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$.

Il est facile dans ce cas de montrer que l'état φ est caractérisé par la condition suivante qui le relie à l'évolution α :

$$\begin{cases} \forall x, y \in M, \exists F_{x,y}(z), \text{ holomorphe pour } 0 < \text{Im } z < 1 \text{ et continue bornée dans} \\ 0 \leq \text{Im } z \leq 1, \text{ telle que :} \\ F_{x,y}(t) = \varphi(\alpha_t(y)x), \quad F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(x\alpha_t(y)) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

C'est la condition de Kubo-Martin-Schwinger.

Pour un système infini on s'attend à ce que la même relation ait lieu entre le groupe d'évolution $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de l'algèbre des observables, qui est une algèbre stellaire, et l'état d'équilibre. Ainsi Haag, Hugenholtz et Winnink ont été amenés à proposer la condition ci-dessus pour un triplet (A, φ, α) où A est une algèbre stellaire, φ un état sur A et α un groupe à un paramètre d'automorphismes de A .

Théorème 19 (Takesaki-Winnink, [58]). *] Soient M une algèbre de von Neumann et φ un état normal fidèle sur M . Alors le groupe d'automorphismes modulaires $(\sigma_t^\varphi)_{t \in \mathbb{R}}$ est l'unique groupe à un paramètre d'automorphismes de M qui vérifie les conditions de Kubo-Martin-Schwinger pour $\beta = 1$.*

V. Facteurs de Powers, d'Araki et Woods et de Krieger

L'analogue non commutatif d'un espace de probabilité est un couple (M, φ) où M est une algèbre de von Neumann et φ un état normal fidèle sur M . L'exemple le plus simple correspond à $M = M_n(\mathbb{C})$, tout état φ sur M s'écrit $\varphi(x) = \text{Tr}(\rho x)$ où $\rho \in M$ est une matrice positive de trace 1. On considère alors le produit tensoriel infini $\otimes(M_\nu, \varphi_\nu)$ au sens de von Neumann (voir [2]). C'est un couple (M, φ) où $\varphi = \otimes \varphi_\nu$ est un état sur M .

Pendant 30 ans après la naissance des algèbres de von Neumann on ne connaissait que trois facteurs de type III deux à deux non isomorphes. R.T. Powers, qui avait une formation de physicien, réussit à montrer en 1967 que si l'on prend tous les couples (M_ν, φ_ν) égaux au couple $M_2(\mathbb{C})$, $\varphi((a_{ij})) = \lambda a_{11} + (1 - \lambda)a_{22}$ on obtient une famille à un paramètre continu $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ de facteurs de type III deux à deux non isomorphes : R_α , $\alpha = \frac{1}{\lambda} - 1 \in]0, 1[$ ([35]).

Après la découverte de Powers, H. Araki et E.J. Woods entreprenaient une classification à isomorphisme près des facteurs produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices ([2]). Ils démontraient en particulier que l'on peut calculer à partir de la liste des valeurs propres des $\varphi_\nu : (\lambda_{\nu,j})_{j=1,\dots,n_\nu}$ les deux invariants suivants :

$$r_\infty(M) = \{\lambda \in]0, 1[, M \otimes R_\lambda \text{ isomorphe à } M\},$$

$$p(M) = \{\lambda \in]0, 1[, M \otimes R_\lambda \text{ isomorphe à } R_\lambda\}.$$

Ils montraient de plus que $r_\infty(M)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$ et que l'égalité $r_\infty(M) = \lambda^{\mathbb{Z}}$ caractérise le facteur de Powers R_λ parmi les produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices. En outre grâce à l'étude de $p(M)$, E.J. Woods réussit à montrer que la classification des facteurs est impossible par des invariants boréliens à valeurs réelles.

D'un autre côté W. Krieger avait commencé une étude systématique des facteurs associés à la théorie ergodique. Commençons d'abord par expliciter sa construction d'une algèbre de von Neumann à partir d'une relation d'équivalence à orbites dénombrables sur un espace borélien standard $(X, \mathcal{B})$ et

d'une mesure quasi-invariante μ . Cette construction généralise la première construction de Murray et von Neumann qui elle-même était inspirée des produits croisés de la théorie des algèbres simples centrales sur un corps. Sous sa forme définitive, elle est due à J. Feldman et C. Moore (Voir [27]). Soient donc $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace borélien standard probabilisé et $R \subset X \times X$ le graphe, supposé analytique, d'une relation d'équivalence à orbites dénombrables. On suppose μ quasi-invariante au sens où la saturation par R d'un ensemble borélien négligeable est encore négligeable. On considère alors l'algèbre hilbertienne à gauche des fonctions boréliennes bornées de R dans $\mathbb{C}$ telles que pour un $n < \infty$, $\{j, f(i, j) \neq 0\}$ soit de cardinalité n pour tout i .

VI. Facteurs de type III

Le théorème de Radon-Nikodym

La théorie de Tomita-Takesaki associe à tout poids fidèle φ sur une algèbre de von Neumann M un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M , le groupe d'automorphismes modulaires, défini par

$$\sigma_t^\varphi(x) = \Delta_\varphi^{it} x \Delta_\varphi^{-it}$$

où Δ_φ est l'opérateur modulaire, le carré du module de l'involution $x \mapsto x^*$ considérée comme opérateur non borné dans l'espace $L^2(M, \varphi)$, complété de $\{x \in M, \varphi(x^*x) < \infty\}$ pour le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \varphi(y^*x)$.

D'un autre côté, la théorie d'Araki et Woods associait à tout facteur M les deux invariants r_∞ et p , $r_\infty(M) = \{\lambda, M \otimes R_\lambda \sim M\}$, $p(M) = \{\lambda, M \otimes R_\lambda \sim R_\lambda\}$.

Or pour les facteurs d'Araki et Woods un calcul direct à partir de leurs travaux montre les égalités suivantes :

- 1) $r_\infty(M) = \bigcap \text{Sp } \Delta_\varphi, \quad \varphi \text{ état normal fidèle sur } M,$
- 2) $p(M) = \{\exp(2\pi/T_0), \exists \varphi \text{ état normal fidèle sur } M \text{ tel que } \sigma_{T_0}^\varphi = 1\}.$

Ces deux égalités suggèrent bien entendu les définitions suivantes, pour un facteur arbitraire M :

$$S(M) = \bigcap_{\varphi \text{ normal fidèle sur } M} \text{Sp } \Delta_\varphi,$$

$$T(M) = \{T \in \mathbb{R}, \sigma_T^\varphi \in \text{Int } M\}.$$

La première question étant évidemment de savoir si les égalités $r_\infty = S$ et $p = \exp(2\pi/T)$, valables pour les facteurs d'Araki et Woods restent vraies en général. Une question immédiatement reliée est le problème de calcul des invariants S et T . Les définitions ci-dessus de ces invariants montrent que pour calculer S et T on doit passer en revue tous les états normaux fidèles sur M et calculer leurs groupes d'automorphismes modulaires. Or, en général, et ceci est clair pour les facteurs du paragraphe V, un facteur est donné avec un état ou un poids privilégié pour lequel le calcul de Δ_φ et σ_t^φ est facile. Le problème était donc posé d'étudier dans quelle mesure exactement le groupe σ_t^φ dépend de φ . La réponse complète à ce problème constitue en fait exactement la version non commutative du théorème de Radon-Nikodym.

Théorème 20 (Connes, [8].) *] Soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids fidèle sur M .*

(a) Pour tout poids fidèle ψ sur M il existe une unique application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}(M)$ le groupe unitaire de M muni de $\sigma(M, M_*)$ telle que :

$$\begin{aligned} u_{t+t'} &= u_t \sigma_t^\varphi(u_{t'}), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \\ \sigma_t^\psi(x) &= u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M, \\ \psi(x) &= \varphi(u_t^* x u_t^*) \quad \forall x \in M_+. \end{aligned}$$

On note $u_t = (D\psi : D\varphi)_t$.

(b) Inversement, soit $t \mapsto u_t$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}(M)$ telle que $u_{t+t'} = u_t \sigma_t^\varphi(u_{t'})$, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique poids fidèle ψ sur M tel que $(D\psi : D\varphi) = u$.

Si M est commutative, $M = L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, alors φ et ψ sont des mesures positives sur X qui sont équivalentes à μ , il existe alors une densité de Radon-Nikodym $h : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Les h^{it} , $t \in \mathbb{R}$ sont alors dans $M = L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $h^{it} = (D\psi : D\varphi)_t$.

Si M est semi-finie et τ est une trace fidèle sur M , il existe alors des opérateurs positifs affiliés à M tels que $\varphi = \tau(\rho_\varphi \cdot)$, $\psi = \tau(\rho_\psi \cdot)$ et on a :

$$(D\psi : D\varphi)_t = \rho_\psi^{it} \rho_\varphi^{-it}.$$

La propriété $\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*$, $\forall x \in M$, montre que bien que le groupe d'automorphismes modulaires change en général avec φ , sa classe modulo les automorphismes intérieurs ne varie pas. On peut alors se demander si elle n'est pas de toutes façons triviale mais un argument facile à partir du théorème ci-dessus montre que :

$$T(M) = \{T \in \mathbb{R}, \sigma_T^\varphi \in \text{Int } M\}.$$

En outre un théorème de J. Dixmier et M. Takesaki (voir ([58])) montre que, en supposant que M est de type dénombrable on a

$$T(M) \neq \mathbb{R} \iff M \text{ n'est pas semi-finie.}$$

On introduit alors le groupe $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$ des classes d'automorphismes de M modulo les automorphismes intérieurs et on obtient, associée à toute algèbre de von Neumann, un homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ dans $\text{Out } M$:

$$\delta(t) = \text{Classe de } \sigma_t^\varphi \text{ (indépendante du choix de } \varphi \text{)}.$$

En particulier $T(M) = \ker \delta$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. En fait l'image de δ est même contenue dans le centre du groupe $\text{Out } M$.

On peut de plus calculer $T(M)$ à partir d'un seul poids φ fidèle sur M puisque il suffit de déterminer les t pour lesquels σ_t^φ est un automorphisme intérieur.

Par exemple quand M est un facteur d'Araki-Woods : $M = \bigotimes_{\nu=1}^\infty (M_\nu, \varphi_\nu)$, on connaît le groupe d'automorphismes modulaires de $\varphi = \bigotimes \varphi_\nu$, c'est $\sigma_t^\varphi = \bigotimes \sigma_t^{\varphi_\nu}$.

Un calcul simple à partir de la liste des valeurs propres $(\lambda_{\nu,j})_{j=1,\dots,n_\nu}$ de φ_ν montre alors que :

$$T(M) = \left\{ T \in \mathbb{R}, \sum_{\nu=1}^\infty (1 - |\sum_j \lambda_{\nu,j}^{1+iT}|) < \infty \right\}.$$

On en tire par exemple que $T(R_\alpha) = \{T \in \mathbb{R}, \alpha^{iT} = 1\}$.

Quand M est un facteur de Krieger, ou plus généralement quand $M = L^\infty(R, \mu)$ pour une relation d'équivalence R (Voir paragraphe V), on ne suppose pas nécessairement R de la forme R_T , on vérifie également par un calcul facile que :

$$T(M) = \frac{2\pi}{\log p(R)}$$

où $p(R)$ est l'ensemble des $\lambda > 0$ pour lesquels il existe $\nu \sim \mu$ telle que les dérivées de Radon-Nikodym $\frac{d\nu(Sx)}{d\nu(x)}$ appartiennent à λ pour toute transformation borélienne S préservant les orbites de R , i.e. l'invariant p de Krieger.

Ce deuxième calcul montre facilement que, en général, l'égalité $p(M) = \exp(2\pi/T(M))$ n'a pas lieu.

Les facteurs de type III

Le théorème de Radon-Nikodym permet de calculer l'invariant $S(M)$ à partir d'un unique poids normal fidèle φ sur M . On définit le centralisateur M_φ de φ par l'égalité :

$$M_\varphi = \{x \in M, \sigma_t^\varphi(x) = x \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout projecteur $e \neq 0$, $e \in M_\varphi$ on définit un poids fidèle φ_e sur l'algèbre de von Neumann réduite eMe par l'égalité :

$$\varphi_e(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in eMe, \ x \geq 0.$$

On a alors la formule :

$$S(M) = \bigcap_{e \neq 0} \text{Sp } \Delta_{\varphi_e}$$

où e varie donc parmi les projecteurs non nuls de M_φ . De plus comme e commute avec σ_t^φ , le calcul de Δ_{φ_e} (et par conséquent du spectre de Δ_{φ_e}) est immédiat, on a $\sigma_t^{\varphi_e}(x) = \sigma_t^\varphi(x)$, $\forall x \in eMe$. Ainsi la formule ci-dessus permet de calculer, par exemple, $S(M)$ pour $M = L^\infty(R, \mu)$, on obtient l'égalité : $S(M) = r(R)$ où r est l'invariant défini par Krieger comme ensemble des valeurs essentielles des dérivées de Radon-Nikodym. En général, donc, $S(M) \neq r_\infty(M)$.

En outre on a une interprétation beaucoup plus satisfaisante de $S(M)$ comme spectre de l'homomorphisme modulaire δ . Supposons que le prédual M_* est de type dénombrable, alors un groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de M est de la forme σ_t^φ , pour un poids fidèle φ sur M , si et seulement si la classe $\iota(\sigma_t)$ de σ_t dans $\text{Out } M$ est égale à $\delta(t)$ pour tout t . Dit en d'autres termes cela signifie que l'ensemble de tous les groupes d'automorphismes modulaires de poids fidèles sur M constitue exactement l'ensemble des sections boréliennes multiplicatives de δ .

Pour tout poids fidèle φ , le spectre de σ^φ s'identifie au spectre de δ au sens suivant :

$$\text{Sp } \sigma^\varphi = \{\lambda \in \text{Groupe dual de } \mathbb{R}, \widehat{f}(\lambda) = 0 \text{ pour toute } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int f(t) \sigma_t^\varphi dt = 0\}.$$

(On peut aussi définir le spectre de σ^φ à partir des supports des distributions transformées de Fourier des $t \mapsto \sigma_t^\varphi(x)$, on obtient ainsi des distributions à valeurs dans M et $\text{Sp } \sigma^\varphi$ est la fermeture de la réunion des supports des $\widehat{\sigma_t^\varphi(x)}$).

Notons également que dans la formule ci-dessus on identifie $\mathbb{R}_+^*$ avec le groupe dual de $\mathbb{R}$ par l'égalité $\langle \lambda, t \rangle = \lambda^{it}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$, l'égalité précise est alors

$$\text{Sp } \delta \cap \mathbb{R}_+^* = \text{Sp } \sigma^\varphi.$$

On a donc $\mathbb{R}_+^* \cap S(M) = \bigcap_{\varphi} \text{Sp } \sigma^{\varphi}$, et cette formule montre alors que $S(M)$ est, quand M est un facteur, un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ (auquel on ajoute 0). De plus $0 \in S(M) \iff M$ est de type III et on a les cas suivants :

$$\begin{aligned} III_0 \quad S(M) &= \{0\} \cup \{1\}, \\ III_{\lambda}, \lambda \in]0, 1[\quad S(M) &= \lambda^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}, \\ III_1 \quad S(M) &= [0, +\infty[. \end{aligned}$$

En un certain sens le λ ci-dessus exprime la distance entre M et les facteurs semi-finis, en fait λ est relié de manière monotone et biunivoque à une grandeur qui mesure l'obstruction à l'existence d'une trace sur M :

$$d(M) = \text{diam}(\mathcal{S} / \text{Int } M)$$

où $\mathcal{S}$ désigne l'espace métrique (avec la distance $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$) des états normaux sur M et où $\text{Int } M$ agit sur $\mathcal{S}$ par $\varphi \mapsto u\varphi u^*$, u unitaire de M . Pour M de type III_1 on a $d(M) = 0$ (voir [10]) de sorte que l'on ne peut distinguer deux états d'un facteur de type III_1 , par une propriété fermée et invariante par les automorphismes intérieurs.

Citons maintenant une autre interprétation de $S(M)$ d'un point de vue heuristique. Revenons d'abord à l'origine de la terminologie "automorphismes modulaires". Le premier exemple d'algèbre hilbertienne à gauche est l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur un groupe localement compact G . Soit dg une mesure de Haar à gauche sur G , le module du groupe est alors l'homomorphisme Δ_G de G dans $\mathbb{R}_+^*$ associé à l'action de G à droite sur dg . De plus l'opérateur modulaire de l'algèbre hilbertienne à gauche est l'opérateur de multiplication par la fonction Δ_G dans l'espace $L^2(G, dg)$, de sorte que son spectre est la fermeture de l'image de Δ_G . On peut alors, toujours d'un point de vue heuristique interpréter pour un facteur M , l'invariant $S(M)$ comme "l'image du module de M ". Les facteurs de type III_{λ} , $\lambda \in]0, 1[$ sont caractérisés par l'égalité $S(M) = \lambda^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$; or c'est un exercice facile de voir que si G est un groupe localement compact et l'image du module Δ_G de G est $\lambda^{\mathbb{Z}}$, G est le produit semi-direct d'un groupe unimodulaire $H = \ker \Delta_G$ par un automorphisme θ dont le module est λ .

VII. Théorie ergodique non commutative

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité μ , et T une transformation borélienne de $(X, \mathcal{B})$ laissant μ invariante. Soient $M = L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ et φ l'état associé à μ , alors T détermine un automorphisme de M qui préserve φ , par l'égalité : $\theta(f) = f \circ T^{-1}$. Inversement tout automorphisme de M préservant φ est obtenu de cette manière. Ainsi la théorie ergodique classique est-elle, après traduction, la même chose que l'étude à conjugaison près des automorphismes de M qui fixent φ .

Une des raisons d'être de cette théorie est en fait que tous les triplets $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (et par conséquent tous les couples (M, φ)) avec $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in X$, sont isomorphes. Ainsi à chaque construction différente d'un tel triplet va correspondre une famille d'automorphismes de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et il s'agit de les comparer.

De même, dans le cadre de l'intégration non commutative, il existe de nombreuses constructions différentes du facteur hyperfini R , par exemple comme représentation régulière d'un groupe discret localement fini (voir le paragraphe I), comme produit tensoriel infini des couples $(M_n(\mathbb{C}), \tau_n)$ où τ_n est la trace normalisée par $\tau_n(1) = 1$, ou encore à partir du théorème de H. Dye (paragraphe

V). A chacune de ces constructions correspondent des automorphismes de R . En fait on peut aussi construire R à partir des relations d'anticomutation canoniques sur un espace hilbertien réel E et obtenir ainsi un homomorphisme injectif du groupe orthogonal de E dans $\text{Aut } R$. Il en résulte que $\text{Out } R$ contient en fait tout groupe localement compact de type dénombrable.

Bien entendu on ne veut pas distinguer deux automorphismes de R de la forme θ et $\sigma\theta\sigma^{-1}$ où $\sigma \in \text{Aut } R$. Adoptons les définitions générales suivantes :

Définition 21. Soient M une algèbre de von Neumann, et $\theta_1, \theta_2 \in \text{Aut } M$ deux automorphismes de M .

- (a) On dit que θ_1 et θ_2 sont conjugués quand il existe $\sigma \in \text{Aut } M$ tel que $\theta_2 = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$.
- (b) On dit que θ_1 et θ_2 sont extérieurement conjugués quand il existe $\sigma \in \text{Aut } M$ tel que $\theta_2 = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ modulo $\text{Int } M$.

Quand M est commutative les deux définitions coïncident car $\text{Int } M = \{1\}$. Dans le cas général on a deux problèmes : conjugaison et conjugaison extérieure.

Commençons par citer deux résultats qui étendent au cas non commutatif des résultats importants de théorie ergodique classique, nous discuterons plus loin les phénomènes spécifiquement non commutatifs, le lecteur intéressé uniquement aux automorphismes de R peut se reporter directement au théorème 8 ci-dessous.

Le théorème de Rokhlin

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace borélien standard probabilisé et T une transformation borélienne de $(X, \mathcal{B})$ préservant μ . Il existe alors une partition essentiellement unique de X , $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, où chaque X_i est invariant par T et où :

- pour $i > 0$, la restriction de T à X_i est périodique de période i avec :

$$\text{Card}(\{T^n x\}) = i \quad \forall x \in X_i,$$

- pour $i = 0$, la restriction de T à X_0 est apériodique, i.e.

$$\text{Card}(\{T^n x\}) = \infty \quad \forall x \in X_0.$$

Le théorème de Rokhlin s'énonce alors ainsi : soit T une transformation apériodique de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n > 0$ il existe un borélien $E \subset X$, tel que $E, TE, \dots, T^{n-1}(E)$ soient deux à deux disjoints et

$$\mu \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j E \right) < \varepsilon.$$

Soient alors (N, τ) un couple (algèbre de von Neumann, trace fidèle normalisée $\tau(1) = 1$) et θ un automorphisme de N préservant τ . Il existe alors une partition de l'unité dans N , $\sum_{j=0}^{\infty} e_j = 1$, où chaque e_j est un projecteur du centre de N invariant par θ et où :

- pour $j > 0$, la restriction de θ à l'algèbre de von Neumann réduite Ne_j vérifie : θ^j est intérieur et pour $k < j$ et tout projecteur $e \leq e_j$, $e \neq 0$, il existe un projecteur $f \neq 0$, $f \leq e$ tel que

$$\|f\theta^k(f)\| \leq \varepsilon.$$

- pour $j = 0$, la restriction de θ à l'algèbre de von Neumann Ne_0 est apériodique : pour tout $k > 0$, tout projecteur non nul $e \leq e_0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un projecteur $f \neq 0$, $f \leq e$ avec :

$$\|f\theta^k(f)\| \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas commutatif cette décomposition est unique. On dit que θ est apériodique quand $e_0 = 1$.

Théorème 22 (Connes, [12]). *] Soient (N, τ) un couple (algèbre de von Neumann, trace fidèle normalisée) et θ un automorphisme apériodique de N préservant τ . Pour tout entier $n > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition de l'unité $\sum_{j=0}^{n-1} E_j = 1$ dans N , où les E_j sont des projecteurs, telle que :*

$$\|\theta(E_j) - E_{j+1}\|_2 \leq \varepsilon \quad j = 0, 1, \dots, n-2 \quad (E_n = E_0).$$

Ici, comme dans le premier paragraphe on pose, pour $x \in N$, $\|x\|_2 = (\tau(|x|^2))^{1/2}$.

L'entropie

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ comme ci-dessus et $\mathcal{P}$ une partition borélienne de X , on appelle entropie de $\mathcal{P}$ relative à T un scalaire $h(T, \mathcal{P})$ qui compte asymptotiquement $\frac{1}{n}$ fois le logarithme du nombre d'éléments dans la partition composée de $\mathcal{P}, T\mathcal{P}, \dots, T^{n-1}\mathcal{P}$:

$$h(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P} \vee T\mathcal{P} \vee \dots \vee T^{n-1}\mathcal{P}),$$

où $H(\mathcal{Q})$, pour une partition $\mathcal{Q} = (Q_j)_{j \in \{1, \dots, k\}}$, est $\sum \eta(\mu(Q_j))$, $\eta(t) = -t \log t$, $\forall t \in [0, 1]$.

On définit alors l'entropie de T comme le sup des $h(T, \mathcal{P})$. C'est un invariant calculable grâce au théorème de Kolmogorov-Sinaï : on a $h(T) = h(T, \mathcal{P})$ pour toute partition $\mathcal{P}$ pour laquelle les $T^j\mathcal{P}$ engendrent la tribu $\mathcal{B}$. En particulier l'entropie d'un shift de Bernoulli : la translation de 1 dans $\prod_{\nu \in \mathbb{Z}} (X_\nu, \mu_\nu)$ où tous les X_ν sont égaux à $\{1, \dots, p\}$ et tous les μ_ν à la même mesure $j \in \{1, \dots, p\} \mapsto \lambda_j$, on obtient $h(T) = \sum_1^p \eta(\lambda_j)$.

Or les shifts de Bernoulli ont un analogue dans le cas non commutatif, prenons le plus simple qui est associé à un entier p . On considère le produit tensoriel infini $\bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} (M_\nu, \varphi_\nu)$ où pour tout ν on a $M_\nu = M_p(\mathbb{C})$, algèbre des matrices $p \times p$, et $\varphi_\nu =$ trace normalisée. Le shift σ donne alors un automorphisme du couple (R, τ) où R est le facteur hyperfini et τ sa trace normalisée. On peut alors poser la question : Les σ sont-ils deux à deux conjugués. Ce problème nous a conduit avec E. Størmer à la généralisation suivante de l'entropie et du théorème de Kolmogorov-Sinaï pour les automorphismes du facteur hyperfini R .

VIII. Les algèbres de von Neumann moyennables

Nous passons en revue dans ce paragraphe les propriétés reliées à l'approximation d'une algèbre de von Neumann M par des algèbres de dimension finie. Nous verrons ci-dessous qu'elles définissent en fait toutes la même classe d'algèbre de von Neumann.

Approximation par des algèbres de dimension finie

Par définition une algèbre de von Neumann M est approximativement de dimension finie quand elle est engendrée par une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie.

Une raison importante de l'intérêt de cette classe est le résultat suivant dû à O. Maréchal, basé sur la démonstration du théorème de Glimm.

Théorème 23 (O. Maréchal, [39]). *] Soit A une algèbre stellaire de type dénombrable non postliminaire. Alors pour toute algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie M , sans trace finie non nulle, il existe un état $\varphi \in A^*$, tel que l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\varphi(A)$ (paragraphe III) soit isomorphe à M .*

Ainsi une théorie de l'intégration non commutative qui ne se limite pas aux algèbres stellaires postliminaires, c'est-à-dire aux algèbres de von Neumann de type I, voit apparaître nécessairement toutes les algèbres de von Neumann qui sont approximativement de dimension finie.

Inversement, pour l'algèbre stellaire A produit tensoriel infini d'algèbres de matrices 2×2 , il est immédiat que toutes les algèbres de von Neumann engendrées par A sont approximativement de dimension finie.

Les propriétés P de Schwartz, E de Hakeda et Tomiyama et l'injectivité

Avant 1963, on avait seulement deux exemples de facteurs de type II_1 non isomorphes (à pré-dual de type dénombrable bien entendu). Ainsi la propriété Γ distinguait le facteur hyperfini R du facteur $L(\mathbb{F}_2)$ engendré par la représentation régulière du groupe libre à 2 générateurs. En 1963, J.T. Schwartz introduisit une propriété permettant de distinguer R de $L(\mathbb{F}_2) \otimes R$ qui tous deux ont la propriété Γ .

Cette propriété P de R est basée sur la moyennabilité d'un groupe localement fini. En fait J. Schwartz montrait que pour G discret il y a équivalence entre :

- 1) G est moyennable i.e. il existe un état invariant par translations sur $\ell^\infty(G)$.
- 1) $M = R(\lambda_G)$ agissant dans $\mathcal{H} = L^2(G)$ a la propriété P suivante : Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ il existe un élément de M dans l'enveloppe convexe $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{L}(\mathcal{H})_*)$ fermée des uTu^* , u unitaire de M .

En outre, il construisait pour toute algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$ vérifiant 2) une projection linéaire de norme 1 de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sur M , vérifiant $P(aTb) = aP(T)b$, $\forall a, b \in M$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

On vérifie directement que toute algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie vérifie la propriété P de Schwartz.

Un résultat remarquable de J. Tomiyama montre que pour toute projection P de norme 1 d'une algèbre de von Neumann N sur une sous-algèbre de von Neumann M on a automatiquement : (cf [60])

$$P(aTb) = aP(T)b \quad \forall a, b \in M, T \in N.$$

Propriétés équivalentes

Théorème 24 (Connes, [9]).] Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de type dénombrable. Pour toute algèbre de von Neumann M opérant dans $\mathcal{H}$ les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) M est approximativement de dimension finie.
- (b) M est injective : il existe une projection de norme 1 de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sur M .
- (c) M a la propriété P de Schwartz.
- (d) M' est injective.

Corollaire 25. Soit M une algèbre de von Neumann injective et G un groupe discret moyennable agissant par automorphismes sur M , alors

$$N = M^G = \{x \in M, gx = x \ \forall g \in G\}$$

est injective.

Les propriétés 2) et 3) montrent que si $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien de type dénombrable, la classe monotone engendrée par les algèbres de von Neumann de type I ne contient que des algèbres de von Neumann injectives.

La propriété 4) permet essentiellement de limiter le problème de classification de ces algèbres à celle des facteurs injectifs. La propriété 5) montre que tout groupe moyennable d'unitaires engendre une algèbre de von Neumann injective.

Enfin, la propriété 6) permet de voir facilement que pour qu'un facteur M de type III_λ , $\lambda \in]0, 1[$ soit injectif il faut et il suffit que le facteur de type II_∞ associé le soit.

Parmi les exemples les plus importants d'algèbres de von Neumann injectives on a :

- (a) Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un groupe localement compact moyennable.
- (b) L'algèbre de von Neumann commutant d'une représentation unitaire continue quelconque d'un groupe localement compact connexe.
- (c) L'algèbre de von Neumann engendrée par une représentation arbitraire d'une algèbre stellaire nucléaire.

IX. Classification des facteurs moyennables et le problème III_1

Dans tout ce paragraphe toutes les algèbres de von Neumann étudiées sont supposées avoir un préduel de type dénombrable.

Le seul obstacle qui reste à la compréhension idéale des algèbres de von Neumann moyennables est le suivant :

Existe-t-il à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type III_1 ?

Nous allons traiter tous les autres cas un par un et nous reviendrons ensuite à ce problème.

Facteurs de type II_1

Il existe à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type II_1 , c'est R , le facteur hyperfini. En fait, on en a la caractérisation suivante, qui justifie la terminologie hyperfini et la terminologie moyennable.

Théorème 26 (Connes, [9]). *] Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de type dénombrable et N un facteur (de dimension infinie) dans $\mathcal{H}$ alors :*

$$N \text{ isomorphe à } R \iff \exists \varphi \text{ état sur } \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ tel que } \varphi(xT) = \varphi(Tx) \forall x \in N, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Cela justifie le terme "hyperfini" car φ est mieux qu'une trace sur N . Cela justifie le terme "moyennable" et en fait l'analogie avec la "moyennabilité" d'un groupe discret est très utile. Un tel groupe G est moyennable quand il existe un état sur $\ell^\infty(G)$ invariant par translation. Ici le rôle de G est joué par N , celui de $\ell^\infty(G)$ par l'algèbre de von Neumann $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$ et l'existence d'une hypertrace équivaut à l'existence d'une moyenne invariante.

À la condition de Pflinger caractérisant les groupes discrets moyennables :

$$\forall g_1, \dots, g_n \in G, \forall \varepsilon > 0, \exists F \text{ partie finie de } G \text{ avec } \|\chi_{g_i F} - \chi_F\|_2 \leq \varepsilon \|\chi_F\|_2,$$

correspond la condition suivante sur N agissant dans $\mathcal{H} = L^2(N, \tau)$:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in N, \forall \varepsilon > 0, \exists P \text{ projecteur de dimension finie dans } \mathcal{H} \text{ avec } \|x_i P - P x_i\|_{HS} \leq \varepsilon \|P\|_{HS}.$$

C'est de cette condition que l'on déduit par exemple que N est alors semi-discret, on utilise ensuite les théorèmes de théorie ergodique non commutative pour aboutir au résultat : sur $N \otimes N$ la symétrie de Sakai $\sigma_N \in \text{Aut}(N \otimes N)$ définie par $\sigma_N(x \otimes y) = y \otimes x, \forall x, y \in N$ vérifie $\sigma_N \in \text{Int}(N \otimes N)$.

Citons maintenant quelques corollaires du théorème :

Corollaire 27. *Tout sous-facteur N de R est soit de dimension finie (i.e. isomorphe à $M_n(\mathbb{C})$), soit isomorphe à R .*

Ainsi R est l'unique facteur qui soit contenu dans tous les autres. De plus, et c'est là une conséquence de la théorie de réduction, on connaît à isomorphisme près toutes les sous-algèbres de von Neumann de R , ce sont les algèbres produit d'algèbres de von Neumann de la forme $C \otimes M_n(\mathbb{C})$, $n < \infty$ et $C \otimes R$ où C est abélienne. Le facteur R restera sans doute le seul pour lequel une telle classification des sous-algèbres de von Neumann est possible.

Facteurs de type $\text{III}_\lambda, \lambda \in]0, 1[$

Pour $\lambda \in]0, 1[$, il existe à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type III_λ , c'est le facteur R_λ de Powers.

Théorème 28 (Connes, [9]). *] Pour $\lambda \in]0, 1[$, tous les facteurs moyennables de type III_λ sont isomorphes à R_λ .*

Facteurs de type III_0

L'analyse des facteurs moyennables de type III_0 résulte de 3 contributions différentes :

- 1) Les théorèmes d'unicité cités plus haut.
- 1) La théorie de dualité de Takesaki utilisée par l'invariant des facteurs qu'elle fournit : le flot des poids.
- 1) La théorie de Krieger sur l'équivalence faible des transformations.

La discussion de 2) serait trop longue ici, disons simplement qu'à travers des problèmes précis comme celui de la distinction entre facteurs de Krieger et facteurs d'Araki-Woods, on est arrivé à affiner de mieux en mieux les invariants dans le cas III_0 (voir [8] en particulier où on donne une décomposition de tout facteur de type III_0 comme produit croisé d'une algèbre de von Neumann semi-finie par un automorphisme). C'est M. Takesaki qui avec sa théorie de la dualité a obtenu l'invariant sous sa forme précise : un groupe à un paramètre d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann abélienne. C'est ce qui a conduit W. Krieger à associer à toute transformation T d'un espace $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un flot $W(T)$.

Le résultat remarquable de W. Krieger est alors :

Théorème 29 (W. Krieger, [38]). / Soient $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ un espace borélien standard probabilisé et T_i une transformation ergodique laissant μ_i quasi-invariante alors,

$$L^\infty(R_{T_1}, \mu_1) \sim L^\infty(R_{T_2}, \mu_2) \iff W(T_1) \sim W(T_2).$$

De plus les flots correspondants aux facteurs de type III_0 sont exactement les flots ergodiques non transitifs.

Notre contribution se résume alors à :

Théorème 30 (Connes, [9]). / Pour qu'un facteur de type III_0 soit un facteur de Krieger (i.e. soit de la forme $L^\infty(R, \mu)$), il faut et il suffit qu'il soit moyennable.

Facteurs de type III_1

Dans [59], M. Takesaki a réussi à montrer, grâce à sa théorie de la dualité pour les produits croisés, que l'on avait pour les facteurs de type III_1 l'analogue exact du théorème décrivant les facteurs de type III_λ , $\lambda \in]0, 1[$.

Théorème 31 (M. Takesaki, [59]). /

- (a) Soit M un facteur de type III_1 , il existe un facteur N de type II_∞ et un groupe à un paramètre $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de N , $\text{mod } \theta_t = e^{-t}$, tel que M soit isomorphe au produit croisé de N par les θ_t .
- (b) Soient N un facteur de type II_∞ et $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de N vérifiant $\text{mod}(\theta_t) = e^{-t} \forall t$, alors le produit croisé de N par ce groupe est un facteur de type III_1 .
- (c) Deux couples (N_1, θ^1) comme dans (b) donnent des facteurs isomorphes ssi les groupes à un paramètre θ^1 sont conjugués par un isomorphisme de N_1 sur N_2 .

En outre, nous avons montré avec M. Takesaki, dans [13], que l'on avait là aussi une classe de poids privilégiée, les poids dominants, unique à automorphisme intérieur près, dont l'algèbre de von Neumann N est le centralisateur. De plus pour que M soit un facteur moyennable, il faut et il suffit que l'algèbre de type II_∞ associée N soit moyennable.

On voit donc que le problème de classification des facteurs moyennables de type III_1 revient à la théorie ergodique non commutative des flots d'automorphismes de $R_{0,1}$.

Pour le moment, l'élaboration de cette théorie se heurte à une difficulté sérieuse : soit $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes disons du facteur fini N , alors la propriété de continuité de l'homomorphisme $t \mapsto \theta_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Aut } N$ qui est toujours requise, n'entraîne pas la continuité de $t \mapsto \theta_t^\omega$ de $\mathbb{R}$ dans $\text{Aut } N^\omega$, ω ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.

Cependant, on peut, par un chemin détourné, arriver à montrer que tous les facteurs moyennables de type III_1 qui vérifient la condition supplémentaire suivante sont isomorphes au facteur R_∞ d'Araki-Woods de type III_1 :

Condition C : Il existe un état normal φ sur M tel que :

$(\{\varphi \in M_*, \|\varphi, x_n\| \rightarrow 0 \text{ pour toute suite bornée d'éléments de } M \text{ telle que } \|\varphi, x_n\| \rightarrow 0\}) \Rightarrow (\varphi = \lambda\psi)$

Il est facile de montrer que si cette propriété est vraie pour un état normal φ sur M elle est vraie pour tous, en utilisant [10]. Bien entendu elle est vraie pour R_∞ et nous conjecturons qu'elle est vraie pour tout facteur de type III_1 .

Bibliographie

Références

- [1] C. Akemann et P. Ostrand. On a tensor product C^* algebra associated with the free group on two generators (Preprint).
- [2] H. Araki et E.J. Woods. A classification of factors. (Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.) t.4. (1968) p.51-130.
- [3] V. Arveson. Subalgebras of C^* algebras. Acta Math 123 (1969) 141-224.
- [4] M. Choi et E. Effros. Separable nuclear C^* algebras and injectivity. (à paraître).
- [5] F. Combes. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. (Compos. Math. t. 23 (1971) p. 49-77).
- [6] A. Connes. Sur la classification des facteurs de type II. (C.R. Acad. Sci. Paris t. 281 (1975) p. 13-15).
- [7] A. Connes. Almost periodic states and factors of type III. J. Funct. Analysis 16 (1974) p. 415-445.
- [8] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. (Ann. Scient. École Norm. Sup. 4ème Série tome 6 fasc. 2 (1973) p. 133-252).
- [9] A. Connes. Classification of injective factors. (Ann. of Math. 104 (1976) p. 73-115).
- [10] A. Connes. Factors of type III_1 , property L'_λ and closure of inner automorphisms. (J. Operator Theory 14 (1985) p. 189-211).
- [11] A. Connes et E. Størmer. Entropy for automorphisms of II_1 factors. (Acta Math. 134 (1975) p. 289-306).
- [12] A. Connes. Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. (Ann. Sci. École Norm. Sup. 8 (1975) p. 383-419).
- [13] A. Connes et M. Takesaki. The flow of weights on factors of type III. (Tôhoku Math. J. 29 (1977) p. 473-575).
- [14] J. Dixmier. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. (Gauthier-Villars, 1969).
- [15] J. Feldman, A. Connes et B. Weiss. Amenable equivalence relations. (J. Funct. Analysis 42 (1981) p. 302-338).

- [16] A. Connes et W. Krieger. Measure space automorphisms, the normalizer of the full group, and the type of the von Neumann algebra. (J. Funct. Analysis 24 (1977) p. 336-352).
- [17] E. Effros et C. Lance. Tensor products of operator algebras. (Adv. Math. 25 (1977) p. 1-34).
- [18] J. Glimm. Type I C^* -algebras. (Ann. of Math. 73 (1961) p. 572-612).
- [19] U. Haagerup. All nuclear C^* -algebras are amenable. (Inv. Math. 74 (1983) p. 305-319).
- [20] J. Hakeda et J. Tomiyama. On some extension properties of von Neumann algebras. (Tôhoku Math. J. 19 (1967) p. 315-323).
- [21] B. Johnson. Cohomology in Banach Algebras. Memoir A.M.S. 127 (1972).
- [22] B. Johnson, R.V. Kadison et J. Ringrose. Cohomology in operator algebras III, Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p. 73-96.
- [23] V. Jones. Actions of finite groups on the hyperfinite II_1 factor (Thèse à paraître dans les Memoirs A.M.S.).
- [24] W. Krieger. On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non singular transformations of a Measure space. (Dans "contributions to ergodic theory and probability", Lecture notes n° 160 (1970)).
- [25] W. Krieger. On ergodic flows and the isomorphism of factors. (Math. Ann. 223 (1976) p. 19-70).
- [26] O. Maréchal. Une remarque sur un théorème de Glimm. (Bull. Soc. Math. France 2ème Série 99 (1975) p. 41-44).
- [27] F.J. Murray et J. von Neumann. On rings of operators. (Ann. of Math. t. 37 (1936) p. 116-229).
- [28] F.J. Murray et J. von Neumann. On rings of operators, II. (Trans. Amer. Math. Soc. t. 41 (1937) p. 208-248).
- [29] J. von Neumann. On rings of operators III. (Ann. of Math. t. 41 (1940) p. 94-161).
- [30] F.J. Murray et J. von Neumann. On rings of operators IV. (Ann. of Math. t. 44 (1943) p. 716-808).
- [31] J. von Neumann. On rings of operators : Reduction theory. (Ann. Math. t. 50 (1949) p. 401-485).
- [32] A. Ocneanu. C.R. Acad. Science Paris, t.291 (1980).
- [33] D. Ornstein, B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions I. The Rohlin lemma. Bull. A.M.S., Vol.2, N°1 (1980), p.161.
- [34] G. Pedersen. Measure theory for C^* algebras. Math. Scand. 19 (1966) et 22 (1968), 25 (1969).
- [35] J. Phillips. Automorphisms of full II_1 factors with applications to type III factors.
- [36] R.T. Powers. Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings. (Ann. of Math. t. 86 (1967) p. 138-171).
- [37] P. Shields. The theory of Bernoulli shifts (Chicago press).
- [38] S. Sakai. Automorphisms and tensor products of operator algebras (à paraître dans American Journal of Math).
- [39] S. Sakai. On automorphism groups of type II_1 factors. Tôhoku Math. J. 26 (1974) p. 423-430.
- [40] S. Sakai. C^* and W^* algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60.
- [41] J. Schwartz. Two finite, non hyperfinite, non isomorphic factors. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 19-26.
- [42] I. Segal. A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. 57 (1953) p. 401-457.
- [43] E. Størmer. Real structure in the hyperfinite factor (Preprint).
- [44] M. Takesaki. On the cross norm of the direct product of C^* algebras. Tôhoku Math. J. 16 (1964) 111-122.
- [45] M. Takesaki. Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. (Lecture notes n° 128, Springer Verlag 1970).
- [46] M. Takesaki. Duality in cross products and the structure of von Neumann algebras of type III. Acta Math. 131 (1973) p. 249-310.
- [47] J. Tomiyama. On the projection of norm one in W^* algebras. Proc. Japan Acad. 33 (1957) 608-612.
- [48] J. Vesterström. Quotients of finite W^* algebras. (J. Funct. Analysis t. 9 (1972) p. 322-335).
- [49] F.J. Yeadon. A new proof of the existence of a trace on a finite von Neumann algebra. (Bull. Am. Math. Soc. t.77 (1971), p.257-260).
- [50] R. Zimmer. Hyperfinite factors and amenable ergodic actions. Inv. Math. 41 (1977), p.23-31.
- [51] R. Zimmer. Strong rigidity for ergodic actions of semi simple Lie groups. Annals of Math.