

4. Géométrie différentielle et équation bilatérale

L'invariant q_M a du sens pour toute dimension. Pour $n = 2, 3$, et pour n'importe quelle variété connexe M , q_M contient tous les entiers suffisamment grands. Le cas $n = 4$ est plus difficile mais nous démontrerons ci-dessous dans le théorème 12 que q_M contient tous les entiers $m > 4$ dès que la 4-variété connexe M est une variété de spin, une hypothèse qui est automatique dans notre contexte.

4.1 Cas de la dimension $n < 4$

Lemme 7 : Soit M une variété connexe compacte lisse orientée de dimension $n < 4$. Alors, pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^n(M)$ qui ne s'évanouit nulle part, respecte l'orientation, et réalise la quantification $\int_M \omega \in \mathbb{Z}$, $\left| \int_M \omega \right| > 3$, on peut trouver deux applications lisses ϕ, ϕ' telles que,

$$\phi^\#(\alpha) + \phi'^\#(\alpha) = \omega$$

où α est la formule du volume de la sphère par unité de volume.

Preuve. Par [1] comme restreint dans [20]¹, toute triangulation de Whitehead de M fournit (après une subdivision barycentrique) une couverture ramifiée de la sphère S^n obtenue en recollant deux copies Δ_\pm^n du simplexe standard Δ^n le long de son bord.

On utilise l'étiquetage des sommets de chaque n -simplexe par $\{0, 1, \dots, n\}$ où chaque sommet est étiqueté par la dimension de la face dont il est le barycentre. La bicoloration correspond au fait d'affecter à chaque n -simplexe de la triangulation un signe dépendant du fait que l'orientation du simplexe soit en accord ou pas avec l'orientation de l'étiquetage des sommets. On obtient une PL -application² $M \rightarrow S^n$ en envoyant chaque simplexe avec un signe \pm vers Δ_\pm^n respectant l'étiquetage des sommets. Cela donne une couverture qui est ramifiée seulement sur le $(n-2)$ -squelette de Δ_\pm^n . Après lissage, on obtient alors une application lisse $\phi : M \rightarrow S^n$ dont le Jacobien sera > 0 à l'extérieur d'un sous-ensemble K de dimension $n - 2$ de M . En utilisant l'hypothèse $n < 4$ (ce qui donne $(n-2) + (n-2) < n$), l'ensemble d'orientation préservant les difféomorphismes $\psi \in \text{Diff}^+(M)$ tels que $\psi(K) \cap K = \emptyset$ est un sous-ensemble dense de $\text{Diff}(M)^+$, par conséquent, on trouve une fonction $\psi \in \text{Diff}^+(M)$ telle que le Jacobien de ϕ et le Jacobien de $\phi' = \phi \circ \psi$ ne s'évanouissent jamais simultanément. Cela montre que la forme différentielle $\rho = \phi^\#(\alpha) + \phi'^\#(\alpha)$ ne s'évanouit nulle part et par le résultat de [17], il existe une orientation préservant le difféomorphisme de M qui transforme cette forme en ω à condition qu'elles aient la même intégrale. Mais l'intégrale de ρ est double de l'intégrale de $\phi^\#(\alpha)$, qui est le degré de l'application ϕ et donc le nombre de simplexes d'une certaine couleur. À la manière dont elle procède, la construction ci-dessus ne donne que des

Référence : <https://arxiv.org/pdf/1411.0977>, p. 18-20. Voir aussi <https://arxiv.org/pdf/1703.02470>, p. 30-31.

Traduction : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

1. Note de la traductrice : je serais reconnaissante à toute personne qui pourrait m'envoyer cette référence en espagnol introuvable sur la toile.

2. Ajouté par la transcriptrice : PL pour presque linéaire (on peut dire une variété PL), une application PL , on peut aussi penser à polyédrale.

nombres pairs, puisque l'intégrale de ρ est le double du degré de l'application ϕ mais nous verrons sous peu dans le lemme 9 qu'en fait, le degré de l'application ϕ est dans $q(M)$ à partir d'un argument général simple.

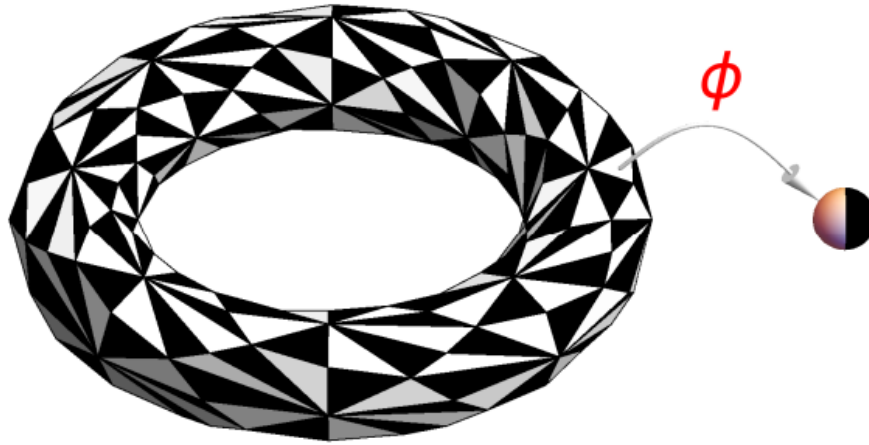


FIGURE 1 : Triangulation du tore, l'application ϕ envoie les triangles blancs sur l'hémisphère blanc de la petite sphère et les triangles noirs sur l'hémisphère noir de la petite sphère.

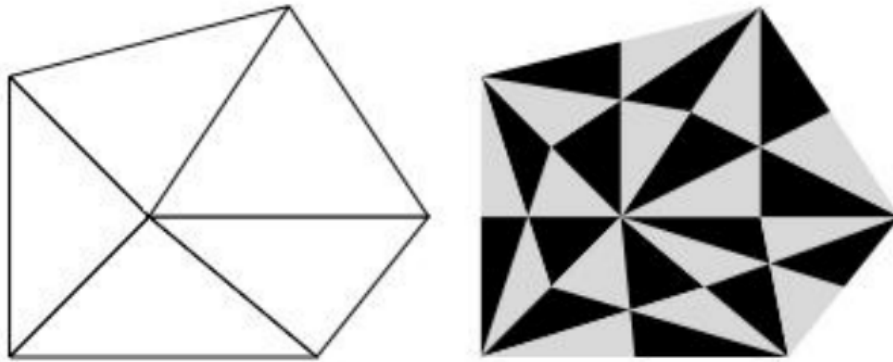


FIGURE 2 : Subdivision barycentrique.

On pourra aussi regarder la petite vidéo “Palpitation barycentrique”, pour voir une triangulation barycentrique appliquée à la sphère ainsi que le passage du n -simplexe (polytope) à la sphère.

<https://www.youtube.com/watch?v=NdOElga6E5M>.

Références

- [1] J. Alexander, Note on Riemann spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 26.
- [17] J. Moser, On the volume elements on a manifold. Trans. Amer. Math. Soc. 120 1965 286-294.
- [20] A. Ramirez, Sobre un teorema de Alexander An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico, 15, No 1 (1975) 77-81. (1920), no. 8, 370-372.