Le flot de Riemann et les zéros de zeta

Alain Connes
Collège de France, IHÉS, Ohio State University

Je vais vous présenter un espace $(X, \underset{\mathbb{R}_+^*}{\circlearrowleft})$ (sur les nombres réels classiques) qui permettra deux choses :

1. la première chose qu'il donnera est une interprétation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann ;
2. et la seconde chose qu'il fera est qu'en quelque sorte, il réduira l'hypothèse de Riemann au fait de démontrer (ce que je ne peux pas faire) une formule de trace, et par formule de trace, je veux dire la chose suivante : je veux dire que l'exemple le plus simple d'une formule de trace est juste le fait que si vous prenez une matrice, la somme de ses valeurs propres (appelons les coefficients de la matrice a_{ij}) est égal à la somme de ses éléments diagonaux $\operatorname{Tr} M = \sum \lambda_j = \sum a_{ii}$.

La formule de trace que nous avons écrite est satisfaite bien sûr par des matrices finies dont les valeurs sont des éléments entiers mais ce que je veux expliquer, c'est comment, une fois que nous aurons le flot et etc, nous pourrons obtenir l'interprétation spectrale et le fait que l'hypothèse de Riemann est satisfaite, en supposant qu'on peut démontrer la formule de trace.

Laissez-moi commencer au tout début, par quelques relations déjà connues dans l'article de Riemann et qui sont que si vous commencez avec la fonction zeta de Riemann et que vous regardez le nombre de zéros (je les appellerai $\rho_1, \rho_2, ...,$), vous commencez par visualiser la fonction $N(E)$ qui est le nombre de zéros qui sont non triviaux et dont la partie imaginaire est dans l'intervalle $]0, E]$ (i.e. $N(E) = \#$ de zéros tels que $\mathfrak{Im}\, \rho \in]0, E]$). Donc vous comptez combien il y a de zéros, en supposant que vous savez exactement où ils sont, et vous trouvez bien sûr que cette fonction est une fonction en escalier et que cette fonction s'avère provenir de la superposition de deux comportements. Donc si nous appelons cette fonction $N(E)$, elle est égale à la somme de deux choses, la somme d'une fonction très lisse et jolie qui est la courbe que j'ai dessinée ici, qui peut facilement être calculée, en fait elle est donnée dans l'article de Riemann, elle est égale à

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}$$

avec

$$\langle N(E) \rangle = \left(\frac{E}{2\pi}\right)\left(\log \frac{E}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1)$$

Cette première fonction est juste fournie par la formule de Stirling appliquée aux facteurs gamma *(mal audible)*. Vous avez ce terme. Et alors, vous avez un autre terme, qui est si vous voulez la partie intéressante en quelque sorte, parce qu'au lieu d'être justement cette fonction lisse complètement contrôlable, c'est la partie qui oscille et qui est bien sûr nécessaire parce que vous voulez obtenir une fonction en escalier. Donc si vous visualisez cette partie oscillante, parce que c'est juste une différence que vous devez calculer (pour $N(E)$), le type de graphe sera comme ceci, vous obtenez un graphe qui oscille si erratiquement que si vous prenez son intégrale sur tout intervalle, vous

Vidéo visionnable ici https://www.youtube-nocookie.com/embed/yTpnamUP9Q4.

Transcription d'une vidéo mise en ligne le 16.10.2021, Denise Vella-Chemla, octobre 2021.

obtenez 0. Donc cette partie oscillante a une formule, qui est égale à

$$N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi}\text{Im}\log\zeta\left(\frac{1}{2}+iE\right)$$

(le facteur $\frac{1}{\pi}$ parce que vous comptez un entier), et vous devez prendre la branche du log qui vient de $+\infty$. Et cette fonction est en $O(\log E)$. Et une observation très importante qui motive le problème de l'interprétation spectrale des zéros est le suivant, il est dû théoriquement à la fois à Hugh Montgomery et à un expérimentateur Andrew Odlyzko ; l'observation est la suivante : elle est que si vous séparez les deux comportements, entre celui qui est le comportement moyen et celui qui oscille, la meilleure façon de les séparer est de procéder à une mise à l'échelle des zéros, dans le sens où si on appelle x_j la valeur moyenne évaluée sur les ρ_j (notée $x_j = \langle N(\rho_j)\rangle$), cela fait que maintenant, cette courbe-là est remplacée par une courbe en escalier de hauteur des marches $\log 1$ *(mal audible)*. En quelque sorte, la moyenne des x_j est égale à un. Donc ce que vous faites maintenant, vous comptez le nombre de paires (i, j) dans un intervalle $[1, M]$ d'entiers tels que $x_i - x_j$ appartient à un certain intervalle $[\alpha, \beta]$ et ce que Montgomery a démontré dans un certain domaine et que Odlyzko a testé avec une très grande précision est que cette fonction est équivalente à

$$\#\{i, j \in [1, M]; x_i - x_j \in [\alpha, \beta]\} \sim M \int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du$$

Donc c'est un fait, qui est conjecturé en général, et qui est numériquement testé.

Et maintenant le fait surprenant en quelque sorte est que cela correspond à des statistiques *(montrant l'intégrale)*. C'est très différent des statistiques obtenues par les nombres aléatoires. Si vous avez des nombres aléatoires, vous n'avez pas ce comportement intégral, vous avez juste une distribution de Poisson.

Et les statistiques obtenues dans notre cas sont exactement identiques aux statistiques des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne. Cela a été observé lors d'une rencontre célèbre entre Hugh Montgomery et Freeman Dyson, à Princeton. Dyson a prouvé que c'étaient les statistiques des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne.

Maintenant nous arrivons à l'idée suivante : où rencontre-t-on de telles matrices. Pourquoi ont-elles été inventées ? Elles ont été inventées par des physiciens, précisément parce qu'ils voulaient calculer les niveaux d'énergie de spectres atomiques, ils ont trouvé que c'était le bazar et que la seule manière d'obtenir quelque chose était d'utiliser des matrices aléatoires mais les matrices qu'ils utilisaient n'étaient pas hermitiennes. Les matrices que vous obtenez pour des systèmes atomiques sont des matrices symétriques réelles, ce qui est différent.

Donc il y a alors un problème évident qui est que ces zéros sont des sortes de statistiques réinterprétées comme les valeurs propres d'un opérateur adéquat, cet opérateur et l'espace de Hilbert correspondant auront un nom, parce que cette idée d'interpréter les zéros comme les valeurs propres d'opérateurs est une vieille idée. C'est une idée qui a été initiée par Pólya et aussi par Hilbert. Et donc j'utiliserai juste la terminologie et j'appellerai espace de Pólya-Hilbert $\mathcal{H}$ cet espace de Hilbert hypothétique et j'appellerai D l'opérateur hypothétique. Cet opérateur devrait être tel que ses zéros sont exactement les zéros non triviaux de zeta et alors, ce que vous souhaiteriez prouver est que

$$\left(D - \frac{1}{2}\right)^* = -\left(D - \frac{1}{2}\right)$$

(D est adjoint à gauche).

Maintenant il y a une autre importante suite à cette idée, qui est le travail d'Atle Selberg dans lequel ce que Selberg a fait, vraiment, a été de construire un système, exactement comme l'ont fait les deux autres, notamment en quantifiant un système classique. Quel était le système classique dans l'espace de Selberg, c'était le flot géodésique sur une variété riemannienne adéquate M, et une partie de ce flot géodésique, bien sûr, fournit par quantification le Laplacien agissant dans la mesure L^2. Pourtant, le travail de Selberg donnait des formules qui étaient très proches des formules de la théorie des nombres, et c'est le fait qu'on espère pour deux raisons.

La première raison est qu'en quelque sorte, alors que dans le cas de la fonction zeta de Riemann, vous avez un nombre de valeurs propres qui grossissent comme E (comme $E\,(\log E)$), dans le cas de Selberg, vous avez quelque chose qui grossit plus vite.

La seconde raison est qu'à chaque fois que vous prenez un flot géodésique, ou en fait à chaque fois que vous prenez un flot sur un espace qui a une symétrie temporelle (la symétrie temporelle est la chose suivante, c'est que vous avez une symétrie de l'espace des phases : dans le cas d'un flot géodésique, cette symétrie est juste que (p, q) va sur $(-p, q)$ (i.e. $(p, q) \to (-p, q)$). Mais une telle symétrie sera satisfaite pour tout opérateur hermitien recouvrant un Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$$

($V(q)$ est un certain potentiel). Donc chaque fois que vous aurez un système qui ne change pas quand vous passez de (p, q) à $(-p, q)$, vous aurez quelques problèmes. Parce que quand vous quantifiez le système, vous n'obtenez pas une matrice hermitienne, mais vous obtenez une matrice symétrique d'éléments réels. Maintenant les matrices symétriques à valeurs réelles n'ont pas les mêmes statistiques que celles que vous voulez. Mais il y a une autre façon de voir cela très rapidement, qui est que quand vous avez un système qui a ce type de symétrie, il y a une résonance entre deux orbites, deux orbites proches du système, l'orbite sur (p, q) est transformée quand vous prenez $(-p, q)$ à la place de (p, q), donc elles auront la même longueur, et etc.

Bien, les gens cherchent un tel système et laissez-moi vous montrer pourquoi cette chasse, de la manière dont elle a été définie, a grossi : laissez-moi vous parler du travail de M. Berry et J. Keating, ce sont des idées générales provenant du chaos quantique, mais ce qu'on devrait faire alors, ce serait de chercher un système classique, typiquement un système comme celui d'un flot sur une variété qui par quantification fournira le bon espace d'opérateurs de Pólya-Hilbert. On peut faire le même type de calcul que ceux que j'ai évoqués pour le nombre de zéros de zeta, on peut le faire pour le nombre de valeurs propres de l'hamiltonien qui appartiennent à l'intervalle $[0, E]$ (i.e. $N_H(E) = \#$ de valeurs propres de $H \in [0, E]$). Donc vous pouvez le prolonger et ce que vous obtiendrez, c'est qu'il se séparera en deux morceaux : un morceau est quantifié comme un volume dans l'espace des phases (ça correspond à la valeur moyenne) et le deuxième morceau est la partie oscillante :

$$N_H(E) = \langle N_H(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E)$$

Vous pouvez vraiment prolonger cette partie oscillante par un prolongement asymptotique et ce que vous trouvez, c'est que le prolongement asymptotique est couvert par (vous devez supposer que le système est correctement chaotique et etc), mais vous pouvez écrire un prolongement asymptotique de la partie oscillante et elle ressemble à ça, pour un système qui a *(mal audible)* de dimension 2 (ce n'est pas une formule exacte, c'est une formule asymptotique) :

$$N_{\rm osc}(E) \simeq \frac{1}{\pi}\sum_{\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\lambda_\gamma}{2}\right)}\;\sin(mE\,T_\gamma^{\#})$$

γ étiquette les orbites périodiques. Mais je n'étiquette les orbites périodiques qu'une seule fois, je n'étiquette pas les traversées des orbites périodiques. Et alors (l'indice m), vous sommez sur le nombre de fois que vous traversez les orbites périodiques, dans le sens positif, et T_γ est la longueur du *(mal audible)* ; λ_γ est appelé l'exposant d'instabilité de l'orbite. Ce n'est pas une formule exacte, c'est quelque chose que vous pouvez utiliser en pratique et etc.

Maintenant ce que vous faites, c'est que si vous voulez avoir une certaine information à propos de ce flot hypothétique, vous devriez certainement être capable de comparer la formule qui vous donne cela avec la formule que vous devriez obtenir de cette expression là-haut en remplaçant zeta par la formule du produit eulérien. Si vous écrivez log comme log de zeta, c'est le log d'un produit, c'est donc une somme, convergente, et chacun des termes qui apparaît en zeta est juste $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p^{\frac{1}{2}+iE}}}$, et vous obtenez

$$-\log\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}+iE}}\right).$$

Qu'obtiendrez-vous lorsque vous développerez cela ? Vous obtiendrez une autre formule. Laissez-moi l'écrire :

$$N^{\zeta}_{\rm osc}(E) \approx \frac{1}{\pi}\sum_{p=2,3,5,7,\ldots}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{1}{p^{m/2}}\sin(m\,E\log p)$$

(écrivant le terme $\dfrac{1}{p^{m/2}}$*, il dit que ça a l'air bon ; et quand il écrit le* sin*, il dit "parce que c'est la partie imaginaire donc vous trouvez un sinus aussi.").* Excepté que j'ai fait une erreur, donc si vous vous ennuyez, vous pouvez essayer de trouver l'erreur, et vous verrez que cette erreur est absolument essentielle.

Donc ignorons l'erreur pour l'instant, et écrivons que cele est positif. Donc je veux dire que vous pouvez dire :

- (A) la première chose que vous pouvez dire est que pour le flot que vous cherchez, les orbites périodiques devraient être étiquetées par des nombres premiers ; les longueurs des orbites, les périodes, devraient être $\log p$, c'est clair, et l'exposant d'instabilité devrait être aussi égal à $\log p$ (i.e. $\exp \lambda_p = \log p$) ;

- (B) La seconde chose qu'on peut dire bien sûr est aussi qu'il ne doit pas y avoir de symétrie temporelle ; si vous avez une symétrie temporelle, cela signifie en fait que chaque orbite est comptée deux fois et c'est impossible, je ne peux pas avoir de 2 pour une orbite ;

Quelle est l'erreur que j'ai faite ? J'ai oublié un signe moins, un signe moins global. Vous voyez si vous êtes attentif, quand vous calculez le signe qui est ici, vous trouverez malheureusement qu'il y a un signe moins global ici *(mettant un signe moins en gras devant l'expression pour* $N^{\zeta}_{\rm osc}(E)$*).*

Maintenant c'est vraiment problématique, ce signe moins global. Parce que vous pouvez essayer de dire qu'en mettant des exposants plus grands, etc, mais ça ne sera jamais consistant avec le signe moins. Parce que ça serait un certain i élevé à une certaine puissance n, et ça ne consisterait jamais à vous donner le signe moins. Donc c'est un gros problème.

(une remarque d'un auditeur : "Pourquoi est-ce un problème ?") Bon vous avez deux oscillations, l'une d'elles est une sorte d'oscillation positive et l'autre une oscillation négative. Vous n'avez aucun moyen de dire que vous savez.

Donc ceci est vraiment le tout début, la raison pour laquelle une approche relativement naïve comme celle de Dyson ne marche pas. Et si vous souhaitez avancer, il est vraiment nécessaire que vous étendiez le cadre.

Il y a une autre chose bien sûr qui devrait être faite par rapport à ce problème et qui est de comprendre en quelque sorte quel est le paradigme correct dans lequel il faut penser aux fonctions zeta. Laissez-moi aller vers ce point, ce paradigme est :

Les corps globaux et la géométrie algébrique.

L'idée ici est la suivante : après un petit temps, vous trouvez que la fonction zeta qui est associée à un corps, qui est le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q} = K$, et vous trouvez que les seules propriétés de ce corps qui sont réellement utilisées principalement *(mal audible)*, ce que vous aurez, c'est qu'il y aura des fonctions zeta pour des corps comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, le corps des nombres algébriques (*qu'il écrit* $a\mathbb{Q}\#$). Mais il sera isomorphe à K. Mais il s'avère qu'il y a un autre cas particulier de ce fait "quels sont les bons corps ?" pour traiter le problème et ce sont les corps de fonctions, les corps de fonctions sur une courbe Σ mais maintenant, plutôt que de travailler dans des corps finis de nombres, vous travaillez sur des corps finis de fonctions sur Σ, $\mathbb{F}_q$. Donc ce qui est le plus important, ce n'est pas que vous ayez ces deux cas particuliers, vraiment, ce qui est le plus important, c'est que les corps pour lesquels le problème est bien posé et par chance, la réponse soit positive et puisse être définie conceptuellement de manière fructueuse, et c'est vraiment ce qui importe. Ces corps sont techniquement appelés des corps globaux mais laissez-moi vous fournir leur définition.

La définition est la suivante : un corps K (je considère un corps dénombrable, il n'a pas de structure topologique). Donc K est global si et seulement si K est dans un anneau localement compact A dont nous devons supposer qu'il est non discret et semi-simple, et $K \subseteq A$ et c'est un sous-ensemble et parfois il y a égalité. Par cette égalité, je veux dire qu'il est discret et co-compact.

Donc ce que vous déduisez de cette égalité, c'est que même si le corps lui-même n'a pas de topologie connue, il est lié par cette relation à un anneau localement compact qui bien sûr a une topologie très intéressante et en quelque sorte, il s'avère de plus que cet anneau est unique. Notamment K détermine A et A détermine K. Et l'hypothèse de Riemann devrait être vraie pour cette situation, pour tous les corps globaux. Maintenant il s'avère que vous pouvez spécialiser votre étude au cas des corps de fonctions, et ce qui se produit là c'est que vous avez quelque chose de mieux qui agit pour vous au sens où vous avez une sorte de dictionnaire, une sorte de dictionnaire de ce texte bilingue qui vous permet de traduire immédiatement les propriétés que vous trouvez techniquement pour la théorie de la fonction zeta correspondante, pour les traduire géométriquement ; si vous voulez, c'est comme la première chose que vous obtenez, il s'avère que les zéros de ζ ont là une interprétation spectrale claire :

Le dictionnaire est le suivant :

zéros de ζ	valeurs propres du Frobenius agissant sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\overline{\sum}, \mathbb{Q}_l)$
Expansion fonctionnelle	Dualité de Poincaré
Formules explicites	Formule de Lefschetz
Hypothèse de Riemann	inégalité de Castelnuovo

(Première ligne du dictionnaire) : Le corps fini $\mathbb{F}_q$ n'est pas algébriquement clos et vous avez besoin de passer là par le produit agissant sur un certain espace étrange qui est appelé la cohomologie étale de la courbe avec des valeurs qui malheureusement ne sont pas des nombres omplexes, ce qui serait trop beau, mais des nombres l-adiques, où l est premier à la caractéristique du corps. Donc en quelque sorte, vous n'obtenez pas vraiment l'interprétation spectrale mais vous l'obtenez presque parce que vous obtenez effectivement un espace qui n'est pas un espace de Hilbert complexe mais qui n'en est pas loin.

Alors la seconde chose que vous avez, c'est que l'équation fonctionnelle correspond à la dualité de Poincaré pour cette cohomologie.

La ligne suivante qui est extrêmement importante est celle des formules explicites. Donc qu'est-ce qu'une formule explicite, par exemple pour SO(1), et si vous comprenez cela, vous comprendrez que vous savez ce que c'est : dans SO(1), une formule explicite, c'est une formule qui relie les zéros aux premiers dans le développement du produit eulérien. Dans SO(1), nous avons vu comment calculer le terme oscillant donné asymptotiquement par cette formule. C'est typique de ce que vous avez dans les formules explicites. Donc la formule explicite est en fait identique à la formule de Lefschetz pour le Frobenius. Notamment, quelle est cette formule ? À quoi ressemble la formule de Lefschetz ? C'est une transformation de Fourier qui vous dit juste que si vous comptez le nombre de points fixes d'une certaine transformation φ, vous pouvez les compter par la formule suivante :

$$\#\text{fix } \varphi = \text{Trace } \varphi/H^0 - \text{Trace } \varphi/H^1 + \text{Trace } \varphi/H^2$$

(Traces de l'action de varphi sur H^0 (resp. H^1, resp. H^2)).

C'est vraiment ce que vous avez. Bon. Et alors, vous poursuivez et vous avez un beau dictionnaire pour comprendre ce texte bilingue qui vous permet de penser aux choses, parce que vous avez des notions géométriques. C'était ce que je voulais fournir parce qu'en général, je veux donner des outils qui permettent de penser géométriquement.

Maintenant nous voyons tout de suite à partir de la formule de Lefschetz quel était le problème dans cette étrange approche et pourquoi nous avions ce problème du signe moins global.

À partir de ce dessin, nous voyons immédiatement la solution : quand on regarde cette dernière formule *(montrant H^1 dans la première ligne du dictionnaire)*, on voit que la réalisation spectrale est dans H^1 ; mais quand on regarde cette dernière formule, on voit que H^1 est précédé par un signe moins. H^0 est un espace très trivial, c'est un espace à une dimension et par dualité, H^2 est aussi un espace trivial en 1-dimension. Dans la formule, vous voyez le signe moins global avant la partie concernant H^1. Donc vous êtes coincé, cela vous dit que vous aviez tort de chercher une interprétation spectrale au sens de ce que les physiciens appellent un spectre d'émission. *(une remarque d'un auditeur, mal audible)*, *(il a raison mais AC dit qu'il reviendra à la remarque ultérieurement).* Maintenant le point problématique est vraiment le suivant : quelle est la leçon de cela ? La leçon de cela est que maintenant on comprend quel était le problème. L'information C est la suivante :

C L'interprétation spectrale des zéros de Pólya-Hilbert devrait être un spectre d'absorption.

Qu'est-ce que je veux dire par là ? Je vais le dire dans le domaine de la physique habituelle : quand vous regardez une étoile très éloignée, ce que vous voyez dans la lumière qu'elle émet c'est qu'un certain nombre de raies lumineuses sont manquantes, c'est un certain nombre de raies noires. Vous ne voyez pas le foncé avec un certain nombre de raies blanches, ce que vous voyez, ce sont des lignes manquantes. En d'autres termes, ce que je suis en train de dire c'est que vous devriez vous attendre à ce que cet espace apparaisse non tel quel, mais à partir de son négatif. Dans un langage opérationnel mathématique plus fantaisiste, il devrait apparaître comme un conoyau, il devrait apparaître comme une différence. Donc, c'est extrêmement important bien sûr. Et il y a autre chose que nous apprenons, en continuant avec ce dictionnaire, qui est si vous voulez ce que devrait être le groupe. Si vous regardez la situation d'une caractéristique positive, notamment la situation où l'on prend une courbe dans notre corps fini, alors ce qui arrive c'est que ce n'est pas un flot que vous obtenez, c'est vraiment une seule transformation qui est la transformation de Frobenius. Donc ce que vous avez ici ce sont les entiers naturels $\mathbb{Z}$. Ce n'est pas un flot. Cela peut vous gêner parce que vous pourriez vous dire "Comment vais-je trouver une réponse générale, si dans un cas je cherche une action pour $\mathbb{Z}$, et dans l'autre cas, face à une caractéristique 0, je cherche une action de $\mathbb{R}$. Maintenant ce que vous obtenez rapidement, c'est qu'à cause de la théorie du corps de classe, ces deux groupes en fait *(reliant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ à un troisième objet les englobant tous les deux)* ont une formulation générale. Le vrai groupe, le groupe que vous devriez chercher et qui devrait agir sur l'espace est le suivant : c'est $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_1(K)$. Ce groupe a un nom, on l'appelle le groupe des classes d'idèles. Une étape essentielle dans la théorie du corps de classe est que ce groupe est à un groupe compact près isomorphe à $\mathbb{Z}$ quand vous prenez la situation des corps finis et il est isomorphe à $\mathbb{R}$ quand vous prenez le cas des corps de nombres. Donc en quelque sorte, ce que vous rassemblez de cela est ce qui remplacera le Frobenius. Et quand nous remplaçons le groupe en général, ce n'est pas $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ (la droite réelle) mais c'est ce groupe. *(Donc il écrit la condition D.)*

D Le groupe qui agit n'est pas $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ mais c'est le groupe $G = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_1(K)$ (les éléments inversibles dans $\mathbb{A}$ évalués par $\mathrm{GL}_1(K)$.

Ce groupe a un nom, il s'appelle le groupe des classes d'idèles, et le terme idèle précise le terme adèle. Le terme idèle vient de la notion d'idéal dans un corps de nombres et alors il y a les classes d'idéals, puis les idèles, et finalement les adèles. Donc ce qui est connu de nombreux théoriciens, c'est que ceci est le paradigme correct pour notre sujet.

C'est l'information que nous avons, mais maintenant bien sûr, nous devrions trouver l'espace. Pour une autre raison que je ne veux pas décrire qui est due à la mécanique statistique et qui est la première ligne du dictionnaire de la géométrie non-commutative, on est immédiatement amené à l'espace et au flot suivants

$$\text{Espace } X = \mathbb{A}/\mathrm{GL}_1(K)$$

L'espace est extrêmement simple et c'est l'espace que je considèrerai. Notamment, je considère deux adèles a et b et je dis (en notant K^* les éléments inversibles de K, qui ne sont pas nuls) :

$$a \sim b \iff \exists q \in k^* \quad \text{tel que} \quad a = bq$$

C'est mon espace. Et il est en quelque sorte évident que vous avez une action sur le groupe des classes d'idèles, notamment le quotient sur cet espace. Pourquoi ? Parce que $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ agit sur $\mathbb{A}$ simplement par ceci : si je prends $j \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ et si je prends $x \in \mathbb{A}$, je leur associerai jx, leur produit. L'action la plus simple qu'on peut prendre, c'est de prendre juste le groupe multiplicatif sur le groupe additif. Et parce que je veux qu'il agisse non pas par $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$, mais par le quotient par $\mathrm{GL}_1(K)$, je dois diviser, donc je veux dire que ceci est si simple *(mal audible)*.

Donc laissez-moi écrire le premier théorème. Le premier théorème est l'interprétation spectrale.

Pour l'énoncer, il y a des petits sujets complètement sans lien et je les mets ici : c'est à propos du fait que ce groupe G est un peu plus gros que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, il a une partie compacte, donc laissez-moi juste vous rappeler cela :

$$\begin{array}{ll} G = K \times \mathbb{R}_+^* & \quad \text{corps de nombres} \\ G = K \times \mathbb{Z} & \quad \text{corps de fonctions} \end{array}$$

Ne vous inquiétez pas trop à propos de cette partie K *(soulignant K dans les deux lignes ci-dessus)*. Ce K est important parce que quand je décrirai l'espace de Hilbert, je devrai le décomposer selon le caractère de K. Donc cela introduira quelques notations mais ne vous inquiétez pas. Vous pourriez vous restreindre au cas d'un espace de Hilbert qui est un corps de type K.

Je vais maintenant vous donner l'interprétation des zéros et je n'aurai même pas besoin de définir les fonctions zeta en général, ou les L-fonctions. C'est le test pour une interprétation spectrale, vous ne devriez pas avoir à définir les fonctions zeta, vous ne devriez pas avoir besoin de prolonger analytiquement, mais vous devriez être capable de définir les zéros, directement, sans rien faire.

Théorème 1. *Soit E l'application qui est la restriction de $L^2_\delta(X) \to L^2_\delta(G)$ (texte du théorème complété plus bas)*

J'expliquerai pourquoi je dois mettre cette petite décoration δ pour L^2. Ce que je suis en train de dire ici est extrêmement simple : à l'intérieur de X, j'ai le groupe G parce que si je prends un élément de $\mathrm{GL}_1(G)$, si c'est un élément inversible de $\mathbb{A}$, c'est un élément de $\mathbb{A}$, OK ?! Donc à l'intérieur de mon espace X, j'ai un espace beaucoup plus trivial, qui est l'espace G. Donc je considère la restriction de l'application, je définirai le morphisme d'espace plus tard, et je l'appelle E. Qu'est-ce que $L^2_\delta(G)$, c'est la représentation régulière de G, mais je mets un poids, juste pour contrôler l'addivité de Hecke (grösse-additivité), c'est trivial d'un point de vue calculatoire. Maintenant l'assertion présumée est qu'alors, l'espace $\mathcal{H}$, qui est le conoyau de E, est l'espace de Pólya-Hilbert.

Mais pour vous expliquer comment l'espace est l'espace de Hilbert, je dois vous expliquer quel est l'opérateur. Mais qu'avons-nous ? Ce que nous avons, c'est une représentation du groupe G.

Théorème 1. *Soit E l'application restriction de $L^2_\delta(X) \;\to L^2_\delta(G)$ alors l'espace $\mathcal{H}$, qui est le conoyau de E, est l'espace de Pólya-Hilbert, i.e. avec G agissant sur X par W (et sur G lui-même) vous pouvez décomposer $\mathcal{H}$ comme une somme directe*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi,$$

soit

$$D_\chi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{W(e^\epsilon) - W(1)}{\epsilon}.$$

χ est un caractère de K (i.e. est dans $\widehat{K}$), je restreins l'action du groupe G au sous-groupe compact K. Je décompose bien sûr l'action selon les caractères de ce sous-groupe compact. Donc, j'obtiens une somme d'espaces de Hilbert. Sur chacun de ces espaces de Hilbert, développons l'opérateur. U est la représentation dans $L^2_\delta(X)$, V est la représentation dans $L^2_\delta(G)$, et W est la représentation dans le quotient, G agit par W. Cela est clair parce que tout espace est en quelque sorte covariant constructif de telle façon qu'il a une *(mal audible)* représentation.

(réponse à une question) : Le groupe des classes d'idèles a un sous-groupe compact maximal que j'appelle K, c'est tout..

Maintenant laissez-moi écrire une assertion qui est beaucoup plus précise :

(suite du Théorème 1)
Alors le spectre de D_χ est discret, purement imaginaire, (il n'est pas auto-adjoint parce que c'est comme un générateur d'un groupe d'isométrie), et de plus, un élément ρ appartient au spectre de G_χ si et seulement si deux contraintes sont satisfaites (χ est appelé un caractère de Hecke (i.e. grössen-caractère)) :

$$\rho \in \mathrm{Sp}\; D_\chi \iff \begin{cases} (\chi, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \\ \mathfrak{Re}\, \rho = 0 \end{cases}$$

Je n'obtiens pas tous les zéros, j'obtiens seulement ces zéros qui ont la partie réelle correcte. De plus, vous pouvez démontrer a priori (ça n'est pas très difficile à voir)... *(interruption : "Vous pouvez obtenir tous les zéros (mal audible)."* "Oui, mais vous ne pouvez pas prouver cela à cette étape. C'est très important, vous savez. Vous savez, la stratégie complète est de démontrer cela plus tard, mais à cette étape, ce que vous avez, c'est la situation suivante. Vous ne pourriez pas le prouver, ce serait complètement fou, d'espérer cela à cette étape, que vous puissiez obtenir tous les zéros. C'est de la folie. Pourquoi est-ce de la folie ? Parce qu'en quelque sorte, si vous voulez, c'est vrai qu'un opérateur D_χ de cette sorte a un spectre purement imaginaire, c'est comme la formule du rayon du spectre, quand vous appliquez le Frobenius, graduellement, vous rétrécissez le spectre, c'est un peu délicat. Pourtant, il serait fou d'attendre cela, le point est qu'en quelque sorte, si vous voulez, la compréhension de quels zéros vous obtenez découlera, comme dans le cas de Selberg, de la formule de trace. En quelque sorte, c'est comme une histoire de petit epsilon *(mal audible)*. Pourtant, laissez-moi vous dire le fait suivant : même pour la fonction zeta de Riemann, je n'ai pas eu à amener le prolongement analytique, mais seulement à définir la fonction zeta de Riemann ou la L-fonction, je n'ai pas défini le *(Lefschetz ? mal audible)*. Ce que je suis en train de vous raconter, c'est que juste par une histoire très simple, du groupe additif et du groupe multiplicatif, d'un corps global, que j'ai écrit là-haut, sortant de la comparaison entre la multiplication et l'addition, tombent *(mal audible)* les zéros des L-fonctions. Vous n'avez pas eu besoin de définir quoi que ce soit, en quelque sorte le problème se présente comme celui de comprendre la droite. Mais ce n'est pas la droite réelle, c'est la droite adélique. Ce que je suis en train de dire, c'est que si vous essayez de comprendre la droite adélique, vous aurez immédiatement besoin d'un espace comme celui-là pour comprendre les zéros.

Maintenant, comme je l'ai dit, le gros problème est que ok, vous avez les zéros qui sont sur la droite critique mais comment savez-vous que vous les avez tous. Pour faire cela, la chose naturelle à faire... D'abord, je devrais dire pourquoi c'est L^2 et pourquoi ce n'est pas de la quantification. C'est très clair. La raison pour laquelle c'est L^2, c'est parce que l'espace est comme l'espace des feuilles du Lagrangien dans un feuilletage quand vous *(mal audible)* à partir de l'espace propre.

Maintenant, je poursuis et la chose naturelle à faire maintenant est de calculer la trace, notamment, ce qu'on veut, c'est avoir une formule de trace qui calcule la trace suivante d'une intégrale d'une certaine fonction $h(g)$:

$$\text{Trace} \int_{g \in G} h(g) W(g) \, d^*g$$

où d^*g est la mesure de Haar du groupe. G est un groupe localement compact, il a une mesure de Haar et etc, et maintenant, ce que nous voudrions faire, c'est calculer cette trace. Bien sûr, du côté spectral, nous savons ce qu'est cette trace. Elle est juste égale à :

$$\text{Trace} \int_{g \in G} h(g) W(g) \, d^*g = \sum_{\rho} \widehat{h}(\chi, \rho)$$

(ρ, l'indice de la somme satisfait les conditions apparaissant dans le théorème 1 ci-dessus). $\widehat{h}(k)$ est la transformation de Fourier de h évaluée sur un caractère de Hecke (grössen-caractère) χ et sur ρ.

C'est exactement la même chose dans la situation de Selberg, on a d'un côté le côté spectral, le calcul de la trace, mais maintenant, ce que vous voulez, c'est une autre trace. Ici vous avez que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres. Maintenant, ce que vous voulez, c'est une autre formule qui vous dit que la trace de la matrice est donnée par la somme de ses éléments diagonaux. Et c'est exactement où la formule de Lefschetz entre en jeu. Qu'avons-nous ? Nous avons un espace qui est $L^2_\delta(X)$ et nous définissons h comme étant le conoyau. Donc qu'est-ce que cela signifie d'être le conoyau ? Cela signifie que vous aurez comme une séquence exacte :

$$0 \to L^2_\delta(X) \to L^2_\delta(G) \to h \to 0$$

Qu'est-ce que cela nous dit ? Cela dit que si vous voulez calculer la trace ici *(soulignant h)*, vous devriez calculer et avoir que la somme de la trace $L^2_\delta(X)$ et de la trace h est égale à la trace $L^2_\delta(G)$. C'est exactement là que le signe moins intervient bien sûr. Parce qu'au sortir d'une telle formule, vous allez obtenir que la trace sur h est moins la trace sur $L^2_\delta(X)$ plus la trace sur $L^2_\delta(G)$. Mais la trace ici *(soulignant $L^2_\delta(G)$)* est très triviale à calculer parce que c'est la trace de la transformation régulière, qui est proportionnelle à h de 1. Donc il n'y a pas de problème. Donc vous voyez que le problème complet est de comprendre quelle est la trace dans cet espace *(entourant $L^2_\delta(X)$)*.

Quelle est la trace dans cet espace ? Qu'avons-nous ? Nous avons un espace X sur lequel G agit par transformation. Nous voulons calculer la trace d'un groupe de difféomorphismes pour un flot agissant sur cet espace X. Et ce que nous avons pour ça, c'est exactement le groupe de Atiyah et Bott pour une formule de Lefschetz par exemple, dans le cas des variétés, et dans les cas plus élaborés.

Laissez-moi faire quelques rappels : si vous prenez une variété M et φ un difféomorphisme sur la variété (i.e. $M, \varphi \circlearrowleft$). Alors vous pouvez regarder l'opérateur suivant qui est

$$(U\chi)(x) = \xi(\varphi(x)).$$

On peut réécrire cela comme une intégrale :

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)) = \int k(x,y)\xi(y)dy$$

où $k(x,y)$ est juste les coordonnées, c'est la fonction delta $\delta(y - \varphi(x))$. J'ai juste réécrit le noyau.

Que devrait être la trace ? Ça devrait être :

$$\text{"Trace"}(U) = \int k(x,x)\,dx = \int \delta(x - \varphi(x))dx$$

Bien sûr, elle n'existera que sur les points fixes, sinon la fonction zeta s'évanouit. Et près des points fixes, vous pouvez faire un changement de variable, et cela vous donnera que cette intégrale est égale à :

$$\int \delta(x - \varphi(x))dx \;=\; \sum_{\varphi(x)=x} \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}$$

Le dénominateur de la fraction est un déterminant.

Donc en d'autres termes, je n'ai fait rien d'autre que réécrire le fait que la trace d'une matrice d'application est la somme des éléments diagonaux mais comme ces éléments diagonaux sont continus, je dois introduire un facteur transversal qui est là *(montrant la dernière fraction au-dessus).*

Cela s'étend bien sûr immédiatement aux flots. Vous savez, je suppose, comment déduire la formule de Lefschetz de cela : vous écrivez juste la même formule pour l'action sur une forme différentielle et alors, au dénominateur, vous obtenez non pas la valeur absolue du déterminant mais vous obtenez le déterminant.

Donc maintenant, cette formule s'étend aux flots, et qu'est-ce qu'elle vous donne ? Vous prenez un flot maintenant, c'est un petit peu plus compliqué, parce que vous devrez distinguer les orbites périodiques du flot et les zéros du flot. Il y aura deux types de contributions mais la formule sera essentiellement la même. Donc laissez-moi d'abord l'écrire d'une manière fantaisiste et ensuite d'une manière élégante. Donc pour un flot, si vous prenez la trace de l'intégrale de $h(t)U(t)dt$:

$$\text{Trace} \int h(t)U(t)dt$$

(soulignant $U(t)$, ceci est $\xi(f_\sigma(x))$) *(mal audible)* Utilisez une transformation de fonctions qui transforme cela, *(et écrivant devant ce qu'il vient d'écrire)* en $(U_t\xi)(x)$. C'est égal à ça : vous avez un flot F_t, F_t est l'exponentielle du champ de vecteurs (i.e. $F_t = \exp t\nu$). Donc laissez-moi d'abord écrire la formule en termes fantaisistes. Ce que vous aurez, c'est une somme d'orbites périodiques d'abord, il y aura des points fixes donc vous aurez des orbites périodiques, et chacune d'elles contribuera par la somme *(écrivant)* mais maintenant ce sera pour m appartenant à $\mathbb{Z}$:

$$\text{Trace} \int h(t)U(t)dt = \sum_{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{Z}} T^*_\gamma \frac{h(mT^*_\gamma)}{|1 - F_{T/mT^*_\gamma}|} + \sum_{\nu_l = 0} \int \frac{h(u)}{|1 - F^*_u|} du$$

(T_γ^* est la longueur de l'orbite primitive). Ceci est la première contribution et vous avez une autre contribution qui est la somme des zéros du flot et chaque zéro contribue par une intégrale, le dénominateur est l'application tangente du flot.

Bien sûr, je ne veux pas avoir décrit la forme parce que je veux avoir cette formule par ses ingrédients. Quelle est la belle formule ? C'est la suivante, il s'avère que c'est une somme en fait, sur toutes les orbites périodiques, qu'il y ait un point ou une orbite non triviale, et pour chacune d'elles, vous écrivez une intégrale, même pour ça *(pointant la première somme)*, vous écrivez une intégrale. C'est une intégrale sur le groupe isotropique pour tout point dans l'orbite. Donc ce serait *(mal audible)*

$$\begin{aligned}\text{Trace} \int h(t)U(t)dt &= \sum_{\gamma} \sum_{m\in\mathbb{Z}} T_\gamma^* \frac{h(mT_\gamma^*)}{|1-F_{T/mT_\gamma^*}|} + \sum_{\nu_l=0} \int \frac{h(u)}{|1-F_u^*|}du \\ &= \sum_{\text{periodic orbit}} \int_{I_x} \frac{h(u)}{|1-F_u/|}\end{aligned}$$

Bien, d^*u est la mesure de Haar sur l'isotropie, qui est normalisée jusqu'à ce qu'elle ait un covolume 1. Quand vous avez ce premier facteur ici *(soulignant T_γ^* dans la première ligne de la dernière formule ci-dessus)*, cela vous dit que la vraie mesure est la mesure de comptage multipliée par ce facteur. Et ceci a comme covolume 1.

Donc cette formule n'est pas très difficile à prouver, elle est juste spectrale, et ce qui n'est pas difficile à justifier c'est cela, parce que je mets une valeur absolue au dénominateur plutôt que de prendre le déterminant, cette formule continue d'être satisfaite quand vous prenez un corps local, et si vous prenez les adèles, et etc.

Donc ce que je vais écrire maintenant, c'est simplement la même formule pour l'action du groupe G sur cet espace. Et je continue juste et je l'écris. Quand vous calculez les orbites périodiques sur ce flot, et que vous trouvez qu'ils sont paramétrés exactement par des rangs, en fait par ce que les théoriciens des nombres appellent des places, il y a davantage de premiers parce qu'il y a aussi des nombres premiers à l'infini qui sont appelés des places. Donc ce que vous obtenez, c'est une somme, vous avez juste à la calculer, naïvement, et alors vous obtenez les mêmes types de termes que dans la formule précédente, une intégrale, et vous calculez l'isotropie qui correspond à chaque place et vous trouvez que c'est ce qu'on appelle un corps local à la place t, notamment vous prenez le corps K, vous le complétez à la place, et vous obtenez le sous-groupe non trivial qui est contenu comme un sous-groupe du groupe G, cette inclusion est bien connue en théorie des corps de classes, donc vous êtes sur la bonne voie, maintenant ce que vous obtenez, vous obtenez un terme qui est $h(u^{-1})$ (l'inverse de u) sur $|1-u|_v$ (i.e. le module de 1 moins u dans le corps local) et finalement vous avez la mesure de Haar multiplicative d^*u normalisée sur le corps local de telle façon qu'elle ait comme covolume 1. C'est ce que vous obtenez de la trace, par ce calcul.

$$\sum_{v \text{ a place}} \int_{K_t^* \subset G} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_v} d_u^*$$

Maintenant ce que vous faites, c'est que vous ouvrez un livre de théorie des nombres, quels sont les ingrédients d'André Weil, le livre dans lequel il a pris le travail de Riemann et il a essayé de réécrire cette formule explicite très compliquée de Riemann (dans laquelle interviennent des valeurs principales, etc), et il trouve lui-même cette formule *(montrant la dernière formule qu'il a encadrée)*. En d'autres termes, cette formule est calculée par Weil et qu'est-ce que c'est ? À quoi est-elle égale ? Bon, est-elle égale à la suivante ? Weil dit que ceci est égal à la transformation de

Fourier de h en 0 plus la transformation de Fourier de h en 1 moins (et c'est à nouveau notre signe moins) la somme sur les zéros des L-fonctions (l'indice est $L(\chi, \rho) = 0$, *(écrivant le ρ, il dit "et vous la prenez sur un caractère de Hecke (un grössen-caractère)", comme ici, montrant le caractère de Hecke (grössen-caractère) précédent sur un tableau éloigné)* sur la transformation de Fourier de χ et ρ.

$$\sum_{v \text{ a place}} \int_{K_t^* \subset G} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_v} d_u^* = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{L(\chi,\rho)=0} \widehat{h}(\chi, \rho)$$

Maintenant vous regardez en arrière, et il n'est pas difficile de voir (je n'ai pas assez de temps pour définir l'espace $L^2_\delta(X)$ mais c'est très facile de voir que quand vous le définissez, vous devez imposer que la fonction s'évanouit en zéro et que sa transformation de Fourier s'évanouit en zéro, parce que le point 0 et l'espace X sont fixés par l'action du groupe G.

Donc ce que vous trouvez quand vous calculez cette trace... est que si vous pouviez, bon, ceci est vraiment le point principal. Le point principal est le suivant : si l'on peut justifier la formule de trace là-bas (qui a été justement calculée par Lefschetz), alors vous obtenez la chose suivante :

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\chi=0} \widehat{h}(\chi, \rho) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{\chi=0 \\ \mathfrak{Re}(\chi)=\frac{1}{2}}} \widehat{h}(\chi, \rho)$$

(du côté gauche, la somme est calculée sur tous les zéros, du côté droit, seulement sur ceux qui sont sur la droite critique).

Maintenant il est très facile de déduire de cela que la fonction de test lambda h *(mal audible)*. Laissez-moi juste dire une chose. La formule de Weil était très étonnante pour moi la première fois *(? ? mal audible)* et il y a un fait qui est complètement évident sur cette forme. Laissez-moi vous raconter ce que c'est. C'est qu'à chaque fois que la fonction h est positive, au sens naïf, où $h(u)$ est positif pour toute valeur de u, alors cette forme *(la dernière écrite)*, est positive, c'est complètement évident. Donc en quelque sorte, ce que vous savez, c'est que si vous voulez obtenir une formule de trace, cela ne pourrait pas être une formule de trace d'une nature trop compliquée d'un point de vue théorique, parce qu'il n'est pas vrai en général que quand vous prenez la trace d'un opérateur, elle sera positive. *(mal audible)*. C'est seulement vrai à la terminaison du système. Cette formule a été échelonnée pour une interprétation, exactement comme pour le Frobenius, par permutation de l'espace.

Pendant quelques temps, j'ai vraiment essayé de justifier cette formule rigoureusement, il y a des problèmes et l'un d'eux est que vous avez des valeurs principales, exactement comme dans celle de Selberg, et etc. Il y a un très joli fait de Selberg qui est que quand vous calculez les valeurs de la trace de Selberg, vous trouvez exactement les mêmes que dans la formule d'André Weil, et elles font intervenir la constante d'Euler et un $\log(2\pi)$, c'est un scalaire *(mal audible)*. Après un certain temps, j'ai plutôt pensé qu'au lieu d'essayer de justifier sans retard cette formule, peut-être devrais-je plutôt simplement dire la chose suivante : on est exactement dans la même situation que dans le cas des corps finis dans lesquels on a une courbe, et le rôle de cette courbe... vous voyez, la courbe est comme la différence entre G et X. C'est un cercle et quand vous le calculez, vous trouvez exactement les bonnes orbites du Frobenius. On doit remplacer pour le Frobenius, on a une interprétation spectrale, comme la première évolution temporelle, et on a les autres lignes du dictionnaire, par exemple la formule de Lefschetz avec les formules explicites. Il est possible que l'hypothèse de Riemann soit beaucoup plus profonde. Ces éléments sont peut-être seulement les premières lignes de la démonstration, mais ma conviction, et c'est la raison pour laquelle je souhaitais parler dans ce meeting, est la suivante : c'est que je crois que c'est en comprenant de mieux en mieux les aspects dynamiques de cet espace et quelle est la géométrie derrière cet espace que nous serons capables d'imiter exactement ce qu'André Weil a fait dans le cas des courbes et des corps finis, et finalement de rendre l'hypothèse de Riemann évidente, de telle façon qu'elle tombera, comme un fruit mûr. Donc je considère cela comme une ambition extrêmement forte de ne pas se sentir limité, et de borner l'étude à des espaces géométriques classiques, il faut comprendre quelle est la géométrie de l'espace X dans le paradigme non-commutatif.