Traduction des 3 pages constituant le paragraphe 4.2 de l'article d'Alain Connes de septembre 2015 *An essay on the Riemann Hypothesis.*

4.2. Le monde de la caractéristique 1

Les mots clés ici sont : polygones de Newton, thermodynamique, transformée de Legendre, théorie des jeux, optimisation, déquantification, géométrie tropicale.

On modifie l'opération fondamentale d'addition des nombres réels positifs, en remplaçant $x+y$ par $x \vee y := \max(x, y)$. Muni de cette opération d'addition et de la multiplication usuelle, l'ensemble des nombres réels positifs forme un semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$. Il est de caractéristique 1, c'est-à-dire $1 \vee 1 = 1$, et contient le plus petit semi-corps de caractéristique 1, à savoir le semi-corps booléen $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. De plus, $\mathbb{R}_+^{\max}$ admet des automorphismes non triviaux et on a

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}_+^{\max}) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}_+^{\max}) = \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{fr}_\lambda(x) = x^\lambda\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^{\max},\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

Ceci offre un premier aperçu d'une réponse à la question de Weil dans [27] concernant un cadre algébrique dans lequel la composante connexe du groupe des classes d'idèles apparaîtrait comme un groupe de Galois. Plus généralement, pour tout groupe abélien ordonné H, on note $H_{\max} = H \cup \{-\infty\}$ le semi-corps obtenu à partir de H par la construction max-plus, c'est-à-dire que l'addition est donnée par le maximum et la multiplication par $+$. En particulier, $\mathbb{R}_{\max}$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^{\max}$ par l'application exponentielle (cf. [10]). Historiquement, outre les applications de $\mathbb{R}_{\max}$ en analyse idempotente et en géométrie tropicale, abordées ci-dessous, une première utilisation de $\mathbb{R}_{\max}$ remonte à la fin des années 1950, dans les travaux de R. Cuninghame-Green à Birmingham, qui établit la théorie spectrale des matrices irréductibles à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ (cf. [5]). Dans les années 1960, à Leningrad, Vorobyev utilise le formalisme de $\mathbb{R}_{\max}$ dans ses travaux sur l'optimisation combinatoire et démontre un théorème fondamental de recouvrement. Une utilisation systématique de l'algèbre de $\mathbb{R}_{\max}$ est développée par le groupe INRIA au début des années 1980 dans le cadre de leurs travaux sur la modélisation des systèmes d'événements discrets [4]. Pour un historique plus détaillé du sujet et de nombreuses preuves de son importance en mathématiques, voir [10], [11]. Nous nous contenterons ici de donner quelques exemples de ces données, en commençant par une occurrence très ancienne dans l'œuvre de C.G.J. Jacobi (je remercie S. Gaubert de m'avoir signalé cette occurrence), et en espérant convaincre le lecteur qu'il serait erroné de considérer ce formalisme algébrique et son analogie avec l'algèbre ordinaire comme triviaux.

4.2.1. Optimisation, Jacobi

L'un des premiers exemples, vers 1840, de l'utilisation de matrices sur $\mathbb{R}_{\max}$ est le travail de C.G.J. Jacobi [17] sur les problèmes d'affectation optimale, où il déclare

Référence : https://arxiv.org/pdf/1509.05576.
Traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2026.

Problema

Disponantur nn quantifie $h_k^{(i)}$ *quaecunque in schema Quadrati, ita ut habeantur n series horizontales et n series verticales, quarum quaeque est n terminorum. Ex illis quantitatibus eligantur n transversales, i.e. in seriebus horizontalibus simul atque verticalibus diversis positae, quod fieri potest* $n!$ *modis ; ex omnibus illis modis quaerendus est is, qui summam n numerorum electorum suppeditet maximam.*

Autrement dit, étant donné une matrice carrée $m_{ik} = h_k^{(i)}$, on recherche le maximum, pour toutes les permutations σ, de la quantité $\sum m_{j\sigma(j)}$. En utilisant les règles algébriques de $\mathbb{R}_{\max}$, on vérifie qu'on calcule bien l'analogue du déterminant de la matrice m_{ik}. En fait, la définition parfaite du déterminant est plus subtile et a été obtenue dans les travaux de Gondran-Minoux [13], au lieu de $\max \sum m_{j\sigma(j)}$ où σ parcourt toutes les permutations, on utilise la signature des permutations et on considère la paire

$$(\det{}_+(m_{ik}), \det{}_-(m_{ik})), \quad \det{}_\pm(m_{ik}) = \max \sum_{\operatorname{sign}(\sigma)=\pm} m_{j\sigma(j)}$$

Le fait remarquable est que le théorème de Cayley-Hamilton est maintenant valable, comme l'égalité de deux termes $P_+(m) = P_-(m)$ correspondant au polynôme caractéristique $P = (P_+, P_-)$. Chacun des termes $P_\pm(m) \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ est calculé à partir de la matrice originale $m \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ en utilisant les règles des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ qui transforment $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ en un semi-anneau.

4.2.2. Analyse idempotente

L'essence de la théorie de l'analyse semi-classique en physique réside dans la comparaison des systèmes quantiques avec leurs homologues semi-classiques [14], [15], [16], [8], [2]. Dans les années 1980, V. P. Maslov et ses collaborateurs ont développé un cadre algébrique satisfaisant qui formalise la limite semi-classique de la mécanique quantique. Ils l'ont nommé analyse idempotente. Pour une description détaillée, nous renvoyons le lecteur à [18], [19] ; nous n'en mentionnerons ici que quelques points saillants. L'origine des formulations variationnelles de la mécanique à la limite classique réside dans le comportement des sommes d'exponentielles :

$$\sum e^{-\frac{S_j}{\hbar}} \sim e^{-\frac{\inf S_j}{\hbar}}, \quad \text{lorsque} \quad \hbar \to 0$$

qui, lorsque $\hbar \to 0$, sont dominées par la contribution du minimum de S. L'observation initiale est que l'on peut exprimer ce principe fondamental en conjuguant simplement l'addition des nombres par l'opération de puissance $x \mapsto x^\epsilon$ et en passant à la limite lorsque $\epsilon \to 0$. L'ajout des nombres réels positifs est :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(x^{\frac{1}{\epsilon}} + y^{\frac{1}{\epsilon}} \right)^\epsilon = \max\{x, y\} = x \vee y$$

et l'on retrouve $\mathbb{R}_+^{\max}$ comme cadre naturel de l'analyse semi-classique.

Le principe de superposition de la mécanique quantique, c'est-à-dire l'addition de vecteurs dans l'espace de Hilbert, trouve désormais un sens à la limite. De plus, la démonstration du théorème de Perron-Frobenius par l'argument du point fixe s'applique à $\mathbb{R}_+^{\max}$ et montre que les opérateurs compacts irréductibles possèdent une et une unique valeur propre [1], réconciliant ainsi le déterminisme classique avec la variabilité quantique. Mais la découverte la plus marquante de cette école de Maslov, Kolokolstov et Litvinov [18], [19] est que la transformée de Legendre, qui joue un rôle fondamental dans toute la physique et en particulier en thermodynamique au XIXe siècle, n'est autre que la transformée de Fourier dans le cadre de l'analyse idempotente !

Le contact entre l'école de l'INRIA et l'école de Maslov s'est établi en 1992, lorsque Maslov a été invité au séminaire Jacques-Louis Lions du Collège de France. Lors de l'atelier BRIMS HP-Labs sur l'idempotence à Bristol (1994), organisé par J. Gunawardena, plusieurs des pionniers du domaine étaient présents et une discussion animée s'est tenue sur la dénomination à adopter.

Les termes "max-plus", "exotique", "tropical" et "idempotent" ont été envisagés, chacun ayant ses défauts.

4.2.3. Géométrie tropicale, théorèmes de Riemann-Roch et jeu du tir de jetons

Le semi-anneau tropical $\mathbb{N}_{\min} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni des opérations min et $+$ a été introduit par Imre Simon dans [24] pour résoudre un problème de décidabilité en théorie des langages rationnels. Ses travaux sont à l'origine du terme "tropical" utilisé en géométrie tropicale, un vaste domaine (voir par exemple [12], [7], [21], [20]). On se réfère à Virotagaki pour une excellente introduction, démarrant au seizième problème de Hilbert. Sous sa forme la plus simple (cf. [9]), une courbe tropicale est donnée par un graphe métrique Γ (c'est-à-dire un graphe muni d'une métrique sur ses arêtes). Le faisceau structural naturel sur Γ est le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions à valeurs réelles continues, convexes, affines par morceaux et à pentes entières. Les opérations sur ces fonctions sont données par les opérations ponctuelles des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$, c'est-à-dire $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ pour tout $x \in \Gamma$, et de même pour le produit, qui est donné par l'addition ponctuelle. On ajoute également la constante $-\infty$ qui joue le rôle de l'élément nul dans les semi-anneaux de sections. On procède comme dans le cas classique par la construction du faisceau $\mathcal{K}$ de semi-corps de quotients et l'on retrouve le même type de fonctions que précédemment, mais non plus convexes. Les diviseurs de Cartier ont un sens et l'on constate que l'ordre d'une section f de $\mathcal{K}$ en un point $x \in \Gamma$ est donné par la somme des pentes sortantes (entières). L'explication conceptuelle de la raison pour laquelle les discontinuités de la dérivée doivent être interprétées comme des zéros ou des pôles est due à Viro, [26], qui a montré que cela découle automatiquement si l'on comprend que, comme on le voit lorsqu'on utilise $\mathbb{R}_{\max}$ comme cible d'une valuation, la somme $x \vee x$ de deux termes égaux dans $\mathbb{R}_{\max}$ doit être considérée comme ambiguë, prenant toutes les valeurs dans l'intervalle $[-\infty, x]$ sur un pied d'égalité. Dans leurs travaux, Baker et Norine [1] ont démontré, dans le cadre discret des graphes (où g est le genre et K le diviseur canonique), l'égalité de Riemann-Roch sous la forme suivante :

$$r(D) - r(K - D) = \mathrm{Deg}(D) - g + 1 \tag{1}$$

où, par définition, $r(D) := \max\{k \mid H^0(D - \tau) \neq \{-\infty\}, \quad \forall \tau \geq 0,\ \mathrm{Deg}(\tau) = k\}$ et $H^0(D)$ est le $\mathbb{R}_{\max}$-module des sections globales f du faisceau associé $\mathcal{O}_D$, i.e. les sections de $\mathcal{K}$ telles que $D + (f) \geq 0$.

1. comme mentionné précédemment, ce résultat avait déjà été obtenu pour les matrices en 1962 par R. Cuninghame-Green.

L'essence de la démonstration de [1] est que l'inégalité $\mathrm{Deg}(D) \geq g$ pour un diviseur implique $H^0(D) \neq \{-\infty\}$. Une fois traduit dans le langage du jeu de tir de jetons (op. cit.), ce fait équivaut à l'existence d'une stratégie gagnante si l'on suppose que la somme totale de dollars attribuée aux sommets du graphe est supérieure ou égale à g, où g est le genre. On se réfère à [9], [22] pour des variantes du théorème de Riemann-Roch ci-dessus, et à [6], Shor, [23] pour des occurrences précoces de ces idées dans un contexte différent (notamment les modèles de tas de sable et les fonctions de stationnement !).

Références

[1] M. Baker, S. Norine, *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*, Advances in Mathematics 215 (2007), 766–788.

[2] M. Berry, *Riemann's zeta function : a model of quantum chaos*, Lecture Notes in Physics, Vol.263, Springer-Verlag, 1986.

[3] A. Bjorner, L. Lovasz, P. W. Shor, *Chip-firing games on graphs*, European J. Combin., 12(4), (1991), 283–291.

[4] G. Cohen, S. Gaubert, R. Nikoukhah, J.P. Quadrat, *Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs*, Decision and Control, 1989, Proceedings of the 28th IEEE Conference.

[5] R. Cuninghame-Green, *Minimax algebra*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Volume 166, Springer, 1979.

[6] D. Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*. Phys. Rev. Lett., 64(14) :1613–1616, Apr 1990.

[7] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind, *Non-Archimedean amoebas and tropical varieties*. (English summary) J. Reine Angew. Math. 601 (2006), 139–157.

[8] M. V. Fedoriuk, V. P. Maslov, *Semiclassical approximation in quantum mechanics*. Translated from the Russian by J. Niederle and J. Tolar. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 7. Contemporary Mathematics, 5. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass., 1981.

[9] A. Gathmann and M. Kerber, *A Riemann-Roch theorem in tropical geometry*. Math. Z., 259(1) :217–230, 2008.

[10] S. Gaubert, *Methods and applications of (max, +) linear algebra*, STACS 97 (Lubek), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 1200, Springer, Berlin, (1997), 261–282.

[11] S. Gaubert, *Two lectures on the max-plus algebra*. Proceedings of the 26th Spring School of Theoretical Computer Science, (1998), 83–147.

[12] I. Gelfand, M. Kapranov, A Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory and Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[13] M. Gondran, M. Minoux, *L'indépendance linéaire dans les dioides*. (French) Bull. Direction Etudes Rech. Sér. C Math. Inform. 1978, no. 1, 67–90.

[14] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Math. Surveys Vol. 14, American Mathematical Society, 1977.

[15] M. Gutzwiller, *Classical Quantization of a Hamiltonian with Ergodic Behavior*, Physical Review Letters 45 (1980) 150-153.

[16] M. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Interdisciplinary Applied Mathematics, 1. Springer-Verlag, New York, 1990.

[17] C.G.J. Jacobi, *De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque* C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, funfter Band, herausgegeben von K. Weierstrass, Berlin, Bruck und Verlag von Georg Reimer, 1890, p. 193-216.

[18] V. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent analysis and its applications.* Mathematics and its Applications, 401. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[19] G. Litvinov, *Tropical Mathematics, Idempotent Analysis, Classical Mechanics and Geometry.* Spectral theory and geometric analysis, 159–186, Contemp. Math., 535, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[20] D Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry.* Graduate Studies in Mathematics, 161. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[21] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313–377.

[22] G. Mikhalkin and I. Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions.* In Curves and abelian varieties, volume 465 of Contemp. Math., p 203–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[23] A. Postnikov and B. Shapiro, *Trees, parking functions, syzygies, and deformations of monomial ideals.* Trans. Amer. Math. Soc., 356(8) :3109–3142 (electronic), 2004.

[24] I. Simon, *Limited subsets of the free monoid.* Proc. of the 19-th Annual Symposium on computer Science (1978), 143–150.

[25] O. Viro, *From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry.* Jpn. J. Math. 3 (2008), no. 2, 185–214.

[26] O. Viro, *On basic concepts of tropical geometry.* (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 273 (2011), Sovremennye Problemy Matematiki, 271–303 ; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 273 (2011), no. 1, 252–282

[27] A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes* J. math. Soc. Japan, t. 3, 1951, p. 1-35.