

Traduction d'un extrait des Notices de l'AMS, Issue 220, volume 29, n° 6, p. 499-501.

Courte biographie d'Alain Connes précédant la description de ses travaux (Alain Connes a été récipiendaire, avec William P. Thurston et Shing-Tung Yau de la médaille Fields en 1982 (le Congrès international des mathématiciens, où ont eu lieu les remises de médailles, s'est tenu en 1983 à Varsovie, en Pologne).

Alain Connes est né le 1er avril 1947 à Darguignan. En juin 1973, il obtient un doctorat d'État de l'Université Paris VI pour une thèse réalisée sous la direction de Jacques Dixmier. De 1970 à 1974, il est rattaché au Centre national de la recherche scientifique (CNRS), puis à l'Université Queen's (Ontario, Canada) de 1974 à 1975. De 1975 à 1977, il est professeur à l'Université Paris VI. En 1978-1979, il est chercheur invité à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Depuis 1979, il est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette.

En 1975, il reçoit le prix Aimé Berthé, en 1976 le prix Peccot-Vimont, en 1977 la médaille d'argent du CNRS, en 1980 le prix Ampère et en 1981 le prix d'Électricité de France. En 1980, il est élu membre correspondant de l'Académie des sciences. En 1982, avec André Weil, il est le seul mathématicien élu membre titulaire de l'Académie, portant ainsi à treize le nombre de mathématiciens titulaires.

Le travail d'Alain Connes Calvin C. Moore

Pour situer dans leur contexte les contributions fondamentales et pionnières d'Alain Connes au domaine des algèbres d'opérateurs, rappelons que von Neumann et Murray, dans les années 1930 et 1940, ont été amenés, entre autres, par la théorie spectrale des opérateurs sur l'espace de Hilbert et par des considérations de construction de modèles mathématiques pour les systèmes de mécanique quantique, à introduire ce qu'ils appelaient des anneaux d'opérateurs, depuis renommés algèbres de von Neumann.

Ce sont des algèbres auto-adjointes faiblement fermées d'opérateurs sur un espace de Hilbert, contenant l'opérateur identité. L'un des principaux problèmes a été, et demeure, la classification de ces algèbres comme objets algébriques et topologiques intrinsèques. On peut aisément ramener ce problème à l'étude des algèbres quotients – celles à centre unidimensionnel, ou, de manière équivalente, celles qui sont simples dans un sens bien défini.

Dans leurs articles originaux, von Neumann et Murray ont introduit une classification par types : les algèbres de type I sont celles qui possèdent une théorie de structure de type Wedderburn et constituent les exemples "attendus" ; par exemple, les seuls facteurs de ce type appartiennent à $B(H)$, l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Les algèbres de types II et III semblaient plus exotiques et mystérieuses ; par exemple, on peut avoir des familles de projections dans un facteur de type II dont les "dimensions" généralisées remplissent un intervalle.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla (traduction Google translate corrigée).

Les algèbres de type II (et I) sont celles qui possèdent des formes linéaires munies des propriétés formelles d'une trace. Les facteurs de type II sont soit finis, appelés facteurs II_1 (leur trace est définie partout), soit infinis, appelés facteurs II_∞ , ceux dont la trace est définie uniquement de manière dense. Les facteurs de type III, dépourvus d'une telle trace, semblaient particulièrement difficiles à classifier : lors d'une première tentative, von Neumann et Murray ont introduit la notion d'algèbres hyperfinies, aujourd'hui appelées algèbres approximativement finies. Ce sont les algèbres qui peuvent être approchées par des algèbres de dimension finie, en ce sens qu'elles constituent la clôture faible d'une chaîne ascendante d'algèbres de dimension finie. Cette classe d'algèbres de von Neumann s'avère d'une importance exceptionnelle, tant pour des raisons intrinsèques au sujet que pour ses applications.

La thèse de Connes [1] constituait déjà une avancée majeure et remarquable dans le problème de la classification. S'appuyant sur les travaux de Powers, Araki et Woods, et Krieger, Connes a introduit son invariant S pour les facteurs, un sous-ensemble de $[0, \infty]$. Ceci permet une subdivision des algèbres de type III en sous-classes de type III_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, et a apporté une perspective structurelle importante. Il a également montré comment obtenir ces algèbres pour $\lambda \neq 1$ à partir des algèbres de type II et de leurs automorphismes. Takesaki, utilisant des produits croisés plus généraux, a ensuite démontré ce résultat dans tous les cas. Dans tous ces travaux, un outil absolument essentiel, sans lequel il est impossible de commencer, est la théorie de Tomita-Takesaki des automorphismes modulaires. L'une des conséquences du résultat de Connes est que la classification en général se ramène à la classification des algèbres de type II et de leurs automorphismes (externes). Connes a également réalisé qu'une algèbre de type III est approximativement finie si et seulement si l'algèbre de type II à partir de laquelle elle est construite est approximativement finie.

L'un des premiers résultats de von Neumann et Murray fut que, à isomorphisme près, il existe une et une seule algèbre approximativement finie de type II_1 . Connes entreprit alors, dans [2], une étude approfondie des automorphismes extérieurs de cette algèbre et du facteur II_∞ associé des matrices infinies sur celle-ci. Le résultat remarquable est que, à conjugaison près, il existe très peu de tels automorphismes. Ces résultats établis, un point crucial subsistait pour la classification des facteurs approximativement finis : l'algèbre des matrices sur l'unique algèbre approximativement finie de type II_1 est-elle le seul facteur approximativement fini ? Ce problème, en apparence simple, s'avère extrêmement difficile, et les travaux de Connes dans ce domaine aboutirent à sa résolution affirmative dans [3]. Ce faisant, il établit de nombreux autres résultats, notamment l'équivalence de plusieurs conditions importantes, dont l'injectivité, avec la finitude approximative, et aboutit bien sûr à la classification complète de tous les facteurs approximativement finis, à l'exception de ceux de type III_1 . On conjecture, sans la démontrer, qu'il n'existe qu'une seule algèbre de ce type. Une formulation élégante de cette classification, issue de la combinaison de ce travail avec celui de Krieger, établit une correspondance biunivoque entre les facteurs infinis approximativement finis et les flots ergodiques à conjugaison près (le flot des poids du facteur), et par conséquent, entre les transformations ergodiques à équivalence d'orbite près. Cette classification, d'une grande simplicité et d'une grande élégance, paraissait à peine envisageable il y a dix ans.

Depuis la fin de ces travaux, Connes s'est consacré à l'étude très fructueuse des liens entre les algèbres d'opérateurs, les feuilletages et les théorèmes d'indice. À une variété feuilletée compacte, munie d'une mesure transverse, est associée une algèbre de von Neumann naturelle. Connes montre

que le noyau et le conoyau d'un opérateur différentiel tangent aux feuilles du feuilletage, et tangentielllement elliptique au sens évident, peuvent être vus comme des projections dans cette algèbre de von Neumann. Si l'on suppose de plus que la mesure transverse est invariante, on obtient une trace sur cette algèbre, la rendant de type II (ou de type I dans les cas dégénérés). En particulier, il existe alors un indice numérique, et Connes obtient dans [4] une formule d'une simplicité remarquable pour cet indice, en fonction de données topologiques issues du symbole, en parfaite analogie avec le théorème d'Atiyah-Singer. Connes a récemment annoncé dans [5] une version beaucoup plus générale et puissante du théorème, libérée des hypothèses sur les mesures transversales invariantes et formulée, comme il se doit, en termes de l'algèbre C^* associée au feuilletage et à sa K -théorie.

L'ensemble des travaux de Connes sur les algèbres d'opérateurs et leurs applications, menés au cours de la dernière décennie, a transformé le domaine et ouvert de nouveaux champs de recherche. Dans cet article, nous n'avons abordé que quelques-unes des contributions majeures qu'il a apportées.

Références

- [1] *Une classification des facteurs de type III*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) 6 (1973), 133-152.
- [2] *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) 8 (1975), 383-419.
- [3] *Classification of injective factors, cases II_1 , II_∞ , III_λ , $\lambda \neq 1$* , Annals of Mathematics (2) 104 (1976), 73-115.
- [4] *Sur la théorie non-commutative de l'intégration*. Lecture Notes in Mathematics 725 (1979), 19-143 (Springer-Verlag).
- [5] *Théorème de l'indice pour les feuilletages* (avec G. Skandalis), Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique. (Paris) 292 (18 May 1981), 871-876.