

Propriété T pour les algèbres de von Neumann

A. Connes et V. Jones

1. Introduction

La propriété T de Kazhdan pour les groupes [11] a d'abord été utilisée dans les algèbres de von Neumann dans [3], où il a été montré que si Γ est un groupe discret dénombrable ayant la propriété T (avec des classes de conjugaison infinies), le groupe fondamental de l'algèbre de von Neumann de Γ est dénombrable. Dans [4], le premier auteur définit une propriété T pour les facteurs de type II_1 et affirme qu'un groupe discret Γ a la propriété T si et seulement si son algèbre de von Neumann a cette propriété. Le problème de rigidité est posé et quelques résultats sont mentionnés.

Dans cet article, nous définissons la propriété T d'une manière qui a un sens pour toute algèbre de von Neumann et qui rend claire l'analogie avec la propriété de Kazhdan. Le concept clé est celui de correspondance, qui joue le rôle d'une représentation d'un groupe. Alors que la théorie des représentations d'un facteur de type II_1 est simple (juste la constante de couplage), la structure de ses correspondances est très riche. Il y a les notions de correspondance triviale et de coefficients, ces derniers permettant de topologiser l'espace des correspondances. La propriété T signifie que la correspondance triviale est isolée de celles qui ne la contiennent pas. Pour les facteurs de type II_1 , la propriété est la même que celle de [4], mais tout facteur de type I a la propriété T.

Nous montrons que les facteurs de type II_1 ayant la propriété T ne sont pas moyennables en un sens fort : l'identité n'est jamais la limite d'une suite d'applications complètement positives, compactes, décroissantes pour la trace. D'après le résultat de U. Haagerup dans [7], cela montre qu'un tel facteur ne peut jamais être plongé dans l'algèbre de von Neumann d'un groupe libre.

Comme application de ce résultat, nous donnons une solution à un problème posé par C. Sutherland dans [16]. Si Q est un groupe (discret dénombrable) et M est un facteur, un Q -noyau est un homomorphisme $\theta : Q \rightarrow \text{Ext } M$ ($= \text{Aut } M / \text{Int } M$). Dans [13], M. Nakamura et Z. Takeda montrent comment associer une classe de cohomologie $\text{Ob}(\theta) \in H^3(Q, \pi)$ qui est une obstruction à l'existence d'un relèvement $\hat{\theta} : Q \rightarrow \text{Aut } M$. Dans [16], Sutherland montre que si Q est fini ou si M est infini, alors $\text{Ob}(\theta)$ est la seule obstruction. Dans [15], A. Ocneanu montre que si Q et

Référence : Classification des facteurs, Alain Connes, Operator algebras and applications, Part 2, Kingston, Ont., 1980, vol. 38, p. 43–109, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

Transcription en $\text{\LaTeX}$ et traduction : Denise Vella-Chemla pilotant deepseek.

<https://denisevellachemla.eu/AC-biblio63.pdf>.

M sont moyennables, alors $\text{Ob}(\theta)$ est la seule obstruction. Nous montrons que si Γ est un groupe discret infini quelconque ayant la propriété T et M est l'algèbre de von Neumann du groupe libre à une infinité de générateurs, il existe un $\theta : \Gamma \rightarrow \text{Ext } M$ avec $\text{Ob}(\theta) = 0$ mais aucun relèvement $\hat{\theta} : \Gamma \rightarrow \text{Aut } M$. Cela résout aussi certains problèmes apparentés que nous mentionnons. Les problèmes restent ouverts pour des Γ plus généraux, par exemple $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2. Propriété T

Soient M et N des algèbres de von Neumann. Par une correspondance de M vers N , nous entendons un espace de Hilbert H qui est un M -module à gauche et un N -module à droite, avec des actions normales qui commutent. Ainsi $a\xi b$ a un sens pour $a \in M$, $b \in N$ et $\xi \in H$.

Nous définissons une base de voisinages d'une correspondance donnée H comme suit : étant donné $\epsilon > 0$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$, $x_1, \dots, x_p \in M$ et $y_1, \dots, y_q \in N$, soit $U(\epsilon, \xi_i, x_j, y_k)$ l'ensemble des correspondances H' de M vers N telles qu'il existe $\eta_1, \dots, \eta_n \in H'$ avec $|\langle x_j \eta_i y_k \cdot \eta_i \rangle - \langle x_j \xi_i y_k \cdot \xi_i \rangle| < \epsilon$ pour tous i, j, k . Les ensembles U forment la base d'une topologie sur tout ensemble de correspondances. Les fonctionnelles bilinéaires de la forme $x \otimes y \rightarrow \langle x\xi y, \eta \rangle$ sont appelées les coefficients de la correspondance. Les coefficients de la forme $\langle x\xi y, \xi \rangle$ définissent des fonctionnelles linéaires positives sur le produit tensoriel algébrique $M \otimes N^{\text{opp}}$.

Pour toute algèbre de von Neumann M , la représentation standard [6] est par construction un espace de Hilbert qui est un M -bimodule. Nous l'appellerons la correspondance identité de M vers M .

Nous dirons que M a la propriété T s'il existe un voisinage U de la correspondance identité id_M tel que toute correspondance dans U contienne id_M comme facteur direct.

Pour voir la signification de cette notion, supposons que M est un facteur de type II_1 . Alors dans la représentation standard il existe un vecteur $\xi_0 \in H$ avec $x\xi_0 = \xi_0 x$ pour tout $x \in M$, $\|\xi_0\| = 1$. Réciproquement, si H est une correspondance de M vers M et $\xi_0 \in H$, $\|\xi_0\| = 1$, est un vecteur central (c'est-à-dire $\xi_0 x = x\xi_0$ pour tout $x \in M$), on a $\langle xy\xi_0, \xi_0 \rangle = \langle x\xi_0 y, \xi_0 \rangle = \langle x\xi_0, \xi_0 y^* \rangle = \langle yx\xi_0, \xi_0 \rangle$, de sorte que $\langle x\xi_0, \xi_0 \rangle$ est la trace normalisée $\text{Tr}_M(x)$. Le sous-espace fermé $\overline{M\xi_0}$ est un facteur direct de H isomorphe à id_M . Ainsi H contient un vecteur central si et seulement s'il contient id_M . De plus, si $\xi \in H$, $\|x\xi - \xi x\|$ peut être contrôlé par les coefficients, et comme le noyau de Tr_M est l'enveloppe linéaire des commutateurs [5], la "distance" de la fonctionnelle linéaire $\langle x\xi, \xi \rangle$ à la trace peut être contrôlée par des expressions de la forme $\|x\xi - \xi x\|$. Avec ces commentaires, c'est un exercice simple de montrer que M a la propriété T si et seulement si on peut trouver $\epsilon > 0$, $x_1, \dots, x_n \in M$ tels que "Pour toute correspondance H de M vers M et tout vecteur $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$ avec $\|x_i \xi - \xi x_i\| < \epsilon$, il existe $\eta \in H$, $\eta \neq 0$ qui est central : $x\eta = \eta x$ pour tout $x \in M$."

Le résultat suivant nous permet de contrôler la distance d'un vecteur presque central aux vecteurs centraux.

Proposition 1. *Si M est un facteur de type II_1 ayant la propriété T, alors $\text{Int } M$ est ouvert et il existe $\epsilon > 0$, $y_1, \dots, y_m \in M$, $K > 0$ tels que pour tout $\delta \leq \epsilon$ et toute correspondance H de M vers M avec un vecteur $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$, $\|y_i \xi - \xi y_i\| < \delta$, il existe un vecteur central η avec $\|\eta - \xi\| < K\delta$.*

Démonstration. La preuve que $\text{Int } M$ est ouvert est exactement comme dans [3]. Ainsi $\text{Int } M$ est fermé et, par la caractérisation des facteurs III_1 pleins dans [2], il existe un ensemble fini $u_1, u_2 \dots u_p$ d'éléments unitaires dans M et $c > 0$ tel que $\|\xi\|^2 < c \sum \|u_i \xi - \xi u_i\|^2$ pour $\xi \in L^2(M)$, $\text{tr}(\xi) = 0$. La même inégalité vaut si M agit sur une somme directe de copies de $L^2(M)$ (et tr est remplacé par la projection sur les vecteurs centraux).

Soient $\epsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_n$ comme dans la reformulation de la propriété T ci-dessus. Soit $\{y_i\} = \{x_j\} \cup \{u_k\}$. Soit H une correspondance arbitraire et soit $\xi \in H$, $\|\xi\| \leq 1$ satisfaisant $\|y_i \xi - \xi y_i\| \leq \delta < \epsilon$. Décomposons H en $H = H_1 \oplus H_2$ avec H_1 un multiple de id_M et H_2 ne contenant aucun vecteur central. Si $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, $\|\xi_2\| \leq \delta/\epsilon$. Écrivons $\xi_1 = \xi'_1 + \xi''_1$ avec ξ''_1 orthogonal aux vecteurs centraux et ξ'_1 central. Alors $\|\xi''_1\|^2 \leq pc\delta^2$. Au total

$$\|\xi - \xi'_1\|^2 = \|\xi''_1 + \xi_2\|^2 < ((1/\epsilon)^2 + pc)\delta^2.$$

□

Soit maintenant Γ un groupe discret et $\mu : \Gamma \times \Gamma \rightarrow T$ un 2-cocycle (normalisé). La représentation μ -régulière gauche de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$ est définie par

$$(\lambda_\mu(g)f)(h) = \mu(h^{-1}, g)f(g^{-1}h).$$

Alors $\lambda_\mu(g)\lambda_\mu(h) = \mu(g, h)\lambda_\mu(gh)$. Cette représentation projective est déterminée, à équivalence unitaire près, par la classe de cohomologie de μ et elle a la propriété que si $g \mapsto u_g$ est une représentation unitaire quelconque de Γ , alors $g \mapsto \lambda_\mu(g) \otimes u_g$ est une représentation projective équivalente à une somme directe de copies de λ_μ . On peut supposer $\mu(g, g^{-1}) = 1$ pour tout $g \in G$. Alors si $Jf(g) = f(g^{-1})$, $\ell^2(\Gamma)$ est une correspondance avec $x\xi y = xJy^*J\xi$.

Théorème 2. *Soit Γ un groupe discret dénombrable. Supposons que $\lambda_\mu(\Gamma)''$ soit un facteur. Alors $\lambda_\mu(\Gamma)''$ a la propriété T si et seulement si Γ a la propriété T de Kazhdan.*

Démonstration. Supposons d'abord que Γ a la propriété T et que Γ est une correspondance. Alors si $\pi(g)\xi = \lambda_\mu(g)\xi\lambda_\mu(g)^{-1}$, π est une représentation unitaire. Si ξ' est un vecteur presque central dans H , il est presque fixé par π , donc par la propriété de Kazhdan il existe un vecteur fixe ξ pour π . Comme les $\lambda_\mu(g)$ engendrent $\lambda_\mu(\Gamma)''$, $x\xi = \xi x$ pour tout $x \in \lambda_\mu(\Gamma)''$.

Supposons maintenant que $\lambda_\mu(\Gamma)''$ a la propriété T. Nous utiliserons l'action duale de $\mathbf{Rep}(\Gamma)$ pour associer des correspondances aux représentations de Γ . Soient $y_1, \dots, y_n \in \lambda_\mu(\Gamma)''$ et ϵ comme dans la proposition 1. Nous pouvons supposer $\|y_i\|_2 = 1$ pour chaque i . Écrivons $y_i = \sum_{g \in \Gamma} c_g^i \lambda_\mu(g)$, et soit F un sous-ensemble fini de Γ tel que $\sum_{g \notin F} |c_g^i|^2 < \delta^2$. Soit $g \mapsto \pi(g)$ une représentation unitaire de Γ sur H et supposons qu'il existe $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$ avec $\|\pi(f)\xi - \xi\| < \delta$ pour tout $f \in F$. Définissons alors la correspondance $\lambda_\mu(\Gamma)'' - \lambda_\mu(\Gamma)'' \ell^2(\Gamma) \otimes H$ par

$$\lambda_\mu(g_1)\xi\lambda_\mu(g_2) = (\lambda_\mu(g_1) \otimes \pi(g_1))\xi(\lambda_\mu(g_2) \otimes \text{id}).$$

Alors si $\xi \in \ell^2(\Gamma, H)$ est défini par

$$\widehat{\xi}(g) = \begin{cases} \xi & \text{if } g = e \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

nous avons

$$\|y_i\xi - \xi y_i\|^2 = \sum_{g \in \Gamma} |c_g^i|^2 \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 \leq 4\delta^2 + \sum_{f \in F} |c_f^i|^2 \|\pi(f)\xi - \xi\|^2 \leq 5\delta^2.$$

Donc pour δ petit, nous pouvons supposer qu'il existe un vecteur central $\hat{\eta} \in \ell^2(\Gamma) \otimes H$ avec $\|\hat{\eta} - \xi\| \leq \sqrt{5}K\delta$. En considérant $\hat{\eta}$ comme une fonction de Γ vers H , nous concluons que pour δ suffisamment petit, $\eta = \hat{\eta}(e) \neq 0$. Mais comme $\hat{\eta}$ est central, η est un vecteur fixe pour π . Ainsi Γ a la propriété T de Kazhdan.

□

Remarque : en poursuivant l'analogie entre correspondances et représentations de groupes, on vérifie facilement la caractérisation suivante des facteurs moyennables : M est moyennable si et seulement si la correspondance identité est faiblement contenue dans la correspondance régulière. (Ici la correspondance régulière désigne celle provenant de l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur la correspondance identité.)

Nous allons maintenant montrer une forte non-moyennabilité d'un facteur de type II_1 ayant la propriété T. Cela implique qu'il n'est contenu dans l'algèbre de von Neumann d'aucun groupe libre.

Théorème 3. *Soit M un facteur de type II_1 ayant la propriété T. Alors il n'existe pas de suite Ψ_n d'applications complètement positives avec $\Psi_n(1) \leq 1$, $\text{tr} \circ \Psi_n \leq \text{tr}$, $\Psi_n(x) \rightarrow x$ (dans L^2) pour tout $x \in M$, telle que Ψ_n soit un opérateur compact dans $L^2(M)$.*

Démonstration. Par interpolation (voir [14]) Ψ_n définit une contraction dans tout espace $L^p(M)$ pour $p \in [1, \infty]$. (Nous n'avons besoin que de $p = 2$ et 4 et un argument simple permet d'éviter l'interpolation.) Soit H_n l'espace de Hilbert associé à $M \otimes M^{\text{opp}}$ (produit tensoriel algébrique) et à la forme sesquilinéaire positive $\langle a \otimes b, c \otimes d \rangle = \text{Tr}(\Psi_n(ac^*)bd^*)$. En faisant agir M à gauche et à droite de la manière évidente, H_n devient une correspondance de M vers M et $\xi_n = 1 \otimes 1 \in H_n$ a la propriété que

$$\langle x\xi_n y, \xi_n \rangle = \text{tr}(\Psi_n(x)y) \quad x, y \in M.$$

Comme M a la propriété T, il existe par la proposition 1 une suite de vecteurs $\eta_n \in H_n$, $\|\eta_n - \xi_n\| \rightarrow 0$ avec $\eta_n x = x\eta_n$ pour tout $x \in M$. Pour simplifier la notation, supposons $\Psi_n(1) = 1$, $\|\xi_n\| = 1$, et $\|\eta_n\| = 1$.

Estimons $\|x\xi_n - x\eta_n\|$ pour tout $x \in M$. Nous avons

$$\langle x\xi_n, x\xi_n \rangle = \text{tr}(\Psi_n(x^*x)) \leq \langle x\eta_n, x\eta_n \rangle$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|x\xi_n - x\eta_n\|^2 &\leq 2\langle x\eta_n, x\eta_n \rangle - 2\text{Re}\langle x\xi_n, x\eta_n \rangle \\ &= 2\text{Re}\langle \eta_n - \xi_n, x^*x\eta_n \rangle \leq 2\|\eta_n - \xi_n\|\|x\|_4^2, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_4$ est la norme dans $L^4(M)$. Ainsi $\|x\xi_n - x\eta_n\| \leq \sqrt{2}\|\eta_n - \xi_n\|^{\frac{1}{2}}\|x\|_4$. De même $\|\xi_n y - \eta_n y\| \leq \sqrt{2}\|\eta_n - \xi_n\|^{\frac{1}{2}}\|y\|_4$ et $\|\Psi_n(x)\xi_n\| \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_4$. Donc

$$\begin{aligned} |\text{tr}(\Psi_n(x)y) - \text{tr}(xy)| &\leq |\langle \Psi_n(x)\xi_n, (\xi_n - \eta_n)y^* \rangle| + |\langle \Psi_n(x)(\xi_n - \eta_n), \eta_n y^* \rangle| \\ &\leq 2\sqrt{2}\|\eta_n - \xi_n\|^{\frac{1}{2}}\|x\|_4\|y\|_4. \end{aligned}$$

Cela montre que pour tout $\epsilon > 0$, $\|\Psi_n(x) - x\|_2 < \epsilon\|x\|_4$ pour n grand (rappelons que $\|\Psi_n(x)\|_4 \leq \|x\|_4$).

Soit maintenant $A = L^\infty((\mathbb{Z}_2)^N)$ une sous-algèbre abélienne maximale de M , où $\mathbb{Z}_2^N$ est muni de la mesure produit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sur l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}$ des fonctions

$$\chi_i(x) = (-1)^{x_i} \quad (x = (x_i) \in (\mathbb{Z}_2)^N)$$

l'inégalité de Khintchine [12] montre précisément qu'il existe $C > 0$ tel que $\|\xi\|_4 \leq C\|\xi\|_2$ pour tout $\xi \in \mathcal{L}$ (en fait on peut choisir $C = 3^{\frac{1}{2}}$ d'après [8]). Ainsi pour n grand et tout $\xi \in \mathcal{L} \subseteq L^2(M)$ nous avons $\|\Psi_n(\xi) - \xi\|_2 \leq \frac{1}{2}\|\xi\|_2$, ce qui contredit la compacité de Ψ_n . $\square$

Corollaire 4. *Soit M un facteur de type II_1 ayant la propriété T . Alors M n'est pas un sous-facteur de $\lambda(F_n)''$, où F_n est le groupe libre à n générateurs.*

Démonstration. Dans [7], Haagerup montre que pour $\mu > 0$ la fonction $\phi(w) = e^{-\mu \text{length}(w)}$ est une fonction définie positive sur F_n . Il montre aussi que l'application $M_\phi(\lambda(s)) = \phi(s)\lambda(s)$ s'étend en une application complètement positive $M_\phi : C_1^*(F_n) \rightarrow C_1^*(F_n)$. Mais sa preuve montre que M_ϕ s'étend en une application complètement positive de $\lambda(F_n)'' \rightarrow \lambda(F_n)''$ qui est clairement compacte sur $\ell^2(F_n) = L^2(\lambda(F_n)'')$. Lorsque $\mu \rightarrow 0$, $M_\phi \rightarrow \text{id}$ dans $\|\cdot\|_2$, et aussi $\text{tr} \circ M_\phi = \text{tr}$. Si M était contenu dans $\lambda(F_n)''$, alors en composant M_ϕ avec l'espérance conditionnelle sur M on obtiendrait une suite contredisant le théorème 3. Notons que la conclusion du théorème est aussi valable pour $n = \infty$. $\square$

3. Q -noyaux

Un Q -noyau est un homomorphisme $\theta : Q \rightarrow \text{Ext } M$ (M un facteur). L'obstruction $\text{Ob}(\theta) \in H^3(Q, T)$ est définie comme suit. Pour chaque $q \in Q$, choisissons $\alpha_q \in \text{Aut } M$ relevant $\theta(q)$. Alors $\alpha_q \alpha_r = \text{Ad } u(q, r) \alpha_{qr}$ pour des éléments unitaires $u(q, r) \in M$, et l'associativité implique $u(q, r)u(qr, s) = \chi(q, r, s)\alpha_q(u(r, s))u_{q, rs}$ pour un 3-cocycle $\chi(q, r, s)$. La classe de χ ne dépend pas des choix effectués. La classe de χ est précisément l'obstruction à l'existence d'une extension N de M avec une application $v : Q \rightarrow U(N)$ telle que $v(q)Mv(q)^* = M$ et $\text{Ad } v(q)|_M = \alpha_q \text{ mod Int } M$. La classe de χ est aussi clairement une obstruction à l'existence d'un homomorphisme $\hat{\theta} : Q \rightarrow \text{Aut } M$ relevant θ . (Pour les détails, voir [16].)

Théorème 5. *Il existe un facteur II_1 séparable M , un groupe discret dénombrable Q et un Q -noyau injectif $\theta : Q \rightarrow \text{Ext } M$ avec $\text{Ob}(\theta) = 0$ tel que θ n'admette pas de relèvement $\hat{\theta} : Q \rightarrow \text{Aut } M$.*

Démonstration. Soit Q un groupe discret dénombrable infini quelconque ayant la propriété T (par exemple $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$). Choisissons une présentation $1 \rightarrow F_\infty \rightarrow F_n \rightarrow Q \rightarrow 1$ et une section ensembliste $q \rightarrow \hat{q}$ pour π . Alors $\lambda(F_\infty)''$ s'identifie à un sous-facteur de $\lambda(F_n)''$ de manière évidente. De plus, comme $\hat{q}\hat{r}\hat{q}\hat{r}^{-1} \in F_\infty$, il est clair que l'application $q \mapsto \alpha_q, \alpha_q(x) = \lambda(\hat{q})x\lambda(\hat{q})^{-1}$ définit un homomorphisme $\theta : Q \rightarrow \text{Ext } (\lambda(F_\infty)'')$ qui est injectif puisque $\lambda(F_\infty)' \cap \lambda(F_n)'' = \mathbb{C}$. L'obstruction $\text{Ob}(\theta)$ est nulle parce que l'extension existe par construction. Nous affirmons que $q \mapsto \alpha_q$ ne peut pas être perturbé par des automorphismes intérieurs de façon à devenir une action. Car si cela était possible, on pourrait trouver des éléments unitaires u_q dans $\lambda(F_\infty)''$ avec $(\text{Ad } u_q \alpha_q)(\text{Ad } u_q \alpha_q) =$

$\text{Ad } u_q \alpha_q$. Mais alors $u_q \alpha_q(u_r) = \mu(q, r) u_{qr}$ pour un 2-cocycle $\mu : Q \times Q \rightarrow I$, et les éléments unitaires mutuellement orthogonaux $u_q \lambda(\hat{q})$ engendreraient une copie de $\lambda_q(Q)''$ dans $\lambda(F_n)''$. Avec le théorème 2, cela contredit le corollaire 4. $\square$

Si $N \subseteq M$ sont des facteurs II_1 avec $N' \cap M = \mathbb{C}$ et si le normalisateur unitaire $\mathcal{N}(N)$ engendre M (c'est-à-dire que N est régulier), il est montré dans [1] que M se décompose comme une sorte de produit croisé $N \approx G$ où $G = \mathcal{N}(N)/U(N)$ est discret. La question de savoir si ce produit croisé tordu est nécessairement ordinaire est le problème 4 dans [9]. Il est clair, d'après la preuve du théorème ci-dessus, que le sous-facteur $\lambda(F_\infty)'' \subseteq \lambda(F_n)''$ fournit un contre-exemple.

Il est bien connu que les automorphismes des facteurs sont presque toujours spatialement implémentés. La seule exception est lorsqu'un facteur II_∞ agit avec un commutant de type II_1 . Ici, un automorphisme est spatialement implémenté si et seulement s'il préserve la trace sur M (voir [10]). On peut en outre se demander si un groupe d'automorphismes préservant la trace peut être implémenté par une représentation unitaire du groupe. Le résultat suivant montre que la réponse est non en général.

Corollaire 6. *Il existe un facteur II_∞ séparable M agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec M' de type II_1 et une action préservant la trace d'un groupe discret dénombrable G sur M qui ne peut pas être implémentée par une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $G = Q$ comme dans le théorème 5. Comme $[F_n : F_\infty] = \infty$, $\lambda(F_\infty)'$ est de type II_∞ et $q \rightarrow \text{Ad } \lambda(\hat{q})$ définit une action de Q qui préserve la trace. Une implémentation unitaire de cette action différerait de $q \rightarrow \lambda(\hat{q})$ par des éléments de $\lambda(F_\infty)''$, donnant ainsi un plongement de $\lambda(G)''$ dans $\lambda(F_n)''$ comme ci-dessus. $\square$

Le second auteur tient à exprimer sa dette envers Uffe Haagerup pour de nombreuses conversations fructueuses.

Références

- [1] M. Choda, *A characterization of crossed products of factors by discrete outer automorphism groups*, J. Math. Soc. Japan, 31, 1979, 257-261.
- [2] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math., 104, 1976, 73-115.
- [3] A. Connes, *A factor of type II_1 with countable fundamental group*, J. Operator Theory, 4, 1980, 151-153.
- [4] A. Connes, *Classification des facteurs*, Operator algebras and applications, Part 2, Kingston, Ont., 1980, vol. 38, p. 43-109, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
- [5] T. Fack, P. de la Harpe, *Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues*, Ann. Inst. Fourier, 30, 1980, 49-73.
- [6] U. Haagerup, *Standard form of a von Neumann algebra*, Math. Scand., 37, 1975, 271-283.
- [7] U. Haagerup, *An example of a non-nuclear C^* -algebra which has the metric approximation property*, Invent. Math., 50, 1979, 279-293.
- [8] U. Haagerup, *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math., LXX, 1982, 231-283.
- [9] V. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math., 72, 1983, 1-25.
- [10] R. Kadison, *Unitary invariants for representations of operator algebras*, Ann. of Math., 66, 1957, 306-379.
- [11] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. Appl., 1, 1967, 63-65.

- [12] A. Khintchine, *Über dyadische Brüche*, Math. Z., 18, 1923, 109-116.
- [13] M. Nakamura, Z. Takeda, *On the extensions of finite factors, I, II*, Proc. Jap. Acad., 1959, 149-156, 215-220.
- [14] E. Nelson, *Non-commutative integration theory*, J. Funct. Anal., 15, 1974, 103-116.
- [15] A. Ocneanu, *Actions of discrete amenable groups on factors*, preprint, Penn State University.
- [16] C. Sutherland, *Cohomology and extensions of von Neumann algebras II*, Publ. RIMS, 16, 1980, 135-176.

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, University of Pennsylvania
Philadelphia, Pa. 19104-3859, U.S.A.