

Triplets spectraux de zeta, régimes infrarouge et ultraviolet

Alain Connes, Caterina Consani, Henri Moscovici, 9 juillet 2026¹

Le maître de cérémonie : Très bien, je crois que le moment est venu. Bienvenue à tous à cette séance spéciale du soir. Nous avons le grand plaisir d'accueillir le professeur Alain Connes qui nous donnera une conférence sur les triplets spectraux pour la fonction zêta, dans les régimes infrarouge et ultraviolet. Merci de monter sur scène. D'accord, merci.

ALAIN CONNES : Merci. Mon exposé sera donc essentiellement un travail commun avec Katia Consani et Henri Moscovici, mais il s'appuiera sur un travail antérieur réalisé avec Walter van Suijlekom. Voici donc le plan de mon exposé je commencerai par exposer les résultats précédents obtenus avec Walter, qui figuraient dans un article dédié à Huzihiro Araki.

En d'autres termes, cela donne, si vous le souhaitez, les résultats généraux concernant les zéros de la transformée de Fourier des vecteurs propres extrêmes des formes quadratiques. La seconde partie traitera des triplets spectraux zêta dans l'infrarouge et décrira un travail effectué en collaboration avec Katia Consani et Henri Moscovici. Enfin, si j'en ai le temps, mais cela reste à confirmer, j'aborderai le spectre ultraviolet et les triplets spectraux pour la fonction zêta.

Et bien sûr, tout cela est lié à ce merveilleux cadeau que nous a fait Riemann : les zéros de la fonction zêta de Riemann. Ces zéros sont symétriques par rapport à l'axe réel et leur partie réelle est censée être égale à un demi.

Donc, oui, ça a changé. Le premier est autour de 14. Le deuxième est autour de 21, puis autour de 25, puis autour de 30.

D'accord. Quand je parle d'infrarouge, je parle de la partie basse du spectre. Et quand je parle d'ultraviolet, je parle du comportement de ce spectre aux longueurs d'onde les plus éloignées.

Bon, alors, le premier résultat que nous avons obtenu avec Walter van Suijlekom est lié à un résultat très ancien, datant en fait de 1911, de Carathéodory et Fejér, et qui concerne les matrices de Toeplitz. Ce résultat stipule que si l'on considère une matrice de Toeplitz - une matrice de Toeplitz est une matrice dont les coefficients ne dépendent que de la différence entre les deux indices de la matrice, autrement dit, ils sont constants le long de la diagonale, si l'on considère une telle matrice, supposée semi-définie positive et dotée d'un noyau unidimensionnel, et si l'on prend un vecteur non nul de ce noyau, on obtient un résultat remarquable et extrêmement puissant : le polynôme, somme des coefficients de ce vecteur non nul multiplié par z^j (i.e. z à la puissance j), a toutes ses racines sur le cercle unité. Autrement dit, cela nous offre un outil incroyablement puissant pour obtenir ces polynômes particuliers, omniprésents en théorie des nombres, dont tous les zéros sont situés sur un cercle. Ici, il s'agit du cercle unité, mais bien sûr, en modifiant la normalisation, on peut obtenir n'importe quel cercle.

Donc, la première chose que nous avons faite avec Walter, c'est de fournir une démonstration de ce résultat à l'aide de l'algèbre de C^* . Et, je veux dire, la démonstration est facile à comprendre.

1. Transcription en $\text{\LaTeX}$ et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de divers logiciels informatiques.

Essentiellement, on prend, si on veut, l'anneau des polynômes de Laurent, qui est sous-jacent, bien sûr, à la C^* -algèbre du groupe $\mathbb{Z}$, et on divise par le polynôme P , qui est donné, si on veut, par la somme des coefficients p_j multipliés par x^j (i.e. x à la puissance j).

Et il s'avère qu'on peut alors définir, naturellement, une forme linéaire positive sur cet anneau des polynômes de Laurent, qui s'annule sur cette idée.

On considère ensuite la représentation GNS, la représentation de Gelfand-Neimark-Segal, pour la paire donnée par cette algèbre, et l'état ϕ . Si l'on souhaite connaître l'algèbre de C^* , on dispose d'une représentation unitaire de l'algèbre de C^* des entiers du groupe $\mathbb{Z}$. Dans cette algèbre, l'élément X est unitaire. Il s'ensuit immédiatement que toutes les valeurs absolues des éléments de son spectre sont égales à un.

On constate, bien sûr, que son spectre est constitué des zéros du polynôme P . On en déduit donc immédiatement que les racines de ce polynôme sont toutes de module un. C'était donc un point de départ assez satisfaisant. Ensuite, avec Walter, nous avons démontré un premier théorème, qui est une généralisation simple du résultat précédent.

D'accord, car nous prenons une fonction continue sur l'intervalle $[-L, L]$, une fonction paire, réelle et continue, et nous considérons ensuite l'opérateur sur les fonctions à support dans $[0, L]$, défini par cette transformation. Or, il est très facile de voir que K est en fait un opérateur auto-adjoint compact. Plus précisément, c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Si l'on suppose que sa plus grande valeur propre est simple, et que l'on note ξ le vecteur propre correspondant, alors, comme le démontre Walter, tous les zéros de la fonction entière, donnée par la transformée de Fourier de ξ , sont réels. Pourquoi dis-je que ce résultat n'est pas surprenant ? Parce qu'en substance, ce théorème s'obtient comme limite du théorème de Carathéodory-Fejér. Autrement dit, on approche la fonction continue par des fonctions en escalier, ce qui nous ramène au cas de la matrice de Toeplitz.

Enfin, on utilise le théorème de Hurwitz, qui stipule que, lorsqu'une limite de fonctions holomorphes converge uniformément, aucun nouveau zéro ne peut apparaître dans cette limite. Or, si l'on contrôle tous les zéros de la suite, on contrôle également les zéros de la limite, ce qui constitue un résultat remarquable et fondamental dans ce contexte. C'était donc relativement simple, car on l'obtient en appliquant simplement la situation précédente.

Mais nous avons démontré avec Walter un théorème bien plus difficile, qui consiste à remplacer la fonction continue par une distribution. Le théorème est le suivant : si l'on considère une distribution réelle sur l'intervalle $[0, L]$, et la distribution paire associée, obtenue par symétrie sur l'intervalle $[-L, L]$, et si l'on suppose, comme précédemment, que cette forme quadratique à noyau de Schwartz définit un opérateur auto-adjoint minoré sur cet espace inverse, et que le minimum de son spectre est une valeur propre isolée simple associée à une fonction propre paire, alors tous les zéros de la fonction entière (c'est-à-dire la transformée de Fourier de ce vecteur, défini entre $-L/2$ et $L/2$) sont inclus dans l'ensemble des nombres réels. On peut alors démontrer que tous les zéros de cette fonction entière appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

Et cela jouera un rôle clé, bien sûr, dans ce qui va suivre. La démonstration est en réalité assez complexe, car nous travaillons avec des distributions. Elle consiste à approximer, si vous préférez, la forme quadratique par un type de matrices très particulier.

Il existe donc des matrices obtenues en prenant une base de l'espace inverse donnée par les fonctions trigonométriques. Lorsqu'on calcule la matrice quadratique dans cette base, on constate qu'il s'agit d'un type de matrice très particulier, car ses coefficients sont de la forme $\psi_n - m/(n - m)$, ou encore, sur la diagonale, $w'n$, où ψ est une certaine fonction. Ces matrices portent un nom : ce sont des matrices de Galerkin.

Si vous prenez les exemples les plus simples de telles matrices, elles ressemblent à ceci. Sur la diagonale, elles sont assez arbitraires, mis à part la symétrie qui fait que les valeurs sont identiques ici et là. Et en dehors de la diagonale, ce sont également des matrices réelles symétriques.

Mais elles ont une forme très particulière : leurs éléments sont de la forme $(b_i - b_j)/(ij)$. Et voici le point crucial : pour comprendre cette forme très spéciale des matrices, nous utiliserons l'opérateur de Dirac, c'est-à-dire l'opérateur diagonal qui vaut n à la position n , ce qui est bien sûr l'exemple le plus simple de l'opérateur de Dirac dans cette configuration. Un simple calcul montre que le commutateur de l'opérateur de Dirac avec cette matrice est l'opérateur de rang 2. C'est assez facile à comprendre d'après la forme de la matrice, car en prenant le commutateur de Dirac, on multiplie essentiellement l'élément générique par (ij) . On obtient ainsi uniquement $(b_i - b_j)$.

Mais il s'agit en réalité d'un opérateur de rang 2. Le lemme principal est donc le suivant : on obtient l'opérateur de rang 2 en commutant avec l'opérateur de Dirac. Ensuite, on effectue une perturbation de rang 1 de l'opérateur de Dirac.

On ajoute donc à l'opérateur de Dirac un opérateur de rang 1 approprié. On constate que ce nouvel opérateur est auto-adjoint pour le produit scalaire défini par la forme quadratique. Il s'ensuit que ses zéros sont réels.

Ensuite, nous relierons ces zéros à la transformée de Fourier. Bon, il y a beaucoup de manipulations, etc. Mais en résumé, le résultat, si vous voulez, repose sur l'auto-adjonction, ce qui implique un spectre réel. D'accord. Ce point est détaillé dans l'article que j'ai coécrit avec Walter, intitulé "*Formes quadratiques, zéros réels et échos de l'action spectrale*", car il s'avère étroitement lié à l'action spectrale en physique mathématique. J'aborde maintenant le vif du sujet : l'application de ce résultat à la fonction zêta, un article coécrit avec Katia Consani et Henri Moscovici, comme je l'ai mentionné.

Nous allons donc maintenant examiner le triplet spectral zêta pour l'infrarouge. Ce triplet spectral zêta sera déduit de la démonstration que je viens d'expliquer avec Walter van Suijlekom. En fait, l'espace de Hilbert et l'algèbre sont très simples.

Ils correspondent essentiellement, si vous voulez, au quotient des nombres réels positifs par leur produit par le carré de λ . On obtient ainsi un domaine fondamental pour ce quotient.

Et l'espace de Hilbert est simplement cela, sauf que sur l'espace de Hilbert, nous allons maintenant placer un produit scalaire, qui est dérivé de la forme quadratique de Weil, que je vais immédiatement expliquer.

L'opérateur de Dirac sera décalé d'une perturbation de Rankin par rapport à l'opérateur de Dirac ordinaire pour le cercle. Il s'agit donc, en quelque sorte, de la construction de base dans l'infrarouge. Je dois maintenant expliquer ce qu'est cette forme quadratique de Weil.

L'origine de cette notion remonte donc à Riemann. Dans son article, Riemann a proposé une formule. Son objectif était d'obtenir une formule exacte pour la fonction qui donne le nombre de nombres premiers inférieurs à x . En réalité, il a d'abord donné une formule non pas pour cette fonction, mais pour la fonction qui est la somme des $1/n$ multiplié par le nombre de nombres premiers inférieurs à x à la puissance $1/n$. Bien sûr, cette somme est finie et représente une petite variante du nombre de nombres premiers.

Et ce que Riemann a écrit dans son article, c'est que cette fonction est égale à la fonction logarithme intégral évaluée en x , moins la somme des zéros de la fonction zêta de Riemann du logarithme intégral évalué en x^p , plus l'intégrale de x à l'infini de cette expression, qui est une intégrale convergente, et ainsi de suite. Or, il y a un point que je tiens à souligner. Lors de mes conférences, je mentionne toujours que cette formule a été reprise de Riemann dans de nombreux ouvrages, notamment celui d'Edwards sur la fonction zêta de Riemann.

Tel qu'il est écrit, cela n'a aucun sens. La raison est simple : il n'existe aucune fonction, le logarithme intégral, pour laquelle le terme général de cette série converge vers zéro. Pourquoi ? Parce que si l'on considère les zéros de la fonction zêta de Riemann et que l'on prend x à la puissance p , alors, si l'hypothèse de Riemann est vérifiée, tous ces nombres auront pour module $x^{1/2}$ et ils parcourront de manière très dense le cercle de rayon $x^{1/2}$. Par conséquent, le terme général de cette série ne peut en aucun cas tendre vers zéro.

En fait, ce qui est faux, c'est que Riemann était extrêmement rigoureux car il utilisait des fonctions multivoques, et il explique très clairement à la fin de son article quelle branche il convient de considérer. De même, si vous consultez l'article de Von Mangoldt, dans lequel il justifie la formule de Riemann, vous constaterez que Von Mangoldt était lui aussi extrêmement rigoureux et que l'expression correcte n'est pas l'intégrale du logarithme de x à la puissance p , mais l'intégrale exponentielle de $p \log x$. Or, lorsque p tend vers l'infini, l'intégrale exponentielle de $p \log x$ tend vers zéro, contrairement à cette expression, ce qui la rend cohérente. Si vous effectuez un calcul informatique, vous constaterez que cette formule est élégante, mais que celle-ci est erronée.

Et avec celle-ci, la convergence est parfaite. Quelle est donc la formule explicite de Riemann-Weil, connue de Riemann, bien entendu ? Elle stipule que si l'on considère une fonction sur le groupe multiplicatif des nombres réels positifs et que l'on prend sa transformée de Fourier, appelée ici transformée de Mellin, alors on peut écrire l'évaluation de cette transformée de Fourier en ce qui correspondrait en théorie de la cohomologie à H^0 , à H^1 , puis soustraire la somme des zéros de la fonction de données de Riemann. On obtient ainsi une somme calculable en termes de nombres

premiers, qui est la somme des termes de Weyl locaux.

Ces termes de Weyl locaux sont simples à calculer pour les nombres premiers, car pour un nombre premier p , ils sont donnés par $\log p$ multiplié par une somme, qui est régulière, convergente, etc., c'est-à-dire la somme des valeurs de la fonction sur les puissances positives et négatives du nombre premier. Mais l'expression de ce qu'on appelle la contribution archimédienne est beaucoup plus complexe. Et cette expression correspond, dans la formule de Riemann, à l'intégrale de x à l'infini de cette quantité.

Mais sauf que, lorsqu'elle est écrite ici, c'est très délicat, car il y a un dénominateur égal à zéro : x moins x est égal à zéro pour $x = 1$. C'est pourquoi il faut être très prudent en écrivant cette expression afin qu'elle s'annule pour 1. Ceci étant dit, comme je l'ai mentionné, il existe cette distribution délicate des valeurs principales, mais nous avons un théorème d'André Weyl : l'hypothèse de Riemann est équivalente à la négativité de la forme quadratique, obtenue en considérant la somme sur les différents termes de la contribution de Weyl.

Bon, c'est un fait, un fait, et c'est déjà assez frappant en soi. Mais en un sens, cela nous donnera, si vous voulez, la forme quadratique que nous recherchons, à un changement de signe près, bien sûr.

Dans l'article co-écrit avec Katia et Henri, nous démontrons que, si l'on considère la distribution définie par la formule de Weyl (ou formule de Riemann-Weyl), l'hypothèse selon laquelle l'opérateur correspondant est non borné et possède un spectre discret est vérifiée. Ce résultat était fondamental. Nous pouvons donc maintenant appliquer notre théorème avec Walter.

Pour ce faire, il faut examiner l'opérateur correspondant, dont le spectre est donné par les zéros de la transformée de Fourier du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la forme quadratique de Weyl. La tâche consiste donc à calculer, à l'aide d'un ordinateur, la plus petite valeur propre, le vecteur propre correspondant, puis à calculer sa transformée de Fourier. J'ai commencé ces calculs en novembre 2024.

Je faisais ce calcul pour λ égal à trois. Voici donc le graphique de la transformée de Fourier que j'avais obtenu. Et bien sûr, vous savez, quand on regarde cette fonction, on ne voit rien, car elle présente une grosse bosse, puis elle semble presque nulle.

Il faut donc prendre de bonnes lunettes et observer ce que la courbe fait autour de 14. Elle coupe l'axe réel autour de 14, et 14 est le premier zéro de zêta. Comme je vous l'ai dit, le deuxième zéro de zêta se situe autour de 21.

Vous continuez donc à observer cette fonction et vous constatez qu'elle coupe la droite réelle exactement à 21, ou très près de cette valeur. Puis, en continuant l'observation, vous constatez qu'elle la coupe à nouveau aux alentours de 25. Et ceci est toujours valable pour λ égal à trois.

Et vous continuez, et vous constatez qu'elle traverse environ 30 points. D'accord. À ce moment-là, je ne savais pas comment calculer très précisément les zéros d'une fonction comme cette transformée de Fourier.

En fait, j'avais fait une erreur dans mon système informatique. Du coup, quand j'ai essayé d'augmenter la précision, tout a foiré. Finalement, j'ai trouvé mon erreur.

Et puis, lorsque j'ai poussé le calcul à l'aide d'un petit programme pour déterminer précisément où la fonction change de signe, la correspondance s'est avérée incroyable. En effet, j'avais utilisé ici la valeur trouvée par le zéro de ma transformée de Fourier, et là le zéro correspondant de ζ . Vous voyez donc que, pour toutes ces valeurs, pour tous ces zéros, la concordance était frappante. Au bout d'un moment, la situation est devenue critique.

D'accord, et ceci concernait λ égal à trois. Ensuite, après un certain temps, j'ai découvert qu'il existait une bien meilleure façon de calculer les zéros de la transformée de Fourier de la fonction, car cette transformée de Fourier, lorsqu'on l'exprime sous forme matricielle, peut en fait être factorisée par un polynôme. Il suffit alors de calculer les zéros de ce polynôme.

J'ai donc continué et j'ai calculé ces zéros avec beaucoup plus de précision. Maintenant, pour λ égal à la racine carrée de 12, d'accord, ce qui est un peu plus de trois, puis la racine carrée de 13, et la racine carrée de 14.

Et je vous montre ici la différence entre la valeur que j'ai calculée et le zéro correspondant de ζ .

Ainsi, par exemple, pour la racine carrée de 12, on obtient les 50 premières décimales du premier zéro de ζ . Pour 13, on obtient 55 décimales. Et pour 14, on obtient 60 décimales.

Et cela vaut pour les 50 premiers zéros de ζ . Prenons l'exemple du 13e zéro : on compte 27 décimales, 32 décimales, 37 décimales pour le 13e zéro, et ainsi de suite. À l'époque, c'était la limite que mon ordinateur pouvait atteindre avec Mathematica.

Et bon, alors, évidemment, c'était public puisque c'était dans notre journal avec Katia et Henri. Puis, au bout d'un certain temps, d'autres scientifiques se mirent à effectuer leurs propres calculs, mais avec des moyens bien plus puissants que ceux que je pouvais utiliser avec Mathematica. L'un d'eux était Akiva Groskin.

Akiva Groskin m'a écrit pour me dire que, si vous le souhaitez, il a pu confirmer les résultats du calcul pour 13. Malheureusement, il n'avait pas l'autorisation de publier quoi que ce soit sur Arxiv, j'ai donc dû le financer. Bref, concernant ces calculs, la personne clé est Ronnie Andrews.

D'accord, je vais vous expliquer la situation. En fait, voici ce qui s'est passé : après avoir calculé pour 13 et confirmé mes propres calculs, Groskin a essayé de calculer pour λ égal à 10, c'est-à-dire λ^2 égal à 100. Et là, il a trouvé une valeur propre négative de la forme quadratique.

Alors, je lui ai en quelque sorte écrit : "D'accord, il faut calculer avec plus de précision, etc." Et vous savez, ce n'est pas possible, car cela invaliderait RH, évidemment. Mais entre-temps, Ronnie Andrews avait écrit à Henri Moscovici.

Il avait effectué lui-même le calcul pour $\lambda^2 = 100$ et constaté que la valeur propre correspondante était positive pour la forme quadratique exacte. De plus, il avait calculé que pour le premier zéro, le nombre de chiffres possibles pour $\lambda^2 = 100$ était 419.

Donc, vous obteniez 419 chiffres après la virgule pour le premier zéro de zêta lorsque $x = 10$. D'accord. Et récemment, Ronnie Andrews a découvert que si vous prenez $\lambda = 32$, vous obtenez 999 chiffres après la virgule pour le premier zéro de zêta.

Maintenant, je dois vous expliquer un peu le contexte, car Ronnie Andrews n'est pas mathématicien de profession ; il est architecte logiciel principal dans une grande entreprise du Fortune 500. Et ce qu'il maîtrise, c'est tout simplement incroyable : il utilise des systèmes de calcul très sophistiqués, capables de gérer 1 000 décimales et dotés d'environ 512 cœurs. À titre de comparaison, mon ordinateur personnel à Paris n'en possède que 16.

Évidemment, vous le savez, il ne s'agit pas d'une concurrence directe. On dispose donc d'une puissance de calcul extraordinaire, qui est à l'œuvre et qui sera, bien sûr, essentielle pour comprendre ce qui se passe ici.

Mais ce qui est assez clair, c'est que nous nous trouvons aujourd'hui dans une situation où, en fait, cela m'a incité, bien sûr, à écrire une lettre à Riemann. J'ai donc écrit une lettre à Riemann, qui est maintenant publiée dans le *Journal of Open Mathematical Problems*, car on m'avait demandé de rédiger une synthèse sur l'hypothèse de Riemann. Et je n'ai pas résisté à la tentation d'écrire à Riemann, pour lui expliquer, vous savez, tout d'abord, tous ces développements extraordinaires des mathématiques modernes liés à la fonction zêta de Riemann.

Mais alors, je me suis rendu compte que je pouvais expliquer à Riemann que ce que je venais de lui expliquer, il aurait pu le faire parfaitement s'il avait eu un ordinateur. Autrement dit, je lui expliquais qu'il connaissait bien sûr la formule de Riemann-Weyl. De plus, l'idée d'utiliser le vecteur propre minimal pour la forme quadratique de Riemann-Weyl est exactement la même que celle employée par Riemann pour démontrer le théorème de transformation conforme.

Comme vous le savez, Riemann n'avait pas de démonstration du théorème de transformation conforme, car il appliquait un principe appelé principe de Dirichlet, qui fut réfuté par Weierstrass après la mort de Riemann grâce à un contre-exemple. Seul Hilbert a rendu la démonstration de Riemann rigoureuse. C'est d'ailleurs la même technique d'opérateurs que celle de Hilbert que nous utilisons pour justifier que la forme quadratique possède un spectre discret.

Donc, si vous voulez, elle possède un spectre discret. En fait, ce que je vais expliquer maintenant, et c'est ce que j'ai expliqué dans ma lettre à Riemann, c'est que l'on peut désormais suivre les traces de Riemann et tenter de justifier que cette approximation des zéros est une véritable approximation. Eh bien, vous savez, évidemment, c'est juste.

Mais le problème en mathématiques, c'est qu'il faut faire une démonstration. Or, si on fait une démonstration, on en a fini avec le théorème de Riemann. Pourquoi ? Parce que, d'après les résultats de Walter van Suijlekom, on sait que, pourvu qu'on prouve que la plus petite valeur propre est

simple, alors on sait que les zéros de cette transformée de Fourier sont tous réels.

Partons donc sur les traces de Riemann et examinons ce qu'il écrit dans son article. Il y définit une fonction qu'il appelle la fonction Ξ . On observe une légère divergence dans la littérature : la fonction notée $\Xi(s)$ n'est pas nécessairement la fonction Ξ de Riemann.