

Convergence de Gromov–Hausdorff des troncatures spectrales pour les tores non commutatifs

Vibhor Bhatt, Satyajit Guin, Palash Sharma

Résumé

Nous démontrons la convergence de Gromov–Hausdorff des espaces d'états, munis de la fonction distance de Connes, des systèmes d'opérateurs associés aux troncatures spectrales pour les n -tores non commutatifs, $n \geq 2$. L'action du n -tore sur le n -tore non commutatif, ainsi qu'un usage approprié des intégrales de Bochner, nous permettent de construire un isomorphisme d'ordre approché C^1 qui établit la convergence. Le résultat de convergence antérieur pour le cas classique des tores [20] en découle comme cas particulier de notre résultat. Nous concluons en étudiant les C^* -enveloppes et les nombres de propagation des systèmes d'opérateurs tronqués et montrons que les propriétés structurelles des systèmes d'opérateurs tronqués pour les tores persistent sous déformation.

1 Introduction

Connes et van Suijlekom [7] ont introduit la notion de *troncatures spectrales* en géométrie non commutative, motivés par l'observation que, dans de nombreuses situations physiques, seule une portion finie du spectre est accessible. On peut donc chercher à comprendre le système sous-jacent en ne retenant que les données spectrales en dessous d'un seuil prescrit et en étudiant l'approximation de dimension finie qui en résulte. Les auteurs de [8] ont souligné que notre compréhension de la géométrie de l'espace-temps est contrainte par la résolution de nos instruments de mesure ; par conséquent, nous ne pouvons déterminer l'espace métrique sous-jacent qu'à une résolution finie près. Cela conduit à la question directrice de savoir si, en considérant des procédures limites appropriées à mesure que la troncature est progressivement relâchée, on peut récupérer de l'information géométrique à partir de ces modèles tronqués.

Nous partons d'un triplet spectral (A, H, D) pour une C^* algèbre unifère $\mathcal{A}$ et obtenons les systèmes tronqués $\{(P_\Lambda A P_\Lambda, P_\Lambda H P_\Lambda, P_\Lambda D P_\Lambda)\}_{\Lambda \geq 0}$ par les projections spectrales P_Λ de D sur les espaces propres de valeurs propres de module $\leq \Lambda$. Ces systèmes tronqués sont des triplets spectraux de systèmes d'opérateurs de dimension finie et sont appelés troncatures spectrales de (A, H, D) . Supposons que la fonction distance de Connes [5, 6], donnée par

$$d_A(\phi, \psi) := \sup_{a \in A} \{|\phi(a) - \psi(a)| : [D, a] \leq 1\},$$

induisse la topologie faible $*$ sur l'espace des états $\mathcal{S}(\mathcal{A})$; de manière équivalente, le triplet spectral donné induit un espace métrique quantique compact au sens de Rieffel [24, 25]. Si $\ker([P_\Lambda D P_\Lambda, \cdot])$ ne consiste qu'en les scalaires pour tout $\Lambda \geq 0$, alors la dimension finie du système d'opérateurs

Référence : article arXiv <https://arxiv.com/pdf/2610.01132.pdf>

Traduction : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

tronqué assure que la fonction distance de Connes correspondante, avec A remplacé par $P_\Lambda A P_\Lambda$ et D remplacé par $P_\Lambda D P_\Lambda$, induit la topologie faible $*$ sur les espaces d'états $\mathcal{S}(P_\Lambda \mathcal{A} P_\Lambda)$ pour tout $\Lambda \geq 0$. Avec cette formulation, le problème de la troncature spectrale demande si la famille $\{\mathcal{S}(P_\Lambda \mathcal{A} P_\Lambda)\}_\Lambda$ converge vers $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ en distance de Gromov–Hausdorff lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$. Comme mentionné dans [27], ce problème est extrêmement intéressant et important.

Bien que nous ayons mentionné le problème de la troncature spectrale dans le cadre de Gromov–Hausdorff, une autre approche possible consiste à considérer la distance de Gromov–Hausdorff *quantique* [26, 1], comme souligné dans [20]. Nous notons que ces deux notions de convergence ne sont pas équivalentes [15]. Cependant, dans le cas que nous considérons dans cet article, la convergence de Gromov–Hausdorff implique encore la convergence de Gromov–Hausdorff quantique, comme il découle de la Proposition 2.2.4 dans [16]. Nous notons la notion apparentée de propinquité [17, 18], principalement formulée pour les C^* -algèbres. Des exemples de convergence de troncatures spectrales incluent le cas classique du cercle, ou plus généralement, des n -tores [29, 20]. Voir aussi [28] pour un travail apparenté. Une variante du problème de troncature spectrale, à savoir la convergence des troncatures de Peter–Weyl, a été établie pour les groupes métriques compacts [12] et les groupes quantiques compacts co-moyennables [19]. Voir aussi [27] pour un traitement apparenté des troncatures de Fourier.

Sans doute l'un des exemples les plus fondamentaux et les plus étudiés de géométrie non commutative est le n -tore non commutatif ($n \geq 2$) $\mathcal{A}_\Theta$ [23], où Θ est une matrice $n \times n$ réelle antisymétrique, avec l'opérateur de Dirac canonique provenant de l'action ergodique de $\mathbb{T}^n$. Il est connu depuis les premiers travaux de Rieffel [24] que le triplet spectral canonique $(\mathcal{A}_\Theta, L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}, D)$ induit une structure métrique quantique sur $\mathcal{A}_\Theta$ (voir [21] pour le cas plus général des θ -déformations). Le problème de la troncature spectrale a un sens dans ce cas, et nous établissons la convergence de Gromov–Hausdorff des espaces d'états, lorsqu'ils sont munis de la fonction distance de Connes, des systèmes d'opérateurs associés aux troncatures spectrales pour $\mathcal{A}_\Theta$. La convergence est également valable vis-à-vis de la distance de Gromov–Hausdorff quantique.

Un rôle crucial dans notre analyse est joué par l'action du tore $\mathbb{T}^n$ sur $\mathcal{A}_\Theta$ et un usage approprié des intégrales de Bochner. Cela nous permet de construire un C^1 -isomorphisme d'ordre approché introduit dans [29], ce qui nous permet d'établir la convergence. Une conséquence agréable de notre travail est que l'analyse reste valable dans le cas $\Theta = 0$, qui est la situation classique du n -tore $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Ainsi, la machinerie d'analyse harmonique employée dans [20] peut être évitée, car elle est de toute façon spécifique au cadre commutatif. Il convient toutefois de noter que le travail fondateur [20] a été le premier à dépasser la dimension un ; notre contribution étend cette perspective au-delà du cadre classique au n -tore non commutatif, l'un des exemples fondamentaux de la géométrie non commutative.

Nous concluons l'article par une analyse plus approfondie de la structure des systèmes d'opérateurs tronqués. Nous calculons la C^* -enveloppe [2, 14] et le nombre de propagation [7] de chaque système d'opérateurs tronqué et montrons que ceux-ci coïncident, à isomorphisme près des C^* -enveloppes, avec les structures correspondantes obtenues dans [20] pour le cas classique des tores. En d'autres termes, les propriétés structurelles des systèmes d'opérateurs tronqués pour les tores persistent sous déformation. La structure des duals pour les systèmes d'opérateurs tronqués reste largement

inexplorée, malgré nos efforts, tout comme dans le cas classique des tores.

L'article est organisé comme suit. Dans la Section 2, nous rappelons les faits essentiels sur les tores non commutatifs, les espaces métriques quantiques compacts, et les mesures vectorielles et intégrales de Bochner. La Section 3 discute du candidat pour l'isomorphisme d'ordre approché C^1 . La Section 4 est la section principale, où nous démontrons la convergence. Enfin, dans la Section 5 nous étudions les C^* -enveloppes et les nombres de propagation des systèmes d'opérateurs tronqués.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons brièvement la terminologie et les résultats nécessaires dont nous avons besoin dans cet article. Des références appropriées sont fournies pour les lecteurs intéressés à approfondir.

2.1 Tores non commutatifs et opérateurs de Dirac

Nous rappelons le n -tore non commutatif de [23]. Soit Θ une matrice $n \times n$ réelle antisymétrique. Le n -tore non commutatif $\mathbb{T}_\Theta$ est la C^* -algèbre universelle engendrée par n unitaires $U_1, \dots, U_n$ satisfaisant $U_k U_\ell = e^{2\pi i \Theta_{k\ell}} U_\ell U_k$, où $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$. Tout au long de cet article i désignera $\sqrt{-1}$. Sur $\mathbb{T}_\Theta$, le groupe de Lie compact connexe $\mathbb{T}^n$ agit comme suit :

$$(z_1, \dots, z_n) \cdot U_j = z_j U_j; \quad j = 1, \dots, n.$$

La sous-algèbre dense lisse de $\mathbb{T}_\Theta$ sous l'action ci-dessus est

$$\mathcal{A}_\Theta := \left\{ \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r U^r : (a_r) \in \mathbb{S}(\mathbb{Z}^n), r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

appelée le n -tore non commutatif lisse, où $U^r := U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n}$, et $\mathbb{S}(\mathbb{Z}^n)$ désigne l'espace vectoriel des multisuites (a_r) à décroissance rapide. Lorsque $\Theta = 0$, nous avons $\mathbb{T}_0 = C(\mathbb{T}^n)$ et $\mathcal{A}_0 = C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Pour $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, nous notons $e_k := U_1^{k_1} \dots U_n^{k_n}$. Nous avons les faits suivants :

Lemme 2.1. *Nous avons ce qui suit :*

$$\begin{aligned} e_k e_\ell &= \omega(k, \ell) e_{k+\ell}, & \omega(k, \ell) &:= e^{-2\pi i \sum_{1 \leq r < j \leq n} \Theta_{rj} k_j \ell_r} \in \mathbb{S}^1; \\ e_k^* &= \overline{\omega(k, -k)} e_{-k}, & e_\lambda e_\nu^* &= \overline{\omega(\lambda - \nu, \nu)} e_{\lambda - \nu}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\omega(k, \ell + \ell') = \omega(k, \ell) \omega(k, \ell'), \quad \omega(k + k', \ell) = \omega(k, \ell) \omega(k', \ell), \quad \omega(k, 0) = \omega(0, k) = 1,$$

et nous avons l'identité de cocycle $\omega(k, \ell) \omega(k + \ell, r) = \omega(\ell, r) \omega(k, \ell + r)$.

La fonctionnelle $\tau\left(\sum_k a_k e_k\right) := a_0$ est une trace fidèle sur $\mathcal{A}_\Theta$, invariante sous l'action, et la famille $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle_\tau := \tau(a^* b)$. L'espace de Hilbert GNS $L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau)$ est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ et nous avons la représentation fidèle de $\mathcal{A}_\Theta$ sur $L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau)$ par la

représentation régulière gauche $\pi_\tau(a)(b) := ab$.

Si l'on suppose en outre que le réseau Λ_Θ engendré par les colonnes de Θ est tel que $\Lambda_\Theta + \mathbb{Z}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, la C^* -algèbre $\mathbb{T}_\Theta$ devient simple [13, Page 537]. Mais dans notre cas, la simplicité n'est pas nécessaire et nous ne requérons aucune hypothèse sur Θ hormis l'antisymétrie.

Soit $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ la base standard de l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{T}^n$ et les dérivations associées $\{\delta_{\nu_1}, \dots, \delta_{\nu_n}\}$. Nous notons δ_{ν_j} simplement par $\tilde{\delta}_j$. Ces dérivations sont données par

$$\tilde{\delta}_j\left(\sum_r a_r e_r\right) = \sum_r ir_j a_r e_r. \quad (2.1)$$

Ce sont des $*$ -dérivations et elles commutent. Notons $N = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Sur l'espace de Hilbert $H := L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^N \cong \ell^2(\mathbb{Z}^n) \otimes \mathbb{C}^N$, considérons l'opérateur non borné $D = \sum_{j=1}^n \delta_j \otimes \sigma_j$, où $\delta_j = -i \tilde{\delta}_j$ avec $\tilde{\delta}_j$ défini en (2.1). Ici, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les matrices gamma de Clifford dans $M_N(\mathbb{C})$ satisfaisant $\sigma_\ell \sigma_k + \sigma_k \sigma_\ell = 2\delta_{\ell k}$ pour $\ell, k \in \{1, \dots, n\}$. Alors D est un opérateur non borné essentiellement auto-adjoint agissant sur H de domaine $\mathcal{A}_\Theta \otimes \mathbb{C}^N$, et D a une résolvante compacte. Le tuple $(\mathcal{A}_\Theta, H, D)$ est un triplet spectral n^+ -sommable pour $\mathbb{T}_\Theta$. Pour le calcul différentiel pour ce triplet spectral, nous renvoyons à [4]. Nous avons

$$[D, \pi(a)] = \sum_{\mu=1}^n \pi_\tau(\delta_\mu(a)) \otimes \sigma_\mu, \quad (2.2)$$

et

$$D^2 = \sum_{\mu=1}^n \delta_\mu^2 \otimes I_N, \quad D^2(e_k \otimes \xi) = \|k\|^2 e_k \otimes \xi, \quad (2.3)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{C}^N$.

Par souci de brièveté notationnelle, tout au long de l'article, nous omettons le symbole de représentation π et considérons simplement $\mathcal{A}_\Theta$ concrètement à l'intérieur de $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}})$.

2.2 Espace métrique spectral et isomorphisme d'ordre approché C^1

Nous rappelons brièvement quelques préliminaires sur les espaces métriques quantiques compacts, développés par Rieffel [24, 25], motivés par Connes [5, 6]. Nous utiliserons la reformulation en systèmes d'opérateurs de la construction de Rieffel. Pour une discussion détaillée, nous renvoyons à [16] (ou, voir [3] pour un aperçu rapide).

Definition 2.2. Soit X un sous-espace fermé auto-adjoint unifère d'une C^* -algèbre unifère $\mathcal{A}$, appelé système d'opérateurs complet unifère. Une semi-norme $L : X \rightarrow [0, \infty]$ est appelée Lip-norme si elle satisfait les conditions suivantes :

1. L est $*$ -invariante et $L(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{C}$;
2. L'ensemble $\text{dom}(L) := \{x \in X : L(x) < \infty\}$ est dense dans X ;

3. La fonction suivante (métrique de Monge–Kantorovič)

$$d^L(\phi, \psi) := \sup\{|\phi(x) - \psi(x)| : L(x) \leq 1\}$$

métrique la topologie faible $*$ sur l'espace des états $\mathcal{S}(X)$.

Le couple (X, L) est appelé un espace métrique quantique compact et L est appelée une Lip-norme.

Un triplet spectral de systèmes d'opérateurs (E, H, D) (voir Déf. 1.1 [20]) pour lequel $(\bar{E}, L_D)$ est un espace métrique quantique compact, où $L_D(e) := [D, e]$, est appelé un espace métrique spectral, ou triplet spectral métrique. Les tores non commutatifs sont des espaces métriques spectraux pour le triplet spectral canonique discuté en Sec. 2.1 [24, Thm. 4.2].

Soient (X, L_X) et (Y, L_Y) des espaces métriques quantiques compacts, et considérons les projections coordonnées $q_X : X \oplus Y \rightarrow X$ et $q_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$. Une Lip-norme L sur $X \oplus Y$ est dite admissible si $\text{dom}(L) = \text{dom}(L_X) \oplus \text{dom}(L_Y)$ et si les semi-normes quotients induites par L sur les parties auto-adjointes X_{sa} et Y_{sa} coïncident avec les restrictions de L_X et L_Y , respectivement. Étant donnée une telle L , les projections coordonnées induisent des plongements des espaces d'états $q_X^* : \mathcal{S}(X) \hookrightarrow \mathcal{S}(X \oplus Y)$ et $q_Y^* : \mathcal{S}(Y) \hookrightarrow \mathcal{S}(X \oplus Y)$. La distance de Gromov–Hausdorff quantique entre (X, L_X) et (Y, L_Y) est définie par

$$\text{dist}_q((X, L_X), (Y, L_Y)) := \inf \left\{ \text{dist}_H^L(q_A^*(\mathcal{S}(X)), q_B^*(\mathcal{S}(Y))) : L \text{ admissible} \right\}$$

où dist_H^L est la distance de Hausdorff mesurée par rapport à d^L . Cette définition coïncide avec la définition originale de Rieffel dans [26] appliquée aux espaces à unité d'ordre $\text{dom}(L_X)_{sa}$ et $\text{dom}(L_Y)_{sa}$, voir [16, Lemma 2.2.2].

Il s'ensuit que $\text{dist}_q((X, L_X), (Y, L_Y)) \geq \text{dist}_{GH}((\mathcal{S}(X), d^{L_X}), (\mathcal{S}(Y), d^{L_Y}))$, où dist_{GH} désigne la distance de Gromov–Hausdorff classique. Cependant, ces deux métriques (formellement parlant, sur les classes isométriques) ne sont pas équivalentes [15].

Définition 2.3 ([29]). Soient (E, H, D) et $(E_\Lambda, H_\Lambda, D_\Lambda)$, pour tout $\Lambda \geq 0$, des triplets spectraux de systèmes d'opérateurs tels que les topologies sur les espaces d'états $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(E_\Lambda)$, pour chaque $\Lambda \geq 0$, définies par la fonction distance de Connes coïncident avec les topologies faibles $*$ sur ceux-ci. Des applications linéaires $\rho_\Lambda : E \rightarrow E_\Lambda$ et $\sigma_\Lambda : E_\Lambda \rightarrow E$ forment un isomorphisme d'ordre approché C^1 si

1. ρ_Λ et σ_Λ sont unifères et positives ;
2. ρ_Λ et σ_Λ sont C^1 -contractantes, c'est-à-dire qu'elles sont contractantes à la fois par rapport à la norme et par rapport à la semi-norme de Lipschitz $\|[D, \cdot]\|$, respectivement $\|[D_\Lambda, \cdot]\|$, i.e.,

$$\|[D_\Lambda, \rho_\Lambda(e)]\| \leq \|[D, e]\| \quad (e \in E),$$

$$\|[D, \sigma_\Lambda(T)]\| \leq \|[D_\Lambda, T]\| \quad (T \in E_\Lambda).$$

3. nous avons $\|e - \sigma_\Lambda \circ \rho_\Lambda(e)\| \leq \gamma_\Lambda \|[D, e]\|$ et $\|T - \rho_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(T)\| \leq \gamma_\Lambda \|[D_\Lambda, T]\|$ pour un filet $(\gamma_\Lambda)_{\Lambda \geq 0}$ avec $\gamma_\Lambda \rightarrow 0$ lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$.

Nous appelons la collection de couples d'applications $(\rho_\Lambda, \sigma_\Lambda)$ un isomorphisme d'ordre approché C^1 .

Le résultat suivant est un excellent dispositif pour démontrer la convergence des troncatures spectrales en distance de Gromov–Hausdorff. La convergence de Gromov–Hausdorff quantique s’ensuit alors automatiquement de la Proposition 2.2.4 dans [16].

Théorème 2.4 (Thm. 5, [29]). *Supposons que (E, H, D) et $\{(E_R, H_R, D_R)\}_{R \geq 0}$ soient des triplets spectraux de systèmes d’opérateurs tels que les topologies sur les espaces d’états $\mathcal{S}(E_R)$ et $\mathcal{S}(E)$ définies par les fonctions distance de Connes d_{E_R} et d_E , respectivement, coïncident avec les topologies faibles $*$ sur ceux-ci. Si (ρ_R, σ_R) est un isomorphisme d’ordre approché C^1 pour (E, H, D) et $\{(E_R, H_R, D_R)\}_{R \geq 0}$, alors les espaces d’états $\{(\mathcal{S}(E_R), d_{E_R})\}_{R \geq 0}$ convergent vers $(\mathcal{S}(E), d_E)$ en distance de Gromov–Hausdorff.*

2.3 Mesure à valeurs vectorielles et intégrale de Bochner

Nous rappelons quelques résultats nécessaires sur les mesures à valeurs vectorielles et les intégrales de Bochner dont nous avons besoin dans cet article. Pour les faits généraux, nous renvoyons à [9, 10].

Lemme 2.5 (8.6.4, [9]). *Soit X un espace de Banach et $f_k : [0, 1] \rightarrow X$ des fonctions continûment différentiables telles que (i) $\sum_k f_k(t_0)$ converge dans X pour un certain $t_0 \in [0, 1]$, et (ii) $\sum_k f'_k(t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Alors $\sum_k f_k(t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction C^1 g , et $g'(t) = \sum_k f'_k(t)$ pour tout t .*

Théorème 2.6 (Théorème 2, Section 2.1, [10]). *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini et soit X un espace de Banach complexe. Une fonction $f : \Omega \rightarrow X$ est μ -mesurable si et seulement si*

1. *f est μ -essentiellement à valeurs séparables, c’est-à-dire qu’il existe $E \in \Sigma$ avec $\mu(E) = 0$ et tel que $f(\Omega \setminus E)$ soit un sous-ensemble (pour la norme) séparable de X , et*
2. *f est faiblement μ -mesurable.*

Corollaire 2.7. *Supposons que Ω soit un espace métrique compact et que Σ contienne la σ -algèbre de Borel de Ω . Si $f : \Omega \rightarrow X$ est continue, alors f est μ -mesurable.*

Démonstration. Pour tout $x^* \in X^*$, la fonction $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et donc μ -mesurable. Ainsi f est faiblement μ -mesurable. Comme Ω est métrique compact, il est séparable, et par conséquent $f(\Omega)$ est séparable. Donc f est μ -essentiellement à valeurs séparables en prenant $E = \emptyset$. Le résultat découle du Théorème 2.6. $\square$

Théorème 2.8 (Théorème 2, Section 2.2, [10]). *Une fonction μ -mesurable $f : \Omega \rightarrow X$ est intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.*

Lemme 2.9. *Si X est un espace de Banach et $f : \Omega \rightarrow X$ est continue sur un espace métrique compact Ω muni d’une mesure de Borel finie μ , alors f est intégrable au sens de Bochner.*

Démonstration. Par le Corollaire 2.7, f est μ -mesurable ; comme Ω est compact et f continue, $\|f\|$ est bornée, donc $\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \mu(\Omega) \sup_\Omega \|f\| < \infty$. Appliquer le Théorème 2.8. $\square$

Théorème 2.10 (Théorème 9, Section 2.2, [10]). *Soit f intégrable au sens de Bochner sur $[0, 1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors pour presque tout $s \in [0, 1]$ on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt = 0.$$

Par conséquent, pour presque tout $s \in [0, 1]$ on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) dt = f(s).$$

Pour le lemme suivant, pour chaque $t \in [0, 1]$, la dérivée de $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une application linéaire bornée $g'(t) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, X)$. Il existe un isomorphisme isométrique canonique $J : X \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}, X)$, défini par $J(x)(s) := sx$, d'inverse $J^{-1}(f) := f(1)$. Sous cette identification, nous considérons $g'(t)$ comme le vecteur $g'(t)(1) \in X$. Par conséquent, la continuité en norme de $t \mapsto g'(t) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, X)$ est équivalente à la continuité en norme de $t \mapsto g'(t)(1) \in X$. De plus, comme $\|g'(t)\| = \|g'(t)(1)\|$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, g' est intégrable au sens de Bochner si et seulement si $g'(\cdot)(1)$ est intégrable au sens de Bochner.

Lemme 2.11. *Si $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ est telle que g' est continue en norme, alors g' est intégrable au sens de Bochner sur $[0, 1]$ et $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$.*

Démonstration. Définissons $\phi(t) := \int_0^t g'(s) ds$. Par le Théorème 2.10, ϕ est différentiable et $\phi'(t) = g'(t)$. Donc $(g - \phi)' = 0$, donc $g - \phi$ est constante. Par conséquent, $g(1) - g(0) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 g'(t) dt$. $\square$

Remarque 2.12. Si nous supprimons l'identification énoncée ci-dessus, alors si $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ avec $t \mapsto g'(t) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, X)$ continue en norme, alors sur $[0, 1]$, $t \mapsto g'(t)(1) \in X$ est intégrable au sens de Bochner et $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)(1) dt$. Cela reste démontrable en prenant $\phi(t) := \int_0^t g'(s)(1) ds$, alors à nouveau $\phi'(t) = g'(t) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, X)$, car $\|\phi(t+h) - \phi(t) - g'(t)(h)\|/|h| \leq \sup_{|s-t| \leq |h|} \|g'(s)(1) - g'(t)(1)\|$. Pour une justification appropriée, voir [9, Page 335].

Lemme 2.13 (Théorème 4, Section 2.2, [10]). *Pour $f : \Omega \rightarrow X$ intégrable au sens de Bochner, $\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| d\mu$.*

Théorème 2.14 (Théorème 3, Section 2.2, [10]). *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini et soit (f_n) une suite de fonctions X -valuées intégrables au sens de Bochner sur Ω . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ en μ -mesure, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\omega \in \Omega : f_n - f > \varepsilon\}) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et s'il existe une fonction réelle g intégrable au sens de Lebesgue (μ -) sur Ω avec $f_n \leq g$ μ -presque partout, alors f est intégrable au sens de Bochner et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ pour tout $E \in \Sigma$. En fait, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f - f_n d\mu = 0$.*

Corollaire 2.15. *Dans le même cadre que le Théorème 2.14, si $f_n \rightarrow f$ uniformément sur Ω , chaque f_n étant intégrable au sens de Bochner, alors f est intégrable au sens de Bochner et $\int_\Omega f_n d\mu \rightarrow \int_\Omega f d\mu$.*

Démonstration. Comme f_n converge vers f uniformément, la convergence en μ -mesure s'ensuit. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n(\omega) - f_N(\omega)\| \leq 1$ pour tout $n \geq N$ et $\omega \in \Omega$. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\omega) := 1 + \sum_{1 \leq k \leq N} \|f_k(\omega)\|$. Comme chaque f_k est intégrable au sens de Bochner, $\|f_k\|$ est μ intégrable. Donc, g est μ intégrable. De plus $\|f_n\| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Théorème 2.16 (Théorème 6, Section 2.2, [10]). *Soit T un opérateur linéaire fermé défini dans X et à valeurs dans un espace de Banach Y . Si f et Tf sont intégrables au sens de Bochner par rapport à μ , alors*

$$T \left(\int_E f d\mu \right) = \int_E Tf d\mu$$

pour tout $E \in \Sigma$.

Lemme 2.17. *Si $f_k : \Omega \rightarrow X$ avec $\|f_k(x)\| \leq M_k$ pour tout $x \in \Omega$ et $\sum_k M_k < \infty$, alors $\sum_k f_k$ converge uniformément sur Ω .*

Démonstration. Mot pour mot à partir du test M de Weierstrass réel ou complexe, en utilisant la complétude de X et le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. $\square$

3 Un candidat pour l'isomorphisme d'ordre approché C^1

3.1 Les applications σ_R , ρ_R et la structure métrique quantique sur les systèmes d'opérateurs tronqués

Considérons le triplet spectral canonique $(\mathcal{A}_\Theta, L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}, D)$ pour le tore non commutatif décrit en Section 2.1. Pour $R \geq 0$ posons $\Lambda_R := \{k \in \mathbb{Z}^n : \|k\| \leq R\}$, et $N_R := \#\Lambda_R$. La projection spectrale de D sur $[-R, R]$ est

$$P_R = E_D([-R, R]) = E_{D^2}([0, R^2]) = E_{\sum_{j=1}^n \delta_j^2}([0, R^2]) \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} = P_R^0 \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \quad (3.1)$$

où P_R^0 est la projection orthogonale sur $\text{span}\{e_k : k \in \Lambda_R\} \subseteq L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau)$. Nous avons $\text{rank}(P_R^0) = N_R$ et $H_R := P_R(L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}) \cong P_R^0 L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} =: H_R^0 \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Par conséquent, $\dim(H_R) = \text{rank}(P_R) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} N_R$ et $\dim(H_R^0) = N_R$. De toute évidence, chaque P_R commute avec D .

Notons $E_R := P_R^0 \pi_\tau(\mathcal{A}_\Theta) P_R^0 \subseteq \mathcal{B}(H_R^0) \cong M_{N_R}(\mathbb{C})$. Pour $T \in \mathcal{B}(H_R^0)$, définissons $T_{\lambda\nu} := \langle e_\lambda, T e_\nu \rangle$, $\lambda, \nu \in \Lambda_R$. Nous écrivons $D_R := P_R D P_R$, et par conséquent pour le triplet spectral de systèmes d'opérateurs (E_R, H_R, D_R) , nous avons $\pi_R : E_R \rightarrow \mathcal{B}(H_R)$ défini par $\pi_R(T) := T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Nous réservons ces notations tout au long de l'article :

$$E_R := P_R^0 \pi_\tau(\mathcal{A}_\Theta) P_R^0, \quad H_R := P_R^0 L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau) \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} = H_R^0 \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}, \quad D_R := P_R D P_R \quad (3.2)$$

où $P_R = P_R^0 \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ comme en (3.1).

Motivés par le cas classique des tores [20], nous définissons les applications $\rho_R : \mathcal{A}_\Theta \rightarrow E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$ et $\sigma_R : \mathcal{B}(H_R^0) \rightarrow \mathcal{A}_\Theta$ par

$$\rho_R(a) := P_R^0 \pi_\tau(a) P_R^0, \quad \sigma_R(T) := \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} T_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^*. \quad (3.3)$$

Observons que $\pi_R \circ \rho_R(a) = P_R a P_R$ pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$.

Lemme 3.1. Pour $a = \sum_k a_k e_k \in \mathcal{A}_\Theta$, si $\rho_R(a) := T$, alors

$$T_{\lambda\nu} = a_{\lambda-\nu} \omega(\lambda - \nu, \nu), \quad \lambda, \nu \in \Lambda_R.$$

Démonstration. Nous avons

$$T_{\lambda\nu} = \langle e_\lambda, \pi_\tau(a) e_\nu \rangle = \tau(e_\lambda^* a e_\nu) = \sum_k a_k \tau(e_\lambda^* e_k e_\nu) = \sum_k a_k \omega(k, \nu) \tau(e_\lambda^* e_{k+\nu}),$$

ce qui montre que $\tau(e_\lambda^* e_{k+\nu}) = \delta_{\lambda, k+\nu}$, forçant $k = \lambda - \nu$. $\square$

Maintenant, nous présentons un résultat général. Pour des espaces de Hilbert H, K et un vecteur unitaire $\xi \in K$, l'application $V_\xi : H \rightarrow H \otimes K$, donnée par $V_\xi(\eta) := \eta \otimes \xi$, est une isométrie linéaire. Pour $T \in \mathcal{B}(H)$ et $S \in \mathcal{B}(K)$,

$$V_\xi^*(T \otimes S)V_\xi = \langle S\xi, \xi \rangle T.$$

Lemme 3.2. Soient $n \geq 2$ et K un espace de Hilbert. Considérons $X = \sum_{j=1}^n X_j \otimes \sigma_j \in \mathcal{B}(K \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}})$ pour certains $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}(K)$, et $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}})$ sont des matrices auto-adjointes satisfaisant $\sigma_\mu^2 = I$ et $\sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \sigma_\mu = 0$ pour $\mu \neq \nu$.

Pour $\mu = 1, \dots, n$, soit $\{\xi_\mu^{j,+} : 1 \leq j \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}\}$ et $\{\xi_\mu^{j,-} : 1 \leq j \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}\}$ des bases orthonormées des espaces propres pour les valeurs propres $+1$ et -1 de σ_μ , respectivement. Soient $V_\mu^{j,\pm} : K \rightarrow K \otimes \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ les isométries $\eta \mapsto \eta \otimes \xi_\mu^{j,\pm}$, et définissons

$$\Phi_\mu(T) := \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{j=1}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}} \left((V_\mu^{j,+})^* T V_\mu^{j,+} - (V_\mu^{j,-})^* T V_\mu^{j,-} \right).$$

Alors

$$\Phi_\mu(X) = X_\mu, \text{ et donc } \|X_\mu\| \leq \|X\|, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Fixons un $\mu \in \{1, \dots, n\}$. Comme $n \geq 2$, choisissons $\nu \neq \mu$. La relation d'anticommutation implique que σ_ν envoie unitairement l'espace propre pour $+1$ de σ_μ sur l'espace propre pour -1 de σ_μ . Donc ces espaces propres ont la même dimension, à savoir $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$.

Comme $\sigma_\mu \xi_\mu^{j,\pm} = \pm \xi_\mu^{j,\pm}$, nous avons

$$(V_\mu^{j,\pm})^* X V_\mu^{j,\pm} = \sum_{\nu=1}^n \langle \sigma_\nu \xi_\mu^{j,\pm}, \xi_\mu^{j,\pm} \rangle X_\nu.$$

Pour $\nu \neq \mu$, en utilisant la relation d'anticommutation, nous obtenons $\sigma_\mu \sigma_\nu = -\sigma_\nu \sigma_\mu$ et donc

$$\sigma_\mu(\sigma_\nu \xi_\mu^{j,\pm}) = -\sigma_\nu \sigma_\mu \xi_\mu^{j,\pm} = \mp \sigma_\nu \xi_\mu^{j,\pm}.$$

Ainsi $\sigma_\nu \xi_\mu^{j,\pm}$ appartient à l'espace propre pour ∓ 1 de σ_μ , tandis que $\xi_\mu^{j,\pm}$ appartient à l'espace propre pour ± 1 . Comme σ_μ est auto-adjointe, ces espaces propres sont orthogonaux. D'où

$$\langle \sigma_\nu \xi_\mu^{j,\pm}, \xi_\mu^{j,\pm} \rangle = 0, \quad \nu \neq \mu.$$

D'autre part, $\langle \sigma_\mu \xi_\mu^{j,+}, \xi_\mu^{j,+} \rangle = 1$ et $\langle \sigma_\mu \xi_\mu^{j,-}, \xi_\mu^{j,-} \rangle = -1$. Par conséquent, $(V_\mu^{j,+})^* X V_\mu^{j,+} = X_\mu$ et $(V_\mu^{j,-})^* X V_\mu^{j,-} = -X_\mu$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(X) &= \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{j=1}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}-1} (X_\mu - (-X_\mu)) \\ &= \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} 2^{\lfloor n/2 \rfloor-1} 2X_\mu = X_\mu.\end{aligned}$$

Enfin, comme $V_\mu^{j,\pm}$ est une isométrie, $\|(V_\mu^{j,\pm})^* T V_\mu^{j,\pm}\| \leq \|T\|$. D'où

$$\begin{aligned}\|\Phi_\mu(T)\| &\leq \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{j=1}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}-1} (\|(V_\mu^{j,+})^* T V_\mu^{j,+}\| + \|(V_\mu^{j,-})^* T V_\mu^{j,-}\|) \\ &\leq \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} 2^{\lfloor n/2 \rfloor-1} 2\|T\| = \|T\|.\end{aligned}$$

En prenant $T = X$, on obtient $\|X_\mu\| = \|\Phi_\mu(X)\| \leq \|X\|$. □

Sur $H_R^0 = \text{span}\{e_\lambda : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_R\}$, définissons

$$L_\mu e_\lambda := \lambda_\mu e_\lambda, \quad \text{c'est-à-dire} \quad L_\mu := P_R^0 \delta_\mu P_R^0, \quad (3.4)$$

pour $\mu = 1, \dots, n$. Ainsi, L_μ est la restriction de la dérivation δ_μ à l'espace tronqué. Observons aussi que les L_μ commutent entre elles, étant des matrices diagonales.

Lemme 3.3. *Nous avons $D_R = \sum_{j=1}^n L_j \otimes \sigma_j$, et par conséquent, pour $T \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$,*

$$[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}] = \sum_{j=1}^n [L_j, T] \otimes \sigma_j,$$

avec $[L_\mu, T]_{\lambda\nu} = (\lambda_\mu - \nu_\mu) T_{\lambda\nu}$. De plus, nous avons $\|[L_\mu, T]\| \leq \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|$.

Démonstration. Comme $P_R = P_R^0 \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$, nous avons $D_R = \sum_{j=1}^n L_j \otimes \sigma_j$. Comme L_μ est diagonale avec $L_\mu e_\lambda = \lambda_\mu e_\lambda$, si $T = [T_{\lambda\nu}]_{\lambda, \nu \in \Lambda_R}$, alors $(L_\mu T)_{\lambda\nu} = \lambda_\mu T_{\lambda\nu}$ et $(T L_\mu)_{\lambda\nu} = T_{\lambda\nu} \nu_\mu$. D'où, $[L_\mu, T]_{\lambda\nu} = (\lambda_\mu - \nu_\mu) T_{\lambda\nu}$, et l'expression souhaitée du commutateur s'ensuit. Enfin, en appliquant le Lemme 3.2 avec $K = H_R^0$, l'inégalité requise s'ensuit. □

Proposition 3.4. *(E_R, L_R) sont des espaces métriques quantiques compacts pour tout $R \geq 0$, où $L_R(T) := \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|$, pour $T \in E_R$.*

Démonstration. De toute évidence $L_R(T) = L_R(T^*)$, et nous montrons que $\ker(L_R) = \mathbb{C} \cdot I_{N_R}$. Supposons $[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}] = 0$. Par Lemma 3.3, nous obtenons $[L_\mu, T] = 0$ pour $\mu = 1, \dots, n$, ce qui implique en outre que $[L_\mu, T]_{\lambda\nu} = (\lambda_\mu - \nu_\mu) T_{\lambda\nu} = 0$ pour tous $\lambda, \nu \in \Lambda_R$. Donc lorsque $\lambda \neq \nu$, nous avons $T_{\lambda\nu} = 0$, et si $T = \rho_R(a) \in E_R$, alors pour tout $\lambda \in \Lambda_R$, nous avons $T_{\lambda\lambda} = a_{\lambda-\lambda} w(\lambda-\lambda, \lambda) = a_0$ par Lemma 3.1. Cela implique que $T = a_0 I_{N_R}$, et par conséquent T est scalaire. La réciproque est évidente. Par conséquent, L_R induit une norme sur $E_R/\mathbb{C} \cdot I_{N_R}$, et en raison de la dimension finie elle est équivalente à la norme quotient $\|\cdot\|_q$. Par [24, Theorem 1.8], la métrique induite par L_R sur l'espace des états $\mathcal{S}(E_R)$ métrique la topologie faible $*$ sur celui-ci. □

3.2 Compositions et C^1 -contractivité de ρ_R et σ_R

Dans cette sous-section, nous obtenons les expressions précises pour les compositions $\sigma_R \circ \rho_R$ et $\rho_R \circ \sigma_R$. Ceci est suivi par la démonstration de la C^1 -contractivité des applications ρ_R et σ_R .

Rappelons le résultat suivant de [20].

Lemme 3.5. *Pour $k \in \mathbb{Z}^n$, soit $N_L(\Lambda_R, k) := \#\{(\lambda, \nu) \in \Lambda_R^2 : \lambda - \nu = k\}$ et $m_R(k) := N_L(\Lambda_R, k)/N_R$, alors*

1. $m_R(k) \in [0, 1]$.
2. $m_R(k) = 0$ si $k \notin \Lambda_R - \Lambda_R$.
3. $m_R(k) = m_R(-k)$.
4. De plus définissons $L(k) := \overline{B}(0, R) \cap \overline{B}(k, R) \cap \mathbb{Z}^n$, et $N'_L(R, k) = \#L(k)$. Alors $m_R(k) = N'_L(R, k)/N_R$.
5. Pour $k \in \mathbb{Z}^n$ fixé, $m_R(k) \rightarrow 1$ lorsque $R \rightarrow \infty$.

Démonstration. Pour (i), de toute évidence pour chaque $\nu \in \Lambda_R$, il y a au plus un $\lambda \in \Lambda_R$ tel que $\lambda - \nu = k$. Les parties (ii) et (iii) sont faciles. Pour (iv), soit $A(k) := \{(\lambda, \nu) \in \Lambda_R^2 : \lambda - \nu = k\}$. Alors $\phi : A(k) \rightarrow L(k)$ définie par $\phi((\lambda, \nu)) := \lambda$, est une bijection bien définie d'inverse $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda - k)$. La partie (v) découle de [20, Lemma 3.7]. $\square$

Proposition 3.6. *Nous avons*

$$\sigma_R \circ \rho_R = F_{m_R}, \quad \text{où } F_{m_R}\left(\sum_k a_k e_k\right) := \sum_k m_R(k) a_k e_k, \quad (3.5)$$

et

$$\rho_R \circ \sigma_R = S_{m_R} \text{ sur } E_R, \quad \text{où } \left(S_{m_R}(T)\right)_{\lambda\nu} := m_R(\lambda - \nu) T_{\lambda\nu}. \quad (3.6)$$

Démonstration. Soit $a = \sum_k a_k e_k$. Alors

$$\sigma_R \rho_R(a) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} (\rho_R(a))_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^*.$$

Par le Lemme 3.1 et 2.1, nous obtenons $(\rho_R(a))_{\lambda\nu} = a_{\lambda-\nu} \omega(\lambda - \nu, \nu)$ et $e_\lambda e_\nu^* = \overline{\omega(\lambda - \nu, \nu)} e_{\lambda-\nu}$.

Nous avons

$$\sigma_R \rho_R(a) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} a_{\lambda-\nu} \omega(\lambda - \nu, \nu) \cdot \overline{\omega(\lambda - \nu, \nu)} e_{\lambda-\nu} = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} a_{\lambda-\nu} e_{\lambda-\nu}.$$

La phase s'annule exactement, pour tout Θ . En regroupant par $k = \lambda - \nu$ (il y a exactement $N_L(\Lambda_R, k)$ tels couples), on obtient $\sigma_R \rho_R(a) = \sum_k m_R(k) a_k e_k = F_{m_R}(a)$, ce qui prouve (3.5).

Pour (3.6), soit $T = [T_{\lambda\nu}]_{\lambda,\nu} \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$, $T = \rho_R(a)$, de sorte que $T_{\lambda\nu} = a_{\lambda-\nu}\omega(\lambda - \nu, \nu)$. Par (3.3), $\sigma_R(T) = F_{m_R}(a)$, avec coefficients de Fourier $(\sigma_R(T))_k = m_R(k)a_k$. Donc, par Lemma 3.1 nous avons

$$(\rho_R(\sigma_R(T)))_{\lambda\nu} = (\sigma_R(T))_{\lambda-\nu}\omega(\lambda - \nu, \nu) = m_R(\lambda - \nu)a_{\lambda-\nu}\omega(\lambda - \nu, \nu) = m_R(\lambda - \nu)T_{\lambda\nu}.$$

D'où $\rho_R \circ \sigma_R(T) = S_{m_R}(T)$. □

Nous passons maintenant à la démonstration de la C^1 -contractivité de (ρ_R, σ_R) . Rappelons que pour toute projection $P \in \mathcal{B}(H)$ et π une $*$ -représentation unifière de A sur H , l'application $a \mapsto P\pi(a)P$ est complètement positive et contractante, i.e.

$$\|P\pi(a)P\| \leq \|\pi(a)\|, \text{ ou, plus généralement, } \|PXP\| \leq \|X\|, \quad (3.7)$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(H)$.

Proposition 3.7. *Pour chaque $R \geq 0$, l'application ρ_R est unifière, complètement positive, C^1 -contractante.*

Démonstration. L'unitalité, la complète positivité et la contractivité en norme ($\|\rho_R(a)\| \leq \|\pi_\tau(a)\| = \|a\|$) découlent de (3.7), puisque ρ_R est une compression par la projection P_R^0 de la $*$ -représentation π_τ . Comme P_R commute avec D , nous obtenons de (3.2) ce qui suit :

$$[D_R, \pi_R \rho_R(a)] = D_R P_R a P_R - P_R a P_R D_R = P_R [D, a] P_R,$$

et donc par (3.7), nous obtenons $\|[D_R, \pi_R \rho_R(a)]\| \leq \|[D, a]\|$. □

Pour prouver la même chose pour l'application σ_R , rappelons le résultat suivant.

Théorème 3.8 (Théorème 3.14, [22]). *Soient $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre et $\phi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ une application linéaire. Supposons que $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ désignent les unités matricielles standard pour $M_n(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. ϕ est complètement positive.
2. ϕ est n -positive.
3. $(\phi(E_{i,j}))_{i,j=1}^n$ est positive dans $M_n(\mathcal{B})$.

Lemme 3.9. *Pour chaque $R \geq 0$, l'application $\sigma_R : \mathcal{B}(H_R^0) \rightarrow \mathcal{A}_\Theta$ est unifière et complètement positive. Par conséquent, σ_R est complètement contractante.*

Démonstration. Pour voir que σ_R est unifière, observons que $\sigma_R(I) = \frac{1}{N_R} \sum_\lambda e_\lambda e_\lambda^* = \frac{1}{N_R} \sum_\lambda 1 = 1$, puisque chaque e_λ est unitaire.

Pour prouver la complète positivité, nous utilisons (iii) du Théorème 3.8. Fixons une énumération $\Lambda_R = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_R}\}$ et soit $E_{ij} \in M_{N_R}(\mathbb{C})$ les unités matricielles standard. Comme $M_{N_R}(\mathbb{C})$ est $*$ -isomorphe à $\mathcal{B}(H_R^0)$ via $E_{ij} \mapsto \tilde{E}_{\lambda_i \lambda_j}$, où $\tilde{E}_{\lambda_i \lambda_j}(e_{\lambda_k}) := \delta_{jk} e_{\lambda_i}$ avec δ_{jk} le delta de Kronecker. Alors $\sigma_R(E_{ij}) = \frac{1}{N_R} e_{\lambda_i} e_{\lambda_j}^*$. D'où,

$$(\sigma_R(E_{ij}))_{i,j=1}^{N_R} = \frac{1}{N_R} [e_{\lambda_i} e_{\lambda_j}^*]_{i,j=1}^{N_R}.$$

Soit

$$Y = \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ e_{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda_{N_R}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{N_R}(\mathcal{A}_\Theta).$$

Alors $YY^* = [e_{\lambda_i} e_{\lambda_j}^*]_{i,j=1}^{N_R}$, et donc $(\sigma_R(E_{ij}))_{i,j=1}^{N_R} = \frac{1}{N_R} YY^* \geq 0$. Ainsi, par le Théorème 3.8, σ_R est complètement positive. $\square$

Remarque 3.10. Dans [20], la complète positivité de l'application σ_R dans le cas des tores classiques était automatique puisque l'image était une C^* -algèbre commutative. Dans notre cas, nous avons exploité le fait que le domaine est $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition 3.11. *Pour tout $T \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$, nous avons*

$$[D, \sigma_R(T) \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}] = (\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})})([D_R, \pi_R(T)]),$$

où $D_R = P_R D P_R$ est considéré comme agissant sur $\mathcal{B}(H_R^0) \otimes M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(H_R)$ ($\pi_R(T)$ par (3.2) est $T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}$), et $\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})}$ est l'amplification matricielle seconde de l'application σ_R . Ainsi, nous avons

$$\|[D, \sigma_R(T) \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}]\| \leq \|[D_R, \pi_R(T)]\|.$$

Démonstration. Par Lemma 3.3, nous obtenons

$$[D_R, \pi_R(T)] = [D_R, T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}] = \sum_{j=1}^n [L_j, T] \otimes \sigma_j \in \mathcal{B}(H_R^0) \otimes M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C}),$$

et $[L_\mu, T]_{\lambda\nu} = (\lambda_\mu - \nu_\mu) T_{\lambda\nu}$ pour $\mu = 1, \dots, n$. La seconde amplification de l'application $\sigma_R : \mathcal{B}(H_R^0) \rightarrow \mathcal{A}_\Theta$, i.e., $\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})} : \mathcal{B}(H_R^0) \otimes M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{A}_\Theta \otimes M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})$, nous donne ce qui suit :

$$\begin{aligned} (\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})})([D_R, T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}]) &= (\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})})(\sum_{j=1}^n [L_j, T] \otimes \sigma_j) \\ &= \frac{1}{N_R} \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda, \nu} (\lambda_j - \nu_j) T_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^* \otimes \sigma_j. \end{aligned}$$

Comme $\sigma_R(T) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu} T_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^*$, observons que

$$\delta_\mu(e_\lambda e_\nu^*) = \delta_\mu(\overline{\omega(\lambda - \nu, \nu)} e_{\lambda-\nu}) = (\lambda_\mu - \nu_\mu) \overline{\omega(\lambda - \nu, \nu)} (e_{\lambda-\nu}) = (\lambda_\mu - \nu_\mu) e_\lambda e_\nu^*$$

pour $\mu = 1, \dots, n$. D'où, par linéarité nous obtenons

$$\delta_\mu(\sigma_R(T)) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu} T_{\lambda\nu} \delta_\mu(e_\lambda e_\nu^*) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu} (\lambda_\mu - \nu_\mu) T_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^*, \quad \text{pour } \mu = 1, \dots, n.$$

Par conséquent,

$$(\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{C})})([D_R, T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}]) = \sum_{j=1}^n \delta_j(\sigma_R(T)) \otimes \sigma_j.$$

D'autre part,

$$[D, \sigma_R(T) \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}] = \sum_{j=1}^n \delta_j(\sigma_R(T)) \otimes \sigma_j,$$

ce qui prouve la première équation.

Pour la seconde équation, comme nous le savons de Lemme 3.9 que $\sigma_R : \mathcal{B}(H_R^0) \rightarrow \mathcal{A}_\Theta$ est complètement contractante, nous obtenons que $\|[D, \sigma_R(T) \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\| = \|(\sigma_R \otimes \text{id}_{M_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}(\mathbb{C})})([D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}])\| \leq \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|$. $\square$

4 Convergence de Gromov–Hausdorff

4.1 Action de $\mathbb{R}^n$ et bon noyau

Pour le tore non commutatif $\mathcal{A}_\Theta$, nous avons l'action de $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ sur la C^* -algèbre $\mathbb{T}_\Theta$ pour laquelle $\mathcal{A}_\Theta$ est la sous-algèbre des éléments lisses. L'application de revêtement $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ donnée par $(s_1, \dots, s_n) \mapsto (e^{is_1}, \dots, e^{is_n})$ nous permet de tirer en arrière l'action de $\mathbb{T}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, et nous avons le fait suivant :

Lemme 4.1. *Pour $x \in \mathbb{R}^n$, considérons l'application $\alpha_x(e_k) := e^{ik \cdot x} e_k$ pour $e_k \in \mathcal{A}_\Theta$. De plus, elle s'étend en un $*$ -automorphisme de $\mathcal{A}_\Theta$ et $\|\alpha_x(a)\| = \|a\|$ pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$.*

Lemme 4.2. *Pour $a \in \mathcal{A}_\Theta$ fixé et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la courbe $g(t) := \alpha_{tx}(a)$ est de classe C^1 en norme (en fait, C^∞), et*

$$g'(t) = i \sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu(a)).$$

Démonstration. Écrivons $g(t) = \sum_k f_k(t)$, où $f_k(t) := a_k e^{itk \cdot x} e_k \in \mathcal{A}_\Theta$. Chaque f_k est C^1 avec $f'_k(t) = i(k \cdot x) a_k e^{itk \cdot x} e_k$. Alors $g(t_0) = \sum_k f_k(t_0)$ converge en utilisant $\|e_k\| = 1$ et la décroissance rapide de (a_k) . Pour la série des dérivées, $\|f'_k(t)\| = |k \cdot x| |a_k| \leq \|x\| \|k\| |a_k|$, et $\sum_k \|k\| |a_k| < \infty$ par décroissance rapide, donnant ainsi une borne indépendante de t . Par le Lemme 2.17, $\sum_k f'_k(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le Lemme 2.5 pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_k f'_k(t) = \sum_k a_k i \left(\sum_{\mu=1}^n k_\mu x_\mu \right) e^{itk \cdot x} e_k \\ &= i \sum_k \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu e^{itk \cdot x} k_\mu a_k e_k \right) \\ &= i \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu \sum_k e^{itk \cdot x} k_\mu a_k e_k \right) \\ &= i \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx} \left(\sum_k k_\mu a_k e_k \right) \right) \\ &= i \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu(a)) \right) \\ &= i \sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu(a)), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve $\square$

Lemme 4.3. *Pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$ et $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$a - \alpha_x(a) = -i \int_0^1 \sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu(a)) dt.$$

Démonstration. Par le Lemme 4.2, $g(t) = \alpha_{tx}(a)$ est C^1 et sa dérivée $g'(t) = i \sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu(a))$ est continue en norme en t (pour chaque $\mu = 1, \dots, n$, la fonction $t \mapsto \alpha_{tx}(\delta_\mu(a))$ est donnée par une série de Fourier uniformément convergente en t , par le même argument que le Lemme 4.2 appliqué à $\delta_\mu a \in \mathcal{A}_\Theta$ à la place de a). En appliquant le Lemme 2.11, nous obtenons $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$, ce qui montre que $\alpha_x(a) - a = \int_0^1 g'(t) dt$. $\square$

Nous consignons un corollaire du Lemme 3.2 qui sera utile.

Corollaire 4.4. *Pour $a \in \mathcal{A}_\Theta$ et $\mu = 1, \dots, n$, $\|\delta_\mu(a)\| \leq \|[D, a]\|$.*

Démonstration. En appliquant le Lemme 3.2 avec $K = L^2(\mathcal{A}_\Theta, \tau)$. Nous avons

$$X = [D, a] = \sum_{\mu=1}^n \pi_\tau(\delta_\mu(a)) \otimes \sigma_\mu.$$

Cela nous donne $\|\delta_\mu(a)\| = \|\pi_\tau(\delta_\mu(a))\| \leq \|[D, a]\|$. □

Proposition 4.5. *Soient $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un représentant quelconque de $\tilde{x}$. Pour l'action de $\mathbb{T}^n$ $\alpha_{\tilde{x}}(e_k) := \alpha_x(e_k)$, où α_x est comme dans Lemma 4.1, sur $\mathcal{A}_\Theta$, nous avons*

$$\|a - \alpha_{\tilde{x}}(a)\| \leq \sqrt{n} \, l(\tilde{x}) \|[D, a]\|,$$

où $l(\tilde{x}) := \inf_{k \in \mathbb{Z}^n} \|x + 2\pi k\|$.

Démonstration. Comme $\alpha_x = \alpha_{x+2\pi k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, nous avons le caractère bien défini de l'action de $\mathbb{T}^n$. Maintenant, en appliquant Lemma 4.3, Lemma 2.13, Lemma 4.1 et Corollary 4.4 dans cet ordre, nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} \|a - \alpha_{\tilde{x}}(a)\| = \|a - \alpha_x(a)\| &= \left\| -i \int_0^1 \sum_{\mu=1}^n x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu a) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \sum_{\mu} x_\mu \alpha_{tx}(\delta_\mu a) \right\| dt \\ &\leq \sum_{\mu} \int_0^1 |x_\mu| \|\alpha_{tx}(\delta_\mu a)\| dt \\ &= \sum_{\mu} |x_\mu| \|\delta_\mu a\| \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_n|) \|[D, a]\| \\ &\leq \sqrt{n} \|x\| \|[D, a]\|. \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur tous les représentants de $\tilde{x}$ dans la dernière inégalité, on prouve l'assertion. □

Rappelons que $\Lambda_R := \{k \in \mathbb{Z}^n : \|k\| \leq R\}$ pour $R \geq 0$.

Definition 4.6. *Pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$, définissons*

$$K_R(\tilde{x}) := \frac{1}{N_R} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda_R} e^{i\lambda \cdot x} \right|^2,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est un représentant quelconque de $\tilde{x}$. Le caractère bien défini découle de la définition de Λ_R .

Lemme 4.7. *Nous avons $K_R(\tilde{x}) \geq 0$, $\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1$, et $K_R(\tilde{x}) = \sum_k m_R(k) e^{ik \cdot x}$, où $m_R(k)$ est comme défini dans Lemma 3.5.*

Démonstration. Pour observer $\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1$, utiliser la mesure de Haar probabilisée normalisée sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$. Nous avons $K_R(\tilde{x}) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} e^{i(\lambda - \nu) \cdot x}$, et en regroupant les mêmes puissances par $k = \lambda - \nu$ on obtient $K_R(\tilde{x}) = \sum_k m_R(k) e^{ik \cdot x}$. □

Lemme 4.8. *Nous avons pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$*

$$F_{m_R}(a) = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \alpha_{\tilde{x}}(a) d\tilde{x},$$

où F_{m_R} est comme défini en Proposition 3.5.

Démonstration. Soit $S_k(\tilde{x}) := \sum_{\|\ell\| \leq k} a_\ell e^{i\ell \cdot \tilde{x}} e_\ell$. Par la décroissance rapide de (a_ℓ) et $\|e_\ell\| = 1$, nous avons $\|S_k(\tilde{x}) - \alpha_{\tilde{x}}(a)\| \leq \sum_{\|\ell\| > k} |a_\ell|$, qui tend vers 0 uniformément en $\tilde{x}$. Chaque S_k est une application continue de $\mathbb{T}^n$ vers $\mathcal{A}_\Theta$, et donc intégrable au sens de Bochner par le Lemme 2.9. Comme $S_k \rightarrow \alpha_\star(a)$ uniformément et K_R est bornée sur l'espace compact $\mathbb{T}^n$, nous avons $K_R \cdot S_k \rightarrow K_R \cdot \alpha_\star(a)$ uniformément. Par le Corollaire 2.15,

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) S_k(\tilde{x}) d\tilde{x} \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \alpha_{\tilde{x}}(a) d\tilde{x} \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty.$$

D'autre part, par Lemma 4.7 nous obtenons

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) S_k(\tilde{x}) d\tilde{x} = \sum_{\|\ell\| \leq k} \left(\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) e^{i\ell \cdot \tilde{x}} d\tilde{x} \right) a_\ell e_\ell = \sum_{\|\ell\| \leq k} m_R(-\ell) a_\ell e_\ell.$$

Comme $F_{m_R}(a) = \sum_\ell m_R(\ell) a_\ell e_\ell$, en utilisant $m_R(-\ell) = m_R(\ell)$ et en faisant tendre $k \rightarrow \infty$, nous concluons la preuve. $\square$

Les résultats principaux de cette sous-section sont les suivants.

Proposition 4.9. *Pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$, nous avons*

$$a - \sigma_R \circ \rho_R(a) = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) (a - \alpha_{\tilde{x}}(a)) d\tilde{x},$$

et

$$\|a - \sigma_R \circ \rho_R(a)\| \leq \gamma_R \| [D, a] \|, \quad \gamma_R := \sqrt{n} \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Démonstration. Par Proposition 3.6 et le Lemme 4.8, nous avons $\sigma_R \rho_R(a) = F_{m_R}(a) = \int K_R(\tilde{x}) \alpha_{\tilde{x}}(a) d\tilde{x}$. Comme $\int K_R = 1$, nous pouvons prendre $a = \int K_R(\tilde{x}) a d\tilde{x}$, et cela donne la première équation. Pour la seconde équation, en utilisant Lemma 2.13 et Proposition 4.5 nous avons

$$\|a - \sigma_R \rho_R(a)\| \leq \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \|a - \alpha_{\tilde{x}}(a)\| d\tilde{x} \leq \sqrt{n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) \| [D, a] \|.$$

$\square$

Proposition 4.10. *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $B_\varepsilon(0) = \{\tilde{x} \in \mathbb{T}^n : l(\tilde{x}) < \varepsilon\}$, alors*

$$\int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\varepsilon(0)} K_R(\tilde{x}) d\tilde{x} \longrightarrow 0$$

lorsque $R \rightarrow \infty$. Par conséquent,

$$\gamma_R := \sqrt{n} \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon, \eta > 0$ quelconques. Choisissons une fonction continue $f : \mathbb{T}^n \rightarrow [0, 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f \equiv 1$ en dehors de $B_\varepsilon(0)$ (par ex. $f(\tilde{x}) = \min\{1, l(\tilde{x})/\varepsilon\}$). Par le théorème de Stone–Weierstrass, choisissons un polynôme trigonométrique $p(\tilde{x}) = \sum_{\|k\| \leq M} c_k e^{ik \cdot x}$ avec $\|f - p\|_\infty < \eta$. Comme $K_R \geq 0$ et $\int K_R = 1$, nous avons $\left| \int_{\mathbb{T}^n} K_R(f - p) \right| \leq \|f - p\|_\infty \leq \eta$. Aussi,

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_R p = \sum_{\|k\| \leq M} c_k m_R(k) \longrightarrow \sum_{\|k\| \leq M} c_k = p(0) \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty,$$

par le Lemme 3.5. Observons que comme $f(0) = 0$, nous avons $|p(0)| = |f(0) - p(0)| \leq \|f - p\|_\infty \leq \eta$. D'où,

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{T}^n} K_R f \right| \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \left(\left| \int_{\mathbb{T}^n} K_R p \right| + \left| \int_{\mathbb{T}^n} K_R(f - p) \right| \right) \leq 2\eta.$$

Comme $\eta > 0$ était arbitraire, nous obtenons $\int_{\mathbb{T}^n} K_R f \rightarrow 0$. Comme $f \geq \chi_{\mathbb{T}^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ et $K_R \geq 0$, nous avons $\int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\varepsilon(0)} K_R \leq \int K_R f$ qui tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$. Cela prouve la première assertion.

Pour la seconde partie, soit $M := \sup_{\mathbb{T}^n} l(\tilde{x}) < \infty$. Pour $\varepsilon > 0$, nous obtenons

$$\gamma_R = \sqrt{n} \int_{B_\varepsilon(0)} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x} + \sqrt{n} \int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\varepsilon(0)} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq \sqrt{n} \varepsilon + \sqrt{n} M \int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\varepsilon(0)} K_R,$$

en utilisant $\int K_R = 1$ et $l(\tilde{x}) < \varepsilon$ pour le premier terme. Par le Lemme 4.10, $\limsup_R \gamma_R \leq \sqrt{n} \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons que $\gamma_R \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$. $\square$

Remarque 4.11. Les lecteurs peuvent consulter la sous-section 3.3 de [20]. K_R était la transformée de Fourier inverse de $\{m_R(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$; en utilisant ceci et quelques autres faits d'analyse harmonique, les auteurs de [20] ont prouvé que K_R est un bon noyau dans la Proposition 3.8.

4.2 Isomorphisme d'ordre approché C^1 et convergence

Nous commençons par fixer la notation suivante.

Notation 4.12. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit

$$W_x := e^{i(\sum_{\mu=1}^n x_\mu L_\mu)} = \sum_{m \geq 0} \frac{\left(i(\sum_{\mu=1}^n x_\mu L_\mu) \right)^m}{m!} \in \mathcal{B}(H_R^0)$$

où les L_μ sont comme définis en (3.4). En utilisant le fait que les L_μ commutent entre elles, nous obtenons que $W_x e_\lambda = e^{i\lambda \cdot x} e_\lambda$. Nous voyons aussi que $W_x = W_{x+2\pi k}$, car $W_x e_\lambda = e^{i\lambda \cdot x} e_\lambda = e^{i\lambda \cdot (x+2\pi k)} e_\lambda = W_{x+2\pi k} e_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda_R$.

Définissons $\beta_x(T) := W_x T W_x^*$ pour $T \in \mathcal{B}(H_R^0)$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Clairement $\|\beta_x(T)\| = \|T\|$ et $\beta_x(\rho_R(a)) = \rho_R(\alpha_x(a))$, pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 4.13. Pour tout $T \in \mathcal{B}(H_R^0)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(H_R^0)$ donnée par $t \mapsto \beta_{tx}(T)$ est de classe C^1 en norme et

$$\frac{d}{dt} \beta_{tx}(T) = i \beta_{tx} \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu [L_\mu, T] \right). \quad (4.1)$$

Démonstration. Définissons $x \cdot L := \sum_{\mu=1}^n x_\mu L_\mu$, qui est auto-adjointe, et observons que $W_{tx} = e^{it(x \cdot L)}$ commute avec $x \cdot L$. La règle du produit nous donne ce qui suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (W_{tx} T W_{tx}^*) &= i(x \cdot L) W_{tx} T W_{tx}^* - W_{tx} T W_{tx}^* i(x \cdot L) \\ &= i W_{tx} [x \cdot L, T] W_{tx}^* \\ &= i \beta_{tx}([x \cdot L, T]), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Pour $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n$, avec un représentant $x \in \mathbb{R}^n$, définissons l'application $\beta_{\tilde{x}}(T) := \beta_x(T)$, pour tout $T \in \mathcal{B}(H_R^0)$. Alors, nous avons une action bien définie β de $\mathbb{T}^n$ sur $\mathcal{B}(H_R^0)$. Observons que $\|\beta_{\tilde{x}}(T)\| = \|T\|$ et $\beta_{\tilde{x}}(\rho_R(a)) = \rho_R(\alpha_{\tilde{x}}(a))$, pour tout $a \in \mathcal{A}_\Theta$ et $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n$.

Proposition 4.14. *Pour tout $T \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$T - \beta_x(T) = -i \int_0^1 \beta_{tx} \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu [L_\mu, T] \right) dt, \quad \|T - \beta_x(T)\| \leq \sqrt{n} \|x\| \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|.$$

Par conséquent, pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n$,

$$\|T - \beta_{\tilde{x}}(T)\| \leq \sqrt{n} l(\tilde{x}) \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|.$$

Démonstration. Par le Lemme 4.13, l'application $t \mapsto \beta_{tx}(T)$ est de classe C^1 en norme. Par conséquent, le théorème fondamental du calcul intégral pour les intégrales de Bochner nous donne

$$\beta_x(T) - T = \int_0^1 \frac{d}{dt} \beta_{tx}(T) dt.$$

Ainsi,

$$T - \beta_x(T) = -i \int_0^1 \beta_{tx} \left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu [L_\mu, T] \right) dt.$$

Comme $\|\beta_x(T)\| = \|T\|$, en utilisant Lemma 2.13 nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} \|T - \beta_x(T)\| &\leq \int_0^1 \left\| \sum_{\mu=1}^n x_\mu [L_\mu, T] \right\| dt \\ &\leq \sum_{\mu=1}^n |x_\mu| \|[L_\mu, T]\|. \end{aligned}$$

Par Lemma 3.3, nous avons $\|[L_\mu, T]\| \leq \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|$ pour $\mu = 1, \dots, n$.

D'où,

$$\begin{aligned} \|T - \beta_x(T)\| &\leq (\sum_{\mu=1}^n |x_\mu|) \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\| \\ &\leq \sqrt{n} \|x\| \|[D_R, T \otimes I_{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}]\|. \end{aligned}$$

Comme $\beta_{\tilde{x}}(T) := \beta_x(T)$, en prenant l'infimum sur tous les représentants de $\tilde{x}$, on obtient l'inégalité souhaitée. $\square$

Lemme 4.15. *Pour $T \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$ et $\tilde{x} \in \mathbb{T}^n$, nous avons $(\beta_{\tilde{x}}(T))_{\lambda\nu} = e^{i(\lambda-\nu) \cdot x} T_{\lambda\nu}$, et*

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \beta_{\tilde{x}}(T) d\tilde{x} = S_{m_R}(T),$$

où $S_{m_R}(T)$ est comme défini en (3.6).

Démonstration. La première équation découle immédiatement de $W_x e_\lambda = e^{i\lambda \cdot x} e_\lambda$. Maintenant, observons que $\rho_R \circ F_{m_R} = S_{m_R} \circ \rho_R$, et soit $T = \rho_R(a)$ pour un certain $a \in \mathcal{A}_\Theta$. Alors, par Lemma 4.8 nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{m_R}(T) &= \rho_R(F_{m_R}(a)) \\ &= \rho_R\left(\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \alpha_{\tilde{x}}(a) d\tilde{x}\right). \end{aligned}$$

Comme ρ_R est une application linéaire bornée, en utilisant le Théorème 2.16 nous obtenons ce qui suit :

$$S_{m_R}(T) = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \rho_R(\alpha_{\tilde{x}}(a)) d\tilde{x} = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \beta_{\tilde{x}}(T) d\tilde{x}.$$

□

Proposition 4.16. *Pour $T \in E_R \subseteq \mathcal{B}(H_R^0)$, nous avons*

$$T - \rho_R \sigma_R(T) = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) (T - \beta_{\tilde{x}}(T)) d\tilde{x}, \quad \|T - \rho_R \sigma_R(T)\| \leq \gamma_R \| [D_R, T \otimes I_2] \|.$$

Démonstration. Par le Lemme 4.15 et Proposition 3.6, nous avons $\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \beta_{\tilde{x}}(T) d\tilde{x} = S_{m_R}(T) = \rho_R \sigma_R(T)$. En soustrayant de $T = \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) T d\tilde{x}$ on obtient la première équation. Pour la seconde équation, par Lemma 2.13 nous avons

$$\begin{aligned} \|T - \rho_R \sigma_R(T)\| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) \|T - \beta_{\tilde{x}}(T)\| d\tilde{x} \\ &\leq \sqrt{n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} K_R(\tilde{x}) l(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) \| [D_R, T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}] \| = \gamma_R \| [D_R, T \otimes I_{2\lfloor n/2 \rfloor}] \|, \end{aligned}$$

où la seconde inégalité découle de Proposition 4.14. □

Remarque 4.17. Dans le cas classique du tore, le fait que $\rho_R \circ \sigma_R$ soit une identité approchée de E_R était obtenu via une variante du résultat de Bożejko et Fendler, voir [20, Lemma 3.5]. L'argument de ce lemme repose fortement sur la commutativité de $C(\mathbb{T}^d)$ pour passer de la norme complètement bornée à la norme d'opérateur usuelle, et ne s'applique donc pas dans notre cadre non commutatif.

Le résultat principal de l'article est le suivant.

Théorème 4.18. *Les espaces d'états $(\mathcal{S}(E_R), d_{E_R})$ convergent vers $(\mathcal{S}(\mathcal{A}_\Theta), d_{\mathcal{A}_\Theta})$ en distance de Gromov–Hausdorff lorsque $R \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Nous avons les applications $\rho_R(a) = P_R^0 \pi_\tau(a) P_R^0$ et $\sigma_R(T) = \frac{1}{N_R} \sum_{\lambda, \nu \in \Lambda_R} T_{\lambda\nu} e_\lambda e_\nu^*$ de la Section 3. Par le Lemme 3.7 et 3.9, nous avons l'unitarité, la complète positivité et la contractivité en norme des applications ρ_R et σ_R , respectivement, pour chaque $R \geq 0$. La contractivité de Lipschitz de ρ_R découle de Proposition 3.7, et celle de σ_R découle de Proposition 3.11. Enfin, Proposition 4.9 et Proposition 4.16 avec le $\gamma_R \rightarrow 0$ commun (voir Proposition 4.10) établissent (ρ_R, σ_R) comme un isomorphisme d'ordre approché C^1 entre $(\mathcal{A}_\Theta, H, D)$ et les espaces tronqués spectralement $\{(E_R, H_R, D_R)\}_{R \geq 0}$. Par conséquent, par Theorem 2.4 le résultat s'ensuit. □

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la convergence de Gromov–Hausdorff quantique des systèmes d'opérateurs tronqués vers le tore non commutatif découle du résultat ci-dessus, en appliquant la Proposition 2.2.4 dans [16].

Toute notre analyse subsiste dans le cas $\Theta = 0$. Par conséquent, nous retrouvons le résultat principal de [20] comme cas particulier.

Corollaire 4.19. *Les espaces d'états des troncatures spectrales pour les tores convergent vers l'espace d'états des tores en distance de Gromov–Hausdorff.*

5 Analyse de structure : C^* -enveloppe et nombre de propagation

La C^* -enveloppe et le nombre de propagation déterminent d'autres structures des systèmes d'opérateurs tronqués. Nous ne rappelons pas leurs définitions et propriétés ici, mais renvoyons à [7, 11, 20] pour tous les détails.

Cette section découle principalement de [20, Section 4.1], à quelques changements nécessaires près dus aux cocycles non triviaux, et nous la faisons donc brève.

Rappelons $L(s)$, pour $s \in \mathbb{Z}^n$, du Lemme 3.5. Pour $k, \ell \in \Lambda_R$, soit $E_{k,\ell} \in \mathcal{B}(H_R^0) \cong M_{N_R}(\mathbb{C})$ l'unité matricielle standard. Soit $p \in \mathbb{Z}^n$, et définissons $T_p \in \mathcal{B}(H_R^0) \cong M_{N_R}(\mathbb{C})$ par $T_p := \rho_R(e_{-p})$. Alors Lemma 3.1 implique que $(T_p)_{\lambda\mu} = (e_{-p})_{\lambda-\mu} w(\lambda - \mu, \mu)$, où $(e_{-p})_{\lambda-\mu}$ est le $(\lambda - \mu)^{\text{ième}}$ -coefficient du développement de Fourier de e_{-p} , qui vaut 1 si et seulement si $\lambda - \mu = -p$. Donc $(T_p)_{\lambda\mu}$ est non nul si et seulement si $\lambda - \mu = -p$, et dans ce cas $(T_p)_{\lambda\mu} = w(-p, \mu)$. Cela prouve ce qui suit :

$$T_p = \sum_{s \in L(p)} w(-p, s) E_{s-p, s}. \quad (5.1)$$

Du raisonnement ci-dessus, il est aussi évident que $T_p = 0$ si $p \notin \Lambda_R - \Lambda_R$, car $p \notin \Lambda_R - \Lambda_R$ si et seulement si $L(p) = \emptyset$. Le support de la matrice T_p est $\{(s - p, s) : s \in L(p)\}$. De plus, il est facile de voir que $\{T_p : p \in \Lambda_R - \Lambda_R\}$ est une base de E_R . Enfin,

$$T_{(0,0,\dots,0)} = \sum_{s \in \Lambda_R} E_{s,s} = \text{id}_{H_R^0}.$$

Lemme 5.1. *Soient $p, q \in \Lambda_R - \Lambda_R$. Alors nous avons*

$$T_p T_q = w(-p, -q) \sum_{s \in L(p+q) \cap L(q)} w(-(p+q), s) E_{s-p-q, s}.$$

Démonstration. Soient $T_p = \sum_{m \in L(p)} w(-p, m) E_{m-p, m}$ et $T_q = \sum_{s \in L(q)} w(-q, s) E_{s-q, s}$. Alors la preuve est mot pour mot celle de [20], mais cette fois nous avons des facteurs supplémentaires, i.e.,

$$T_p T_q = \sum_{s \in L(q) \cap L(p+q)} w(-p, s - q) w(-q, s) E_{s-p-q, s}.$$

En utilisant les identités de cocycle, nous obtenons que

$$w(-p, s - q) w(-q, s) = w(-p, s) w(-p, -q) w(-q, s) = w(-p, -q) w(-(p+q), s)$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Comme cas particulier, pour $\ell, k \in \Lambda_R - \Lambda_R$ tels que $\ell + k \in \Lambda_R - \Lambda_R$, nous obtenons, pour $p = -k$ et $q = \ell + k$,

$$T_{-k} T_{\ell+k} = w(k, -(\ell + k)) \sum_{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k)} w(-\ell, s) E_{s-\ell, s}. \quad (5.2)$$

Définissons maintenant, pour $r \geq 0$, $\mathcal{K}_r := \text{co}(\Lambda_r) \subseteq \mathbb{R}^n$ (l'enveloppe convexe fermée de Λ_r). Clairement, $\mathcal{K}_r \subseteq \overline{B}(0, r)$, $\mathcal{K}_r \cap \mathbb{Z}^n = \Lambda_r$, et $\text{Ext}(\mathcal{K}_r) \subseteq \Lambda_r$.

Lemme 5.2. Fixons $p, q \in \Lambda_R$, et définissons $\ell := q - p \in \Lambda_R - \Lambda_R$. Alors il existe $m \in \text{Ext}(\mathcal{K}_R)$ tel que

$$\mathcal{K}_{\|q\|} \cap (\mathcal{K}_R - m + q) = \{q\}.$$

Posons $k := p - m \in \Lambda_R - \Lambda_R$. Alors $\ell + k \in \Lambda_R - \Lambda_R$, et $L(\ell) \cap L(\ell + k) \cap \mathcal{K}_{\|q\|} = \{q\}$. Par conséquent,

$$s \in L(\ell) \cap L(\ell + k), s \neq q \implies \|s\| > \|q\|.$$

Démonstration. Ceci découle mot pour mot de [20]. $\square$

Avec $p, q \in \Lambda_R$ fixés et ℓ, k comme dans le Lemme 5.2, définissons

$$c_{k,\ell}(s) := w(k, -(\ell + k))w(-\ell, s) \in \mathbb{S}^1 \text{ pour tout } s.$$

Alors, à partir de (5.2), nous obtenons que

$$\begin{aligned} T_{-k}T_{\ell+k} &= \sum_{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k)} c_{k,\ell}(s) E_{s-\ell,s} \\ &= \sum_{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k) \cap \mathcal{K}_{\|q\|}} c_{k,\ell}(s) E_{s-\ell,s} + \sum_{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k) \cap \mathcal{K}_{\|q\|}^c} c_{k,\ell}(s) E_{s-\ell,s} \\ &= c_{k,\ell}(q) E_{p,q} + \sum_{\substack{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k) \\ \|s\| > \|q\|}} c_{k,\ell}(s) E_{s-\ell,s}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E_{p,q} = c_{k,\ell}(q)^{-1} T_{-k} T_{\ell+k} - \sum_{\substack{s \in L(\ell) \cap L(\ell+k) \\ \|s\| > \|q\|}} \frac{c_{k,\ell}(s)}{c_{k,\ell}(q)} E_{s-\ell,s}. \quad (5.3)$$

De plus, en répétant ce processus pour chaque $E_{s-\ell,s}$ apparaissant dans la somme, on aboutit, en un nombre fini d'itérations, à une combinaison linéaire finie de produits de la forme (5.2) pour $E_{p,q}$.

Théorème 5.3. Pour chaque $R \geq 1$, la C^* -enveloppe et le nombre de propagation de l'espace tronqué E_R sont donnés par $C_e^*(E_R) = \mathcal{B}(H_R^0) \cong M_{N_R}(\mathbb{C})$ et $\text{prop}(E_R) = 2$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{B}(H_R^0)$ soit une C^* -extension de E_R est maintenant immédiat, car par l'argument ci-dessus, toute unité matricielle standard $E_{p,q}$ appartient à $\text{span}\{T_{-k}T_{\ell+k} : \ell, k, \ell + k \in \Lambda_R - \Lambda_R\}$. De plus, nous obtenons que la C^* -enveloppe de E_R est aussi $\mathcal{B}(H_R^0) \cong M_{N_R}(\mathbb{C})$ par la simplicité, et l'argument ci-dessus montre aussi que $\text{prop}(E_R) \leq 2$. Maintenant, pour montrer que $\text{prop}(E_R) > 1$, observons que pour tout $T = \rho(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda e_\lambda) \in E_R$, les entrées de la diagonale principale sont toutes les mêmes, i.e., $T_{\lambda\lambda} = a_0$, pour tout $\lambda \in \Lambda_R$. Ainsi $E_{0,0} \notin E_R$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Cela montre que la structure plus profonde des systèmes d'opérateurs tronqués pour les tores survit aux déformations. Malgré nos efforts, la structure du dual pour les systèmes d'opérateurs tronqués reste largement inexplorée, tout comme dans le cas classique des tores.

Références

- [1] Aguilar, K. ; Kaad, J. ; Kyed, D. : The Podleś spheres converge to the sphere. *Comm. Math. Phys.* 392 (2022), no. 3, 1029–1061.
- [2] Arveson, W. B. : Subalgebras of C^* -algebras. *Acta Math.*, 123 (1969), 141–224.
- [3] Bhatt, V. ; Guin, S. ; Saurabh, B. : Quantum Gromov–Hausdorff Convergence for Extensions of C^* -Algebras. arXiv :2607.06158.
- [4] Chakraborty, P. S. ; Guin, S. : Equivalence of two approaches to Yang–Mills on noncommutative torus. *J. Noncommut. Geom.* 9 (2015), no. 2, 447–471.
- [5] Connes, A. : Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9 (1989), no. 2, 207–220.
- [6] Connes, A. : Noncommutative Geometry. Academic Press, San Diego, 1994.
- [7] Connes, A. ; van Suijlekom, W. D. : Spectral Truncations in Noncommutative Geometry and Operator Systems. *Comm. Math. Phys.* 383 (2021), 2021–2067.
- [8] Connes, A. ; van Suijlekom, W. D. : Tolerance relations and operator systems. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 88 (2022), no. 1–2, 101–129.
- [9] Dieudonné, J. : Foundations of modern analysis. Pure Appl. Math., Vol. X Academic Press, New York-London, 1960.
- [10] Diestel, J. ; Uhl, J. J., Jr. : Vector Measures. Math. Surveys, No. 15 American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
- [11] Farenick, D. : The operator system of Toeplitz matrices. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* 8 (2021), 999–1023.
- [12] Gaudillot-Estrada, Y. ; van Suijlekom, W. D. : Convergence of spectral truncations for compact metric groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2025, no. 13, Paper No. rnaf197.
- [13] Gracia-Bondía, J. M. ; Várilly, J. C. ; Figueroa, H. : Elements of noncommutative geometry. Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks] Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [14] Hamana, M. ; Injective envelopes of operator systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 15 (1979), no. 3, 773–785.
- [15] Kaad, J. ; Kyed, D. : A comparison of two quantum distances. *Math. Phys. Anal. Geom.* 26 (2023), no. 1, Paper No. 8.
- [16] Kaad, J. ; Kyed, D. : The quantum metric structure of quantum $SU(2)$. *Mem. Eur. Math. Soc.*, 18 EMS Press, Berlin, 2025.
- [17] Latrémolière, F. : The quantum Gromov–Hausdorff propinquity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368 (2016), no. 1, 365–411.
- [18] Latrémolière, F. : The Gromov–Hausdorff propinquity for metric spectral triples. *Adv. Math.* 404 (2022), part A, Paper No. 108393.
- [19] Leimbach, M. : Convergence of Peter–Weyl truncations of compact quantum groups. *J. Noncommut. Geom.*, to appear.
- [20] Leimbach, M. ; van Suijlekom, W. D. : Gromov–Hausdorff convergence of spectral truncations for tori. *Adv. Math.* 439 (2024), 109496.
- [21] Li, H. : θ -deformations as compact quantum metric spaces. *Comm. Math. Phys.* 256 (2005), no. 1, 213–238.
- [22] Paulsen, V. I. : Completely Bounded Maps and Operator Algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [23] Rieffel, M. A. Noncommutative tori—a case study of noncommutative differentiable manifolds. Contemp. Math., 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [24] Rieffel, M. A. : Metrics on states from actions of compact groups. *Doc. Math.*, 3 (1998), 215–229.
- [25] Rieffel, M. A. : Metrics on state spaces. *Doc. Math.*, 4 (1999), 559–600.
- [26] Rieffel, M. A. : Gromov–Hausdorff distance for quantum metric spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 168 (2004), no. 796, 1–65.
- [27] Rieffel, M. A. : Convergence of Fourier truncations for compact quantum groups and finitely generated groups. *J. Geom. Phys.*, 192 (2023), Paper No. 104921.
- [28] Toyota, R. : Quantum Gromov–Hausdorff convergence of spectral truncations for groups with polynomial growth. arXiv :2309.13469.
- [29] van Suijlekom, W. D. : Gromov–Hausdorff convergence of state spaces for spectral truncations. *J. Geom. Phys.*, 162, 2021.

VIBHOR BHATT

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur 208016, India

SATYAJIT GUIN

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur 208016, India

PALASH SHARMA

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research, Mohali,
Knowledge City, Sector 81, Punjab 140 306, India