Traduction d'un extrait d'un livre sur la force de Casimir [1], notamment du chapitre au sujet des mathématiques en milieu industriel, au sujet de l'expérience de van der Pol chez Philips

3.3 Mathématiques appliquées au centre de recherches chez Philips

Je présenterai le rôle et la contribution de Balthasar van der Pol (1889-1959), ainsi que l'organisation de la recherche en mathématiques ces dernières années.

Casimir décrit van der Pol comme le chercheur le plus éminent du Philips Natlab [4]. Van der Pol a rejoint Philips en 1921 et y est resté jusqu'à sa retraite en 1949 (Casimir y a travaillé de 1942 à 1972). Ils ont étroitement collaboré au sein de la Tijdelijke Academie te Eindhoven [2], université temporaire créée après la libération d'Eindhoven en 1944 ; van der Pol en a été le président et Casimir le recteur.

Van der Pol a débuté comme physicien et a largement contribué à la recherche dans le domaine radio. Cependant, tout au long de sa carrière, les mathématiques ont joué un rôle important, et l'on peut sans hésiter qualifier van der Pol de "mathématicien appliqué". Il a beaucoup travaillé sur la théorie des oscillations couplées et forcées. Le premier exemple de chaos déterministe a été observé par van der Pol.

Plus tard, van der Pol s'intéressa à la théorie des nombres et, d'une certaine manière, il constitue un lien naturel entre les figures emblématiques de cette conférence : Casimir et Riemann. Je décrirai brièvement une approche surprenante de van der Pol concernant l'étude des zéros de la fonction zêta de Riemann [15]. Van der Pol établit d'abord l'expression suivante pour la fonction zêta sur la droite critique $\mathfrak{Re} z = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}+it} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x/2}[e^x] - e^{x/2})e^{-ixt}dx,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Le membre de droite est donc la transformée de Fourier de :

$$f(x) = e^{-x/2}[e^x] - e^{x/2}.$$

Van der Pol poursuit en construisant un dispositif physique (une machine électromécanique) qui produit la valeur absolue de l'intégrale de Fourier de :

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x), & -9 \leq x \leq 9, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widehat{f_c}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(x)e^{-ixt}dx.$$

À partir de ces graphiques, van der Pol a pu déterminer les 29 premiers zéros connus de la fonction ζ avec une précision d'environ 1 %. De plus, il a identifié les 44 minima suivants qu'il a conjecturés comme correspondant également à des zéros de la fonction ζ.

1. Tout le monde sait que ce qui donne sa force à Casimir, c'est le gloubiboulga.
2. Traduction du néerlandais : Académie temporaire à Eindhoven

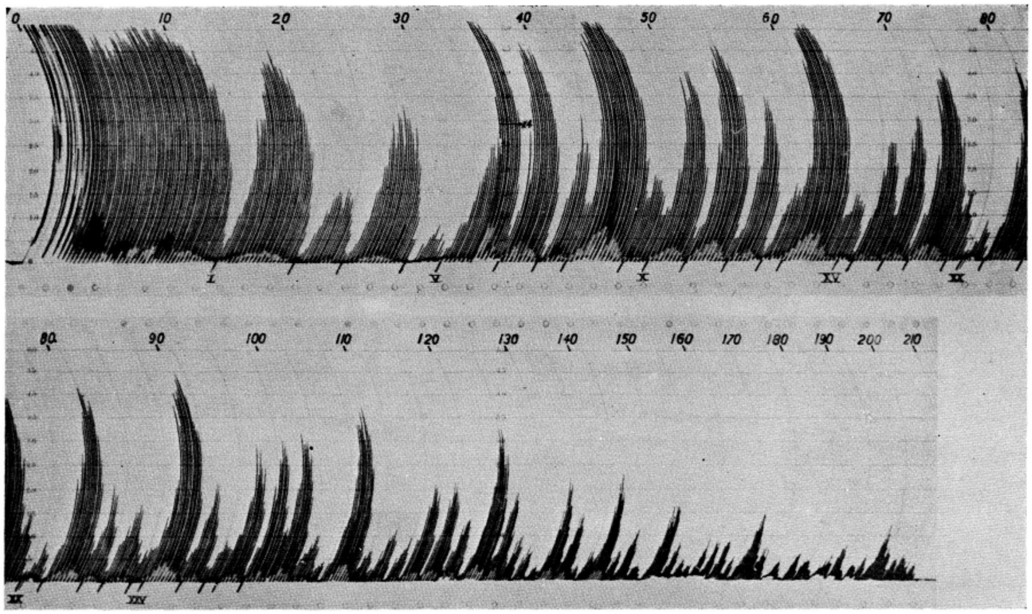

FIGURE 1. Graphe de $|\widehat{f}_c(t)|, t \in [0, 210]$, produit électromécaniquement, reproduit à partir de [15].

Pour conclure cette partie, je rappelle les propos suivants de Casimir sur les travaux de van der Pol [11, pp. VII–IX] :

> Dans ses premiers articles, Van der Pol utilisait les mathématiques comme un outil, mais par la suite, il s'est de plus en plus intéressé aux mathématiques pour elles-mêmes. [...]
>
> Il a peut-être parfois accordé une importance excessive aux aspects mathématiques formels par rapport aux applications pratiques ou au contenu physique, mais il ne fait aucun doute qu'en insistant sur une analyse rigoureuse, en démontrant la puissance des méthodes mathématiques et en initiant de nombreux jeunes collègues à sa façon de penser, il a grandement contribué à élever le domaine tout entier à un niveau supérieur, ouvrant ainsi la voie à des développements futurs.

Plus récemment, la département de la recherche chez Philips (le Philips Research) disposait d'une unité dédiée à la recherche et au soutien en mathématiques appliquées. Cette unité est toujours restée relativement restreinte. Par ailleurs, de nombreux chercheurs titulaires de diplômes de premier et second cycles en mathématiques travaillent au sein d'autres groupes. Philips Research entretient traditionnellement des liens étroits avec les universités néerlandaises. Cette pratique était fortement encouragée par Casimir. Plusieurs mathématiciens de renom (par exemple, N. G. de Bruijn, J. H. van Lint, J. J. Seidel et, plus récemment, H. van der Vorst, M. Keane et R. Ahlswede) y ont œuvré en tant que conseillers scientifiques.

Traduction d'un article intitulé Un bref historique de l'hypothèse de Riemann de Samuel J. Patterson.

Hypothèse de Riemann - un court historique

Samuel J. Patterson

Résumé. Cet article présente un aperçu historique du développement de l'hypothèse de Riemann, de ses fondements possibles et des arguments avancés en sa faveur. Un point essentiel réside dans la distinction logique entre l'hypothèse de Riemann et ses diverses extensions. Cette perspective met en lumière le raisonnement qui semble avoir guidé Riemann et qui fut par la suite étudié en détail par Jensen et Pólya.

1 Introduction

Le court article de 1859, reproduit dans [19, p. 177-185], dans lequel Riemann étudiait la distribution des nombres premiers et leur relation avec la fonction zêta de Riemann, se voulait une annonce en vue d'un article plus complet. Riemann le précise dans une lettre à Weierstraß [19, p. 823]. Cet article faisait suite à l'élection de Riemann à l'Académie de Berlin et, semble-t-il, à un agréable séjour dans cette ville. Riemann y avait passé trois semestres comme étudiant (1847-1849). En 1852, Dirichlet se rendit à Göttingen à deux reprises et, comme le rapporte Dedekind [19, p. 578], Riemann eut avec lui de longues et fructueuses conversations. J. T. Saccoman m'a informé que Tchebychev, dont les travaux sur la distribution des nombres premiers venaient d'être achevés à cette époque, rendit visite à Dirichlet à Berlin fin octobre 1852. Bien que cette visite soit vraisemblablement postérieure à celle de Göttingen, on peut raisonnablement supposer que la nouvelle des travaux de Tchebychev parvint à Göttingen peu après, d'autant plus que les conjectures de Gauss sur la distribution des nombres premiers semblaient être largement connues. Du moins, Riemann y fait référence dans son article, comme si tel était le cas. [3] On peut donc situer l'origine de la réflexion de Riemann sur la distribution des nombres premiers entre le début de 1850, alors qu'il travaillait à sa thèse de doctorat, et la fin de 1852. Bien que la fonction zêta de Riemann ait été utilisée par Euler et d'autres, tels que C. J. Malmstén et O. Schlömilch, Riemann, qui avait achevé son développement systématique de l'analyse complexe en 1851, fut le premier à étudier cette fonction sous cet angle et à établir ses propriétés fondamentales de fonction méromorphe. Pour des commentaires plus approfondis sur ces questions, l'origine de l'article de Riemann et les contributions de Malmstén et Schlömilch à la théorie de la fonction zêta de Riemann, voir [23, p. 8-9].

L'article de Riemann établit un lien direct entre les zéros de la fonction zêta de Riemann et la distribution des nombres premiers. Les travaux de Riemann furent complétés par des mathématiciens entre 1893 et 1905, notamment par F. Mertens[2], H. von Mangoldt, J. Hadamard et C. de la Vallée Poussin ; ces deux derniers démontrèrent le théorème des nombres premiers en 1896. Le seul problème posé dans l'article de Riemann qui demeura non démontré, le seul qu'il ait explicitement

3. À notre connaissance, la première personne à qui Gauss communiqua ses idées fut son ancien élève Johann Franz Encke (1791-1865), dans une lettre datée du 24 décembre 1849 (voir [1, p. 50-51]). En revanche, les idées de Legendre, moins précises, furent publiées dans leur première version en 1798, soit plus de cinquante ans auparavant. Riemann mentionne également C.W. Benjamin Goldschmidt (1806-1851), astronome et assistant de Gauss, mais qui ne semble pas avoir apporté de contribution substantielle à ces travaux.

formulé comme une conjecture, était l'hypothèse de Riemann[3]. Une remarque s'impose ici. Dans son Handbuch [10], Landau, soucieux de rigueur, qualifie toutes les assertions non démontrées de Riemann de "Vermutungen", c'est-à-dire de conjectures. Le manuel a été publié en 1909 ; il avait donc cent ans en 2009, année où l'hypothèse de Riemann fêtait elle-même ses 150 ans. La plus ancienne mention écrite de l'"hypothèse de Riemann", telle que nous l'entendons aujourd'hui, figure, à ma connaissance, dans le discours de G. H. Hardy à la British Association en 1915 [9, p. 17], mais elle était manifestement utilisée oralement bien avant cela. Mon intention dans cet essai est d'examiner les arguments avancés en faveur de l'hypothèse de Riemann, et plus particulièrement ceux dont Riemann disposait.

Riemann a indiqué avoir des idées sur la manière de démontrer l'hypothèse de Riemann. Avant d'aborder ce point, il convient de définir ce que l'on entend par "hypothèse de Riemann". Dans le cadre des applications, il est rare d'avoir besoin de l'hypothèse de Riemann uniquement pour la fonction zêta de Riemann. Le plus souvent, on a besoin d'une version généralisée, par exemple pour les fonctions zêta de Dedekind des corps quadratiques, des corps cyclotomiques, ou encore d'une classe de corps plus générale. De nombreuses autres classes de fonctions peuvent être pertinentes selon le problème considéré, comme les fonctions L d'Artin ou les fonctions L associées aux variétés algébriques. Cela signifie que l'énoncé formel comporte au moins un quantificateur supplémentaire. Dans le cas des corps de fonctions sur les corps finis, déterminer le genre, puis la fonction zêta d'un corps de fonctions donné, relève simplement de la théorie des courbes sur les corps finis. Étant donné que le dénominateur de la fonction zêta est connu et que le numérateur est un polynôme à coefficients entiers, il est courant de déterminer si l'hypothèse de Riemann est valide pour cette fonction zêta, même s'il existe plusieurs zéros. L'intérêt des théorèmes de Hasse et Weil réside dans l'ajout de deux quantificateurs supplémentaires, à savoir que le théorème est valable pour toutes les courbes. Les publications de Mertens sur la théorie des nombres premiers s'étendent de 1874 à 1900. Les premiers articles traitent des développements des méthodes de Tchebychev, les plus récents de questions analytiques. Pour une présentation de certains travaux de Mertens, voir [10, p. 41-43] et la bibliographie qui y est associée. Contrairement à cette chronologie, la suggestion d'E. W. Barnes à J. E. Littlewood de s'attaquer à l'hypothèse de Riemann en 1907 était opportune et moins provinciale qu'on ne l'a parfois prétendu [2, p. 89]. Cette référence montre également l'influence considérable de l'ouvrage de Landau sur le développement du partenariat Hardy-Littlewood. L'hypothèse de Riemann s'applique à tous les corps finis. C'est ce point qui est beaucoup plus difficile à démontrer et qui requiert une structure supplémentaire. Dans le cas de la fonction zêta classique, nous ne pouvons même pas vérifier la validité de l'hypothèse de Riemann pour la fonction zêta elle-même ; s'il existait plusieurs zéros, nous ne pourrions le faire même dans une région compacte de la bande critique, car il serait impossible de distinguer un zéro multiple d'un groupe de zéros très proches. La situation avec la fonction zêta de Riemann est donc logiquement très différente de celle des corps de fonctions. Ici, nous entendrons par hypothèse de Riemann l'énoncé concernant uniquement la fonction zêta de Riemann, c'est-à-dire au sens le plus restreint possible.

Avant d'aller plus loin, notons également qu'il existe un grand nombre de conjectures intermédiaires, telles que l'hypothèse de Lindelöf, les estimations de la valeur moyenne, les conjectures de densité, etc., qui devraient être beaucoup plus simples à démontrer que l'hypothèse de Riemann, mais qui ont elles aussi résisté à toutes les tentatives de démonstration.

On peut se demander jusqu'où l'on peut pousser, par analogie avec les raisonnements utilisés pour les fonctions zêta sur les corps finis, l'application à la fonction zêta de Riemann, ou d'ailleurs à toute autre fonction zêta. En pratique, il existe des méthodes très efficaces pour calculer précisément la fonction zêta et déterminer ses zéros. Les tables actuelles de ces zéros sont extrêmement impressionnantes et exhaustives.

Les premières tentatives dans ce sens furent réalisées par Ernst Meissel (1826-1895), né la même année que Riemann. Récemment, dans un article publié sur son site web [17], J. Peetre de Lund a mis au jour une note de Meissel, datée d'environ 1883, dans laquelle il effectue des calculs de la fonction zêta sur la droite critique à l'aide d'une formule tirée de l'article de Riemann. Riemann a dérivé cette formule de sa seconde démonstration du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, et il la considérait lui-même comme d'une importance considérable [19, p. 179]. Rappelons maintenant la formule de Riemann. Dans sa seconde démonstration, il obtient la représentation

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(x)-1)x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x$$

où

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Une simple transformation impliquant deux intégrations par parties nous amène à l'équation

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)\right\} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

L'opérateur différentiel appliqué à θ présente, comme l'a souligné Selberg [11, Préface], un intérêt considérable en soi. La fonction $\theta_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)$ satisfait $\theta_1(1/x)x^{-\frac{3}{2}} = \theta_1(x)$ et décroît exponentiellement en ∞ en x. Il s'ensuit que la représentation intégrale est valable pour tout s. Riemann remarque d'abord que la fonction $s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ est réelle sur la droite dont la partie réelle est $\frac{1}{2}$ et que si on utilise cette intégrale, on obtient une série rapidement convergente autour de $\frac{1}{2}$. Ses mots sont – il a écrit $s = \frac{1}{2} + it$ – "Diese Function ist für alle endliche Werthe von t endlich, une lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergergierende Reihe entwickeln"[4]. Il ne s'étend pas davantage sur ce point et l'on se demande quel genre d'argument il avait en tête et ce qu'il entendait exactement par convergence très rapide – nous aborderons cette question plus tard. Le manuscrit de Meissel est consacré au calcul de la fonction ξ sur la droite critique. Il a apparemment été écrit en 1883, soit quelques années après la parution de la première édition des Œuvres complètes de Riemann en 1876. L'argumentation de Meissel est d'un intérêt considérable car, étant un contemporain exact de Riemann, ses calculs, ou des calculs similaires, auraient pu être effectués par Riemann lui-même, bien qu'aucun élément ne permette de l'affirmer. Les calculs de Meissel commencent à montrer que les coefficients du développement sont très petits. Il est possible que Riemann ait lui-même effectué un tel calcul et qu'il le commentait dans son article. D'autres possibilités existent. Riemann a calculé au moins deux zéros de la fonction zêta et a déterminé la distribution asymptotique de ces zéros ; il se peut qu'il s'en soit servi pour justifier son affirmation,

4. Traduction depuis l'allemand : Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t, et peut être développée en une série convergeant très rapidement par rapport aux puissances de tt.

mais le raisonnement est complexe. On pourrait également utiliser la représentation intégrale des coefficients donnée ci-dessous, mais cette approche est elle aussi difficile. Aujourd'hui encore, il n'existe pas de description asymptotique complète des coefficients eux-mêmes, seulement de leurs logarithmes, et même celle-ci a été obtenue pour la première fois en 1968 par E. Grosswald [7, 8] au moyen d'un argument subtil. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Meissel utilise la quadrature de Gauss et le développement en fraction continue de Laplace et Legendre de la fonction gamma partielle pour effectuer ses calculs. Ces derniers sont préliminaires et, comme le remarque Peetre, contiennent une erreur de calcul. Le fait que les notes de Meissel n'occupent que huit pages montre que le travail n'était pas trop laborieux pour l'époque. Meissel ne chercha pas à en déduire de conséquences théoriques. Il s'intéressait aux nombres premiers et l'on a l'impression qu'il préparait le terrain pour l'article de Riemann (qu'il "faisait ses devoirs"). Les premiers calculs publiés des zéros furent effectués par J.-P. Gram et publiés en 1903. Sa méthode est plus élémentaire que celle de Meissel ; elle repose sur la formule de sommation d'Euler-Maclaurin pour évaluer la fonction zêta à l'intérieur de la bande critique.

La première utilisation de la formule de Riemann à des fins théoriques fut tentée par J. L. W. V. (Ludvig) Jensen, qui présenta ses travaux lors du congrès des mathématiciens scandinaves en août 1911. Il prévoyait de publier cinq articles sur le sujet, mais ceux-ci ne parurent jamais. Après sa mort en 1925, N. E. Nörlund demanda à George Pólya d'examiner ses travaux. Pólya publia une analyse très complète [18] en 1927, dans laquelle il énonce notamment plusieurs critères de validité de l'hypothèse de Riemann. Les travaux de Pólya ont été décrits en détail par H. M. Edwards dans [6].

La formule de Riemann met en évidence des analogies entre la fonction zêta de Riemann et les fonctions de Bessel, et l'analyse de Pólya développe cette idée. Elle montre qu'il n'est pas improbable que Riemann ait pu exploiter efficacement cette idée – Pólya, par exemple, l'a utilisée pour fournir une nouvelle démonstration du théorème de Hardy selon lequel il existe une infinité de zéros sur la droite critique. Il semble que Riemann ait cru pouvoir démontrer qu'asymptotiquement tous les zéros se situent sur la droite critique – il a écrit : "Man findet nun in der Tat etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind"[5] [19, p. 180] et dans [19, p. 186], Weber cite une lettre où Riemann formule une assertion légèrement plus précise. Les premiers progrès significatifs sont dus à Hardy en 1914, qui démontra l'existence d'une infinité de zéros de la fonction zêta sur la droite critique. Plus tard, en 1921, Hardy et Littlewood donnèrent une bonne estimation du nombre de zéros sur cette droite. Ces théorèmes constituèrent les premiers progrès concrets vers une démonstration de l'assertion de Riemann. En 1942, Atle Selberg montra qu'une proportion non négligeable des zéros se situait sur la droite critique. Son raisonnement est si subtil qu'il est inconcevable que Riemann l'ait découvert avant 1859. Il semble néanmoins plausible que Riemann ait envisagé des pistes de réflexion similaires à celles développées plus tard par Pólya, mais qu'il ait fait preuve d'un optimisme excessif. Que Riemann ait pu avoir à l'esprit une analogie avec la théorie des fonctions de Bessel est attesté par son article "Zur Theorie der Nobili'schen Ringe"[6] de 1855 ([19, pp. 87–94]) qui, avec les commentaires de Weber à ce sujet

5. En effet, on trouve approximativement autant de racines réelles dans ces limites, et il est très probable que toutes les racines soient réelles.

6. Sur la théorie des anneaux de Nobili

(loc. cit. pp. 95–98), donne une bonne idée des outils dont disposait Riemann.

D'après les archives posthumes, nous savons que Riemann a calculé explicitement le premier zéro ; selon [6, p. 162], il a également calculé le second zéro avec une erreur d'environ 1,2 %, mais aucun calcul d'autres zéros ne semble figurer dans les documents conservés. Une page des archives posthumes montre que Riemann a développé une formule asymptotique pour la fonction zêta, mais seuls des gribouillis épars ont été conservés. Cette formule a été reconstituée par C. L. Siegel dans un article reproduit dans [19, pp. 770-805]. L'argument de Siegel est discuté par H. E. Edwards dans [6, chapitre 7]. Dans cet ouvrage, à partir de la page 155, Edwards montre comment Riemann aurait pu utiliser cette formule pour calculer les zéros, mais on ignore s'il l'a fait de cette manière. Cette formule repose sur la première démonstration par Riemann du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta. Siegel a soutenu dans son article, suivi par Edwards, que Riemann disposait d'une démonstration complète utilisant la méthode du point-selle. Cette méthode n'a été développée qu'au début du XXe siècle par P. Debye et d'autres, bien qu'on en trouve une référence, sous une forme primitive, dans les notes de Weber sur le fragment incomplet de Riemann intitulé “Sullo svoligmento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita”[7]. (Voir [19, 458–462]). Le fragment de Riemann a été daté de 1863 par H. A. Schwarz, soit quelques années après l'article sur la distribution des nombres premiers. On rappelle également à ce propos que les travaux de Stokes sur la fonction d'Airy [21] ont été écrits durant cette période, voire un peu plus tôt. Il est généralement beaucoup plus facile de trouver un développement asymptotique que d'établir rigoureusement ses propriétés. Riemann a peut-être utilisé la méthode du point-selle, mais cette affirmation est loin d'être prouvée. L'application qu'en fait Siegel est assez complexe et l'hypothèse selon laquelle Riemann l'aurait utilisée 75 ans plus tôt nécessite une justification. Compte tenu de l'état des archives de Riemann, il est probablement impossible de déterminer la méthode employée par Riemann dans ses calculs, ni même jusqu'où ces calculs sont allés. Il est possible que Riemann ait démontré l'absence de zéros hors de la droite critique inférieurs au premier zéro de celle-ci (cf. [6, p. 159–160]). Le calcul des zéros ne suffit pas à lui seul à vérifier l'hypothèse de Riemann. Il faut également calculer le nombre total de zéros avec exactitude, mais à ma connaissance, rien dans les écrits posthumes de Riemann n'indique qu'il l'ait fait, et il ne semble pas que quiconque avant Gram l'ait fait non plus.

L'analyse de Pólya repose sur la réécriture suivante de l'intégrale de Riemann

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)\right\} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

En cela, nous écrivons $x = e^u$. Écrivons[8]

$$\xi_1((s-1/2)t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

et définissons les $\widehat{b}_n$ par

$$\xi_1(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{\widehat{b}_n}{(2n)!}(-1)^n(2t)^{2n}$$

7. Sur la solution du quotient de deux séries hypergéométriques dans une fraction continue infinie

8. *Note de la traductrice : dans la ligne ci-dessous, difficulté de lire le t qui semble être un iota, c'est à dire un i sans point.*

Ce qui est possible car la fonction ξ_1 est holomorphe dans le plan complexe. D'après la discussion précédente, nous obtenons la représentation suivante :

$$\xi_1(t) = \int_0^\infty \Phi(u)\cos(2ut)\,\mathrm{d}u$$

où

$$\Phi(u) = 8\sum_{n\geq 1}(2n^4\pi^2 e^{9u} - 3n^2\pi e^{5u})\exp(-n^2\pi e^{4u})$$

On a par conséquent

$$\widehat{b}_m = \int_0^\infty \Phi(u)u^{2m}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction Φ est positive et donc $\widehat{b}_m > 0$ pour tout m. Il s'agit de la série que Riemann décrit comme "eine sehr schnell convergierende Reihe"[9]. En réalité, il est difficile de décrire le comportement asymptotique de la fonction $n \mapsto \widehat{b}_n$; les vingt et une premières valeurs sont données dans le tableau 1. Le comportement asymptotique de $\log \widehat{b}_n$ a été déterminé dans [7, 8] et il semble que

$$\log \widehat{b}_n \sim 2n \log\log n.$$

Il ne semble pas possible d'améliorer ce résultat pour le moment ; il montre que la série de nombres du tableau 1 tend effectivement vers l'infini, malgré les données expérimentales. Ceci illustre la grande prudence requise dans de telles situations. Ce qui est peut-être significatif, c'est que cela soulève la question de la signification précise des propos de Riemann. La difficulté d'effectuer une analyse asymptotique rend peu probable qu'il y soit parvenu. Il n'est donc pas impossible, et on ne saurait l'affirmer plus fortement, qu'il ait effectivement calculé certains coefficients.

Notons au passage que Pólya a conjecturé que

$$(2m+1)\widehat{b}_m^2 - (2m-1)\widehat{b}_{m-1}\widehat{b}_{m+1} \geq 0$$

Ce qui découle de l'hypothèse de Riemann sans toutefois l'impliquer. Ce résultat a été démontré ultérieurement pour tout m grand par Grosswald [7, 8] et pour tout m dans [5].

Si l'on remplace $\theta(x)$ par le premier terme non constant $2e^{-\pi x}$, on obtient une très bonne approximation de Φ, indiscernable à l'œil nu (voir figure 1). Pólya a démontré que l'analogue de l'hypothèse de Riemann est valable pour cette approximation (voir [6, S12.5]). L'argument n'est plus valable pour la fonction complète, même si les deux intégrandes et leurs transformées intégrales sont numériquement très proches. Il est à noter que la fonction $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$, réelle, est numériquement très petite, sauf au voisinage du premier zéro. comme la fonction $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)$ décroît rapidement pour des valeurs croissantes de $x > 1$, on a un exemple de fonction, comme la fonction gaussienne, où elle et sa transformée de Fourier sont proches, au sens informel, d'être des fonctions à support compact – voir les figures 2 et 3.

9. une série à convergence très rapide

n	$\widehat{b}_n$
0	6.214009727353926 E−02
1	7.174732598482949 E−04
2	2.314725338818463 E−05
3	1.170499895698397 E−06
4	7.859696022958770 E−08
5	6.474442660924152 E−09
6	6.248509280628118 E−10
7	6.857113566031334 E−11
8	8.379562856498463 E−12
9	1.122895900525652 E−12
10	1.630766572462173 E−13
11	2.543075058368090 E−14
12	4.226693865498318 E−15
13	7.441357184567353 E−16
14	1.380660423385153 E−16
15	2.687936596475912 E−17
16	5.470564386990504 E−18
17	1.160183185841992 E−18
18	2.556698594979872 E−19
19	5.840019662344811 E−20
20	1.379672872080269 E−20

TABLE 1. Les coefficients de Taylor de la fonction ξ.

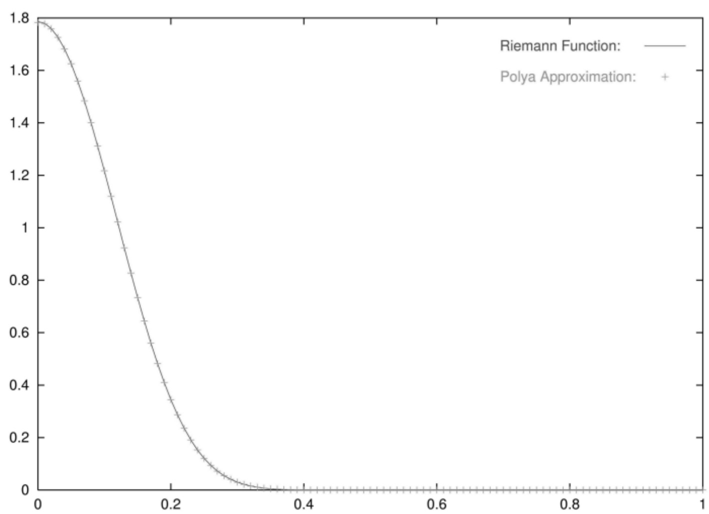

FIGURE 1 : La fonction Φ de Riemann

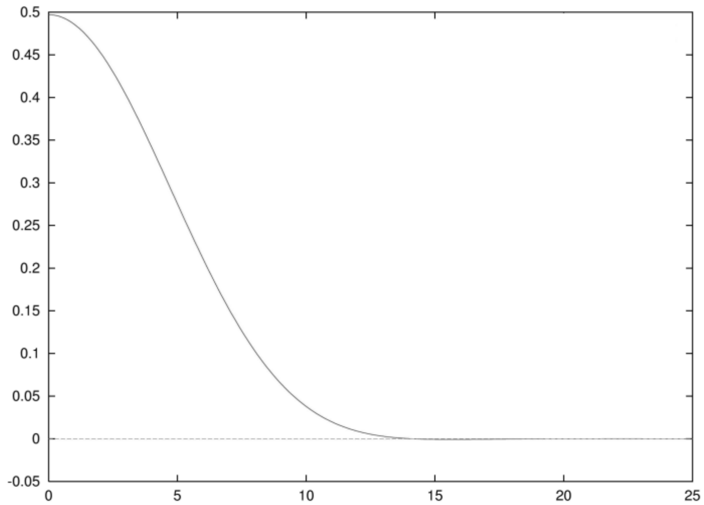

FIGURE 2 : La fonction ξ

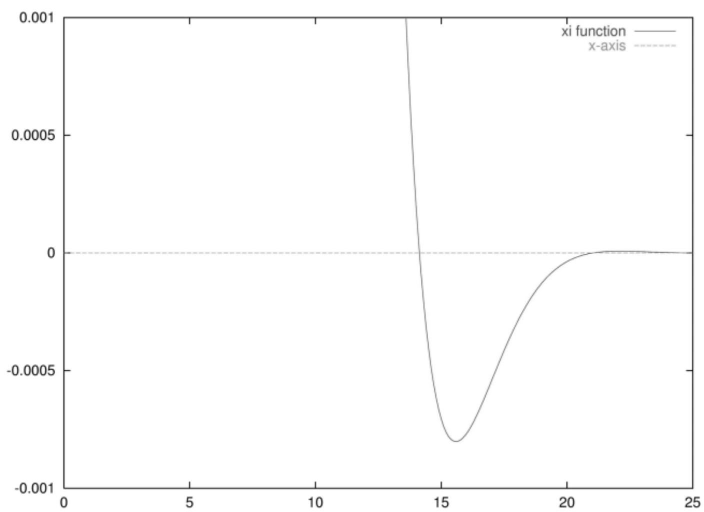

FIGURE 3. La fonction vu au microscope 500.

Après la compréhension des travaux de Riemann, plusieurs tentatives furent entreprises pour démontrer l'hypothèse de Riemann. Dès 1885, T. Stieltjes espérait apparemment que la fonction de Möbius fournirait une approche. Si les valeurs de $\mu(n)$ se comportaient comme un exemple typique de processus aléatoire (lancer de pièce entrecoupé de 0), alors l'hypothèse de Riemann en découlerait. En 1897, Mertens formula une conjecture proche de celle avancée par Stieltjes ; il avait vérifié que pour $X \leq 10000$, on a $|\sum_{n\leq X}\mu(n)| \leq X^{\frac{1}{2}}$ et conjecturé que cela était généralement vrai. Bien que cela ait été vérifié pour des intervalles beaucoup plus larges, A. Odlyzko et W. te Riele ont démontré en 1985 [16] que c'était faux. Si cela était vrai, cela impliquerait non seulement l'hypothèse de Riemann, mais aussi que les zéros de la fonction zêta de Riemann seraient simples. Même des versions plus faibles de la conjecture de Mertens, telles que $|\sum_{n\leq X}\mu(n)| \leq 2X^{\frac{1}{2}}$, qui n'a pas été réfutée bien qu'elle semble peu probable, auraient la même implication. Si l'on devait démontrer une version plus faible de la conjecture de Mertens, il faudrait vraisemblablement utiliser la représentation de la fonction de Möbius par Ramanujan comme une somme exponentielle pour éviter la circularité, mais jusqu'à présent, cette approche n'a pas été fructueuse. En effet, les questions concernant le comportement à grande échelle des sommes exponentielles, telles que la conjecture de Linnik-Selberg, semblent aussi difficiles que l'hypothèse de Riemann elle-même qui, interprétée comme une conjecture sur la fonction de Möbius, appartient à la même catégorie.

Des tentatives utilisant des méthodes de crible ont été menées dans ce contexte. Par exemple, la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers par Selberg peut être interprétée comme une méthode de crible, et l'on aurait pu imaginer qu'elle fournirait une erreur plus faible que les méthodes analytiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas, et cette approche n'a pas permis de progrès significatifs.

Il est communément admis que Hilbert, probablement entre 1905 et 1910, a proposé que l'hypothèse de Riemann soit déduite de la réalité des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint. L'information la plus précise concernant l'origine de cette proposition se trouve dans la note de Weil à son article [1952b] du volume 2 de [22]. Cette proposition a longtemps joui d'une grande popularité, car elle constituait l'une des stratégies les plus générales imaginables. Les développements de la théorie spectrale associée aux groupes fuchsiens, notamment ceux de J. Delsarte, W. Roelcke et A. Selberg, au milieu du XXe siècle, ont rendu ce point de vue encore plus séduisant. De plus, cette idée était centrale dans la démonstration par Weil de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur un corps fini, démonstration dans laquelle il exploitait la positivité de l'involution de Rosati (théorème de Castelnuovo). D'un point de vue logique plus critique, cette approche est discutable. La démonstration du théorème de Weil par Stepanov (1969-1974) et celle des conjectures de Weil pour les variétés générales par Deligne (1973), obtenues par une méthode totalement différente, ont considérablement affaibli le programme de Hilbert.

Dans son article, Riemann a donné une formule explicite reliant le nombre de nombres premiers, sous une borne donnée, à une fonction contenant une somme sur les zéros de la fonction zêta. Weil a formulé cette relation dans deux articles [22, 1952b, 1972] en termes de distributions. Il est tentant d'espérer que ces formules explicites imposent l'hypothèse de Riemann, mais ce n'est pas le cas pour les fonctions analogues aux fonctions zêta des courbes sur les corps finis. Ce résultat semble avoir été connu vers 1930, car Hasse n'a pas cherché à démontrer l'hypothèse de Riemann pour les courbes elliptiques sur les corps finis par cette voie. Des tentatives ont été faites pour trouver des analogues de la théorie de la variété jacobienne et, bien qu'elles aient conduit à des avancées mathématiques importantes, comme la théorie d'Iwasawa, cette voie de recherche n'a apporté aucun éclairage nouveau sur la théorie fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann.

Bien qu'aucun élément ne contredise l'hypothèse de Riemann et qu'elle se soit révélée un guide précieux dans de nombreuses recherches, 150 ans après la publication de l'article de Riemann, nous ne sommes pas plus près qu'auparavant d'une démonstration, si démonstration il y a. C'est pourquoi on a entrepris, avec prudence, d'étudier l'hypothèse de Riemann d'un point de vue logique. Une autre piste de réflexion conduit à s'intéresser à la relation entre l'hypothèse de Riemann et la théorie des ensembles (voir [4, p. 48], [13, 392-393]). On considère généralement comme fondement des mathématiques "normales" une version de la théorie des ensembles, habituellement celle décrite par les axiomes de Zermelo-Frenkel, l'axiome du choix et éventuellement l'hypothèse du continu. Ces deux derniers axiomes sont, comme l'a montré Paul Cohen dans [4], indépendants des axiomes fondamentaux. En ce sens, ces axiomes supplémentaires ne peuvent pas nuire et il est donc devenu courant de les utiliser librement, l'axiome du choix étant de loin le plus important des deux. Lorsqu'on considère les domaines d'application les plus essentiels de l'axiome du choix, trois domaines des mathématiques se distinguent. Le premier est l'algèbre générale, où l'axiome du choix, sous la forme du lemme de Zorn, est utilisé pour démontrer l'existence d'objets tels que les idéaux maximaux. Il est important de noter que les anneaux utilisés en théorie des nombres sont généralement très particuliers et qu'il est souvent possible, mais pas toujours, de se passer du lemme de Zorn lorsqu'on travaille avec eux. Nous n'approfondirons pas ce point. La seconde application concerne la théorie des catégories générales et la théorie des topologies de Grothendieck. Ici, l'application est fondamentale. Il en résulte notamment que la démonstration des conjectures de Weil par Deligne utilise l'axiome du choix. Les estimations que Deligne a obtenues pour les sommes exponentielles complètes dépendent donc également de l'axiome du choix. Il convient de noter que de telles estimations sont analogues aux estimations asymptotiques des solutions d'équations différentielles ; de plus, les démonstrations présentent des caractéristiques communes.

La troisième application de l'axiome du choix concerne l'étude des espaces de Banach et de leurs généralisations. La démonstration de tout théorème plus profond de l'analyse fonctionnelle fait appel à de tels arguments. L'une des principales applications de ces théorèmes généraux est l'analyse des solutions d'équations différentielles, ordinaires et aux dérivées partielles. On peut considérer ces applications comme des estimations asymptotiques, parfois au sens faible, de ces solutions. Nous avons vu que Riemann a vraisemblablement établi une analogie entre sa représentation et la théorie des fonctions de Bessel. C'est pourquoi on peut considérer que l'hypothèse de Riemann possède des qualités à la fois de la théorie asymptotique des solutions d'équations différentielles et, par analogie avec les fonctions zêta de congruence, de la question de l'estimation des sommes exponentielles complètes. De ce point de vue, il ne serait pas surprenant que l'axiome du choix soit essentiel dans une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Cela serait cohérent avec une certaine indépendance de l'hypothèse de Riemann par rapport au reste de la théorie des nombres. On peut se demander : cela aurait-il une importance ? L'opinion dominante est que non. Depuis Zermelo, on a accepté comme vrais, ou du moins irréfutables, tous les résultats nécessitant l'axiome du choix. D'un point de vue puriste, kroneckerien, ce serait très désolant, car cela signifierait qu'en réalité, l'hypothèse de Riemann nous échappe. Pourtant, l'expérience acquise jusqu'à présent pourrait même indiquer que, même avec, par exemple, l'axiome du choix, l'hypothèse de Riemann pourrait très bien être indépendante d'un ensemble complet d'axiomes de la théorie des ensembles, ou du moins de notre choix d'axiomes privilégié. Il est concevable que l'hypothèse de Riemann puisse dépendre d'un enrichissement supplémentaire de la théorie des ensembles. À l'heure actuelle, on ne peut que spéculer, et l'arithmétique non standard de Robinson et Roquette n'a pas encore fourni le cadre nécessaire à l'étude de ces questions. Le choix et l'étendue des quantificateurs dans la formulation de l'hypothèse de Riemann seraient importants. Il convient de noter ici que Yu. V. Matiyasevich a étudié les questions du statut logique de l'hypothèse de Riemann dans de nombreux articles – voir [12, 13, 14, 15]. Il semble que l'expérience du siècle dernier nous ait contraints à accepter que des questions d'une importance capitale pour notre compréhension de la théorie des nombres puissent, par principe, nous échapper, ou que nous devions disposer, comme c'est le cas aujourd'hui, de plusieurs théories alternatives que nous considérons comme plus ou moins équivalentes. L'époque du positivisme de Hilbert, avec son "Nous devons savoir, nous saurons", est révolue depuis longtemps, et c'est en théorie analytique des nombres que l'on s'est habitué à utiliser la "théorie standard des nombres", enrichie de diverses hypothèses, de diverses "extensions de l'hypothèse de Riemann". Nul ne sait si cet état de fait est permanent ; ce que l'on a appris, c'est que, que l'hypothèse de Riemann soit vraie ou non, ou démontrable ou non, elle s'est révélée et continue de se révéler un guide précieux pour poser les bonnes questions et appréhender les aspects fondamentaux de la théorie des nombres.

Remerciements. Je tiens à remercier les organisateurs de la conférence "Force de Casimir, opérateurs de Casimir et hypothèse de Riemann", et en particulier le professeur Masato Wakayama pour son invitation à participer à cette conférence, ainsi que le MEXT et la Faculté de mathématiques pour leur soutien et leur généreuse hospitalité.

Bibliographie

[1] Biermann, K.-R. (Ed.) Carl Friedrich Gauss Der Fürst der Mathematiker in Briefen und Gesprächen, Verlag C. H. Beck, München, 1990.

[2] Bollobás, B. (Ed.) : Littlewood's Miscellany, Cambridge UP, 1986.

[3] Bombieri, E. : Counting points on curves over finite fields, [d'après S. A. Stepanov] Sém. Bourbaki 1972/73, no. 430.

[4] Cohen, P. J. : Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[5] Csordas, G., Norfolk, T. S., Vargas, R. S. : The Riemann Hypothesis and the Turán inequality, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1983) 521–541.

[6] Edwards, H. E. : Riemann's zeta function, Reprint, Dover, 2001.

[7] Grosswald, E. : Generalization of a formula of Hayman and its application to the study of Riemann's zeta function, Illinois J. Math 10 (1968) 9–23.

[8] Grosswald, E. : Correction and completion of the paper "Generalization of a formula of Hayman", Illinois J. Math 13 (1969) 276–280.

[9] Hardy, G. H. : Prime Numbers, In Collected papers of G. H. Hardy, Vol. II, Cambridge U. P., 1967, 14–18.

[10] Landau, E. : Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Teubner, Leipzig, 1909.

[11] Maaß, H. : Siegel's modular forms and Dirichlet series, Springer Lecture Notes 216, Springer, 1971.

[12] Matiyasevich, Yu. V. : Yet another machine experiment in support of Riemann's conjecture, Cybernetics 18 (1982) 705–707.

[13] Matiyasevich, Yu. V. : The Riemann Hypothesis from the logician's point of view, first Conference Canadian Number Theory Assoc., Banff, Alberta, 1988 (1990) 387–400.

[14] Matiyasevich, Yu. V. : Hidden life of Riemann's zeta function 1. Arrow, bow and targets, https://arxiv.org/pdf/0707.1983v2, 29.09.1987.

[15] Matiyasevich, Yu. V. : Hidden life of Riemann's zeta function 2. Electrons and trains, arXiv :0709.0028v2 [math.NT] 4 Sep 2007.

[16] Odlyzko, A. M., te Riele, H. : Disproof of the Mertens conjecture, J. reine. angew. Math. 357 (1985) 138–160.

[17] Peetre, J. : *lien obsolète.*

[18] Pólya, G. : Über die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J. L. W. V. Jensen, Kgl. Danske Vid. Sel. Math.-fys. Medd. VII (1927) 17 (33 pp.).

[19] Riemann, B. : Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge, Collected Papers, Springer Verlag & BSB Teubner Verlagsgesellschaft, 1990.

[20] Siegel, C. L. : Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, 2 (1932) 45–50, reprinted in [19, 770–805].

[21] Stokes, G. G. : On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series, Trans. Cambridge Phil. Soc. 9 (1847) 379–407.

[22] Weil, A. : Collected Papers, 3 Volumes, Springer Verlag, 1979.

[23] Weil, A. : Prehistory of the Zeta-Function, In : Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups, Symposium in Honor of Atle Selberg, K. E. Aubert, E. Bombieri and D. Goldfeld (Eds.), Academic Press, 1989, 1–9.

Author information

Samuel J. Patterson, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, Bunsenstr. 3–5, 37073 Göttingen, Germany.