

Entropie pour les automorphismes des algèbres de von Neumann de type II_1

A. Connes et E. Størmer

Résumé / Introduction : Dans cet article, nous étudions le problème suivant : prouver que pour $n \neq m$, le n -décalage du facteur hyperfini de type II_1 n'est pas conjugué au m -décalage. Pour chaque n , le n -décalage est l'automorphisme correspondant à la translation de 1 dans le produit tensoriel infini $R_1 = \otimes_{r \in \mathbb{Z}} (N, \tau)$, où N est l'algèbre des matrices $n \times n$ et τ la trace normalisée sur N . Comme le R_1 ci-dessus ne dépend pas de n (à isomorphisme près), car c'est l'unique facteur hyperfini de type II_1 , le problème ci-dessus a un sens.

Il existe une analogie évidente entre ce problème et le problème de la conjugaison des décalages de Bernoulli en théorie ergodique. En fait, les deux sont des cas particuliers du problème de conjugaison pour les automorphismes correspondant à la translation de 1 dans $\otimes_{v \in \mathbb{Z}} (N, \tau)$, où τ est une trace normalisée sur l'algèbre de von Neumann de dimension finie N .

Il est donc naturel d'essayer d'étendre la notion d'entropie de la théorie ergodique au cadre non commutatif. Il est connu depuis longtemps qu'étant donnée une algèbre de von Neumann M munie d'une trace normale fidèle semi-finie τ , et en considérant un état ϕ sur M , avec $\phi = \tau(\rho \cdot)$, la quantité $S(\phi) = \tau(\eta(\rho))$ où $\eta(x) = -x \log x$ mesure la quantité de 1 (aléatoire) dans ϕ pour les besoins de la mécanique quantique. De même, Wigner et Yanase ont défini la notion purement non commutative d'information biaisée entre ρ et une observable auto-adjointe K :

$$I_{\pm}(\rho, K) = \frac{1}{2} \tau \left([\rho^{1/2}, K]^2 \right).$$

Dyson a étendu cette définition et a introduit, pour $0 < p < 1$,

$$I_p(\rho, K) = \frac{1}{2} \tau \left([\rho^p, K][\rho^{1-p}, K] \right) = \tau(\rho^{1-p} K \rho^p K) - \tau(\rho K^2).$$

Ils ont conjecturé que I_p était une fonction concave de ρ pour chaque K fixé. Cette conjecture a été démontrée par E. Lieb avec K non nécessairement auto-adjoint et $I_p(\rho, K) = \tau(\rho^{1-p} K^* \rho^p K) - \tau(\rho K^* K)$.

En fait, il découle facilement du théorème de Lieb, qui a été démontré pour les facteurs de type I, mais dont la démonstration s'étend également aux algèbres de von Neumann finies, que

$$I(\rho, K) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} I_p(\rho, K) = \tau(\rho K^* [\log \rho, K])$$

est une fonction concave de ρ pour chaque K [5].

G. Lindblad définit dans [7] l'entropie relative d'un état ρ_1 par rapport à un état ρ_2 par la formule :

$$S(\rho_1 | \rho_2) = \tau(\rho_1 (\log \rho_1 - \log \rho_2)).$$

Voir l'original ici <https://denisevellachemla.eu/AC-biblio28.pdf> ou sur le site d'Alain Connes.

Il a prouvé [7, Théorème 1], [8] que S est une fonction conjointement convexe de ρ_1 et ρ_2 , un fait qui découle également de l'égalité :

$$\mathcal{S}(\rho_1|\rho_2) = -I\left(\begin{bmatrix}\rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right).$$

En raison de tels progrès dans la théorie de l'information non commutative, il était raisonnable d'espérer obtenir une définition correcte de l'entropie des automorphismes dans le cadre non abélien.

La principale difficulté provient du fait que deux sous-algèbres de dimension finie d'une algèbre de von Neumann non abélienne peuvent ne pas engendrer une algèbre de dimension finie (les abéliennes le font, voir par ex. [1, Théorème 3(ii)]). Ainsi, il n'y a pas d'analogue immédiat pour l'opération $P \vee Q$ entre partitions d'algèbres de von Neumann abéliennes. Nous avons donc cherché un remplacement, non pas du $\vee$ ci-dessus, mais de la quantité $H(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n)$.

Nous construisons pour chaque n une fonction $H(P_1, \dots, P_n)$, où les P_j sont des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie arbitraires d'une algèbre de von Neumann R donnée munie d'une trace finie τ , et H est symétrique par rapport à ses arguments.

Cette fonction satisfera aux exigences suivantes :

- (A) $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k)$ lorsque $N_j \subset P_j$, $j = 1, \dots, k$.
- (B) $H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_p) \leq H(N_1, \dots, N_k) + H(N_{k+1}, \dots, N_p)$.
- (C) $P_1, \dots, P_n \subset P \implies H(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots, P_m) \leq H(P, P_{n+1}, \dots, P_m)$.
- (D) Pour toute famille de projections minimales de N , $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ telle que $\sum e_\alpha = 1$, on a $H(N) = \sum_{\alpha \in I} \eta(\tau(e_\alpha))$.
- (E) Si $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$ est engendrée par des sous-algèbres de von Neumann P_j de N commutant deux à deux, alors $H(N_1, \dots, N_k) = H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$.

Les autres propriétés de H la relient à une fonction d'entropie relative $H(N|P)$ analogue à l'entropie relative de la théorie ergodique :

- (F) $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k) + \sum_j H(N_j|P_j)$.
- (G) $H(N|Q) \leq H(N|P) + H(P|Q)$.
- (H) $H(N|P)$ est croissante en N et décroissante en P .
- (I) Soient N_1 et N_2 commutant, alors $H(N_2|N_1) = H((N_1 \cup N_2)''|N_1) = H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1)$.

De plus, nous prouverons que H est fortement continue ; plus précisément, étant donnés n et $\epsilon > 0$, on trouve $\delta > 0$ tel que :

$$(\dim N = n, N \subset^\delta P) \implies H(N|P) < \epsilon.$$

Munis d'une telle fonction H , il est alors facile de définir, pour un automorphisme θ du couple (R, τ) préservant τ , les quantités :

$$H(N, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \theta^2(N), \dots, \theta^k(N))$$

$$H(\theta) = \sup_{N \text{ dim. finie}} H(N, \theta).$$

De plus, le théorème de Kolmogoroff-Sinai est vrai, pourvu que R soit hyperfini (il ne peut même pas être énoncé autrement) et prend la forme suivante :

Théorème 1. *Soit (N_k) une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R avec N_k faiblement dense dans R , alors $H(\theta) = \sup_{k \in \mathbb{N}} H(N_k, \theta)$ pour tout θ préservant τ .*

En utilisant la propriété D et la propriété E, on obtient :

Théorème 2. *Soit S_n le n -décalage du facteur hyperfini de type II_1 , alors $H(S_n) = \log n$.*

Ceci prouve en particulier que ces décalages ne sont pas conjugués pour des n différents. Nous généraliserons dans le théorème 4 le théorème 2 aux décalages de Bernoulli de R définis par des nombres positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1. Pour un tel θ , $H(\theta) = -\sum \lambda_j \log \lambda_j$.

1. Prémisses

Ici, nous fixons nos notations et rappelons au lecteur quelques faits connus de la théorie de l'information non commutative, puis nous prouvons une inéquation importante ((8)) qui sera utilisée plus loin. Tout au long des développements, R sera une algèbre de von Neumann finie munie d'une trace normale finie fidèle τ . Lorsqu'en est une sous-algèbre de von Neumann de R , nous notons E_N l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de R sur N qui préserve τ .

La lettre η désigne la fonction $x \in [0, +\infty[\rightarrow -x \log x$. Nous rappelons que :

- $\log$ est une fonction à croissance opératorielle sur $[0, +\infty[$ ([11] Prop. 2.5.8).
- η est une fonction opérateur-concave sur $[0, +\infty[$ [9].
- $\eta(xy) = \eta(x)y + x\eta(y)$ pour des opérateurs commutant x, y .

Nous posons, pour $x, y \in R_+$, $x \leq \lambda y$ pour un certain $\lambda > 0$,

$$S(x|y) = \tau(x(\log x - \log y)),$$

et il s'ensuit, comme montré dans l'introduction, que $S(x|y)$ est une fonction conjointement convexe de (x, y) .

Cela implique en particulier l'inégalité bien connue de Peierls-Bogoliubov :

$$\tau(x)(\log \tau(x) - \log \tau(y)) \leq \tau(x(\log x - \log y)).$$

Notons aussi que :

$$S(\lambda x|\lambda y) = \lambda S(x|y), \quad \lambda > 0.$$

En utilisant (4) et (6), l'inégalité suivante est alors facile à démontrer :

$$y_i, x_i \in R_+, y_i \leq x_i, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n \tau(y_i(\log x_i - \log y_i)) \leq \tau \eta \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(\text{car } \sum_{i=1}^n S(y_i|x_i) \geq S\left(\sum y_i \middle| \sum x_i\right) = -\tau\eta(\sum_{i=1}^n y_i)).$$

Nous déduisons maintenant de (7) une inégalité qui jouera un rôle fondamental dans la suite, et qui est utilisée dans la démonstration de la propriété C.

Soient I, J deux ensembles finis, $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ une famille d'éléments de R_+ telle que $\sum_{I \times J} x_{ij} = 1$, alors :

$$\sum_{i,j} \tau\eta(x_{ij}) \leq \sum_i \tau\eta(x_i^1) + \sum_j \tau\eta(x_j^2)$$

où $x_i^1 = \sum_j x_{ij}$ et $x_j^2 = \sum_i x_{ij}$.

Pour prouver (8), il suffit de montrer que :

$$\sum_{i,j} \tau\eta(x_{ij}) - \sum_j \tau\eta(x_j^2) = \sum_{i,j} \tau(x_{ij}(\log x_j^2 - \log x_{ij}))$$

et d'appliquer ensuite (7). Mais l'égalité ci-dessus découle de :

$$\sum_i \tau(x_{ij} \log x_j^2) = -\tau\eta(x_j^2) \quad \text{pour tout } j \in J.$$

2. Définition de H et démonstration des propriétés (A) à (I) de l'entropie conjointe

Soient R et τ comme dans la section 1. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit S_k l'ensemble de toutes les familles $(x_{i_1, i_2, \dots, i_k})_{i_j \in \mathbb{N}}$ d'éléments positifs de R , nuls sauf pour un nombre fini d'indices, et satisfaisant :

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 1.$$

Pour $x \in S_k$, $l \in \{1, \dots, k\}$, et $i_l \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$x_{i_l}^l = \sum_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_k} x_{i_1, \dots, i_k}.$$

Définition 3. Soient $N_1, \dots, N_k$ des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R , alors :

$$H(N_1, \dots, N_k) = \sup_{x \in S_k} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k} \eta\tau(x_{i_1, \dots, i_k}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta E_{N_l}(x_{i_l}^l) \right].$$

Il est clair que H est positive et symétrique, mais il n'est pas évident qu'elle prenne une valeur finie. Cela découlera en fait des propriétés (B) et (D).

Propriété (A). $H(N_1, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k)$ lorsque $N_j \subset P_j$, $\forall j$.

Démonstration. Pour tout $y \in R_+$ et $j \in \{1, \dots, k\}$, nous avons par l'inégalité de Jensen, qui découle de (2) et [2] :

$$\eta(E_{N_j}(y)) = \eta(E_{N_j} E_{P_j}(y)) \geq E_{N_j} \eta(E_{P_j}(y)).$$

D'où $\tau\eta E_{N_j}(y) \geq \tau\eta E_{P_j}(y)$, ce qui rend la preuve évidente. $\square$

Propriété (B). $H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_p) \leq H(N_1, \dots, N_k) + H(N_{k+1}, \dots, N_p)$.

Démonstration. Soit $x \in S_p$, et définissons $x' \in S_k$, $x'' \in S_{p-k}$ par :

$$\begin{aligned} x'_{i_1, \dots, i_k} &= \sum_{i_{k+1}, \dots, i_p} x_{i_1, \dots, i_p}, \\ x''_{j_1, \dots, j_{p-k}} &= \sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{p-k}}. \end{aligned}$$

Nous avons $x''_{i_l} = x_{i_l}^l$ pour $l \in \{1, \dots, k\}$, et $x''_{j_l} = x_{j_l}^{l+k}$ pour $l \in \{1, \dots, p-k\}$. Il nous reste donc simplement à prouver que :

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} \eta \tau(x_{i_1, \dots, i_p}) \leq \sum_{i_1, \dots, i_k} \eta \tau(x'_{i_1, \dots, i_k}) + \sum_{j_1, \dots, j_{p-k}} \eta \tau(x''_{j_1, \dots, j_{p-k}}).$$

Pour ce faire, soit m la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, D une partition de $[0, 1]$ dont l'atome générique $a_{i_1, \dots, i_p}$ a pour mesure $\tau(x_{i_1, \dots, i_p})$. Soient D' (resp. D'') la partition dont les atomes sont des unions d'atomes de D avec les k premiers indices fixés (resp. les $p-k$ derniers). Il est alors clair que l'inégalité ci-dessus découle de $h(D' \vee D'') \leq h(D') + h(D'')$, où h est l'entropie classique de la théorie ergodique. $\square$

Propriété (C). $P_1, \dots, P_n \subset P \implies H(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots, P_m) \leq H(P, P_{n+1}, \dots, P_m)$.

Démonstration. En utilisant la propriété A, nous pouvons supposer que $P_j = P$ pour $j = 1, \dots, n$. Soit $x \in S_m$. Nous construisons alors un $X \in S_{m-n+1}$ tel que, en posant $E_l = E_{P_l}$ pour $l \in \{1, \dots, m\}$, nous ayons :

$$\sum \eta \tau(x_{i_1, \dots, i_m}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau \eta E_l(x_{i_l}^l) \leq \sum \eta \tau(X_{j_1, \dots, j_{m-n+1}}) - \sum_l \sum_{j_l} \tau \eta(E_{l+n-1}(X_{j_l}^l))$$

Pour obtenir X , soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^n$ et posons :

$$X_{j_1, \dots, j_{m-n+1}} = x_{\phi(j_1)_1, \dots, \phi(j_1)_n, j_2, \dots, j_{m-n+1}}.$$

Clairement, pour $l > 1$, $X_{j_l}^l = x_{j_l}^{n+l-1}$ et de plus :

$$X_{j_1}^1 = \sum_{j_2, \dots, j_{m-n+1}} x_{\phi(j_1)_1, \dots, \phi(j_1)_n, j_2, \dots, j_{m-n+1}} = x'_{\phi(j_1)_1, \dots, \phi(j_1)_n}$$

où $x'_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{i_{n+1}, \dots, i_m} x_{i_1, \dots, i_m}$.

Ainsi, l'inégalité (9) est équivalente à :

$$\sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{i_l} \tau \eta E_l(x_{i_l}^l) \geq \sum_j \tau \eta (E_n x'_{\phi(j)_1, \dots, \phi(j)_n}).$$

Mais $E_l = E_n$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ et avec $y_{i_1, \dots, i_n} = E_n(x'_{i_1, \dots, i_n})$, nous obtenons :

$$\sum_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_n} y_{i_1, \dots, i_n} = E_n(x_i^l).$$

Par conséquent, l'inégalité (10) découle de (8). $\square$

Propriété (D). Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de projections minimales de N telle que $\sum_{\alpha \in I} e_\alpha = 1$. Alors $H(N) = \sum_{\alpha \in I} \eta\tau(e_\alpha)$.

Démonstration. Comme $\eta(e_\alpha) = 0$, nous avons :

$$\sum_I \eta\tau(e_\alpha) - \sum_I \tau\eta(E_N(e_\alpha)) = \sum_I \eta\tau(e_\alpha).$$

Ainsi, pour prouver la propriété D, il suffit de vérifier que pour tout $x \in S_1$:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(E_N(x_i)) \leq \sum_{\alpha \in I} \eta\tau(e_\alpha).$$

Puisque $\tau(E_N(x_i)) = \tau(x_i)$, on peut supposer, pour prouver (11), que tous les x_i sont dans N .

Nous avons pour chaque $a \in N^+$, $\tau\eta\tau(a) - \tau\eta(a) = \tau(a(\log a - \log \tau(a))) = S(a|\tau(a))$. Par conséquent, par (9) et (6), on a :

$$\forall a, b \in N^+, \quad \tau\eta(a+b) - \tau\eta(a+b) \leq (\tau\eta(a) - \tau\eta(a)) + (\tau\eta(b) - \tau\eta(b))$$

(en fait, (12) est aussi une conséquence facile de l'inégalité de Peierls-Bogoliubov (5)).

En utilisant (12) et la décomposition spectrale de chaque x_i , nous voyons que pour prouver (11), nous pouvons supposer que chaque x_i est le produit d'un scalaire positif λ_i par une projection minimale f_i de N .

Soit c une projection minimale dans le centre de N . Pour $i \in \mathbb{N}$, nous avons $x_i c = x_i$ ou $x_i c = 0$, et pour $\alpha \in I$, $e_\alpha c = 0$ ou $e_\alpha c = e_\alpha$. Soient $A_c = \{i \in \mathbb{N}, x_i c \neq 0\}$, $J_c = \{\alpha \in I, e_\alpha c \neq 0\}$. Pour prouver (11), il suffit clairement de montrer que :

$$\sum_{i \in A_c} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(x_i) = \sum_{\alpha \in J_c} \eta\tau(e_\alpha).$$

Maintenant $x_i = \lambda_i f_i$, donc par (3), $\eta(x_i) = \eta(\lambda_i) f_i$ et $\tau\eta(x_i) - \tau(\eta(\lambda_i) f_i) = \lambda_i \eta\tau(f_i)$. Comme les f_i ($i \in A_c$) sont tous équivalents :

$$\sum_{i \in A_c} \eta\tau(x_i) - \tau\eta(x_i) = - \left(\sum_{i \in A_c} \lambda_i \tau(f_i) \right) \log \tau(f) = -\tau(c) \log \tau(f)$$

où f est une projection minimale arbitraire de N telle que $f \leq c$. Le même calcul montre que $\sum_{\alpha \in J_c} \eta\tau(e_\alpha) = -\tau(c) \log \tau(f)$ et prouve l'égalité (13). $\square$

Propriété (E). Si $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$ est engendrée par des sous-algèbres P_j de N_1 commutant deux à deux, alors $H(N_1, \dots, N_k) = H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$.

Démonstration. Supposons d'abord que les N_i sont abéliennes et commutent deux à deux. Il découle des propriétés A et C que $H(N_1, \dots, N_k)$ est inférieur à $H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$. Soit $(e_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ pour chaque

$i \in \{1, \dots, k\}$ la liste des projections minimales de N_i , puis soit $x \in S_k$ tel que $x_{i_1, \dots, i_k} = e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_k^{i_k}$. Par la définition 1, nous avons :

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} \eta \tau(e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_k^{i_k}) \leq H(N_1, \dots, N_k).$$

Mais le premier terme est égal à $H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$ par la propriété D. Supposons maintenant que les N_i ne soient ni abéliennes ni commutantes. Nous avons par C, $H(N_1, \dots, N_k) \leq H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$. Pour prouver que $H(N_1, \dots, N_k) \geq H((N_1 \cup \dots \cup N_k)'')$, nous pouvons remplacer chaque N_i par le P_i correspondant, c'est-à-dire supposer que les N_j commutent deux à deux. Soit maintenant $A_i \subset N_i$ maximale abélienne dans N_i pour chaque j . Nous avons :

$$H(N_1, \dots, N_k) \geq H(A_1, \dots, A_k) = H((A_1 \cup \dots \cup A_k)'').$$

Il nous reste donc seulement à vérifier que $(A_1 \cup \dots \cup A_k)''$ est maximale abélienne dans $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$. Pour ce faire, on vérifie que tout produit de projections minimales e_i de N_i , disons $e = e_1 \dots e_k$, sera une projection minimale de $(N_1 \cup \dots \cup N_k)''$. $\square$

Propriété (F). $H(N_1, N_2, \dots, N_k) \leq H(P_1, \dots, P_k) + \sum_j H(N_j | P_j)$

où $H(N | P) = \sup_{x \in S_1} \sum (\tau \eta E_P(x_i) - \tau \eta E_N(x_i))$.

Démonstration. Immédiat d'après la définition 1. $\square$

Propriété (G). $H(N | Q) \leq H(N | P) + H(P | Q)$.

Démonstration. Soit $x \in S_1$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_i (\tau \eta (E_Q(x_i)) - \tau \eta (E_N(x_i))) &= \sum_i (\tau \eta (E_Q(x_i)) - \tau \eta (E_P(x_i))) + \sum_i (\tau \eta (E_P(x_i)) - \tau \eta (E_N(x_i))) \\ &\leq H(P | Q) + H(N | P). \end{aligned}$$

$\square$

Propriété (H). $H(N | P)$ est croissante en N et décroissante en P .

Démonstration. Même démonstration que pour la propriété A. $\square$

Propriété (I). Soient N_1 et N_2 des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R qui commutent. Alors :

$$H(N_2 | N_1) = H((N_1 \cup N_2)'' | N_1) = H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $R = (N_1 \cup N_2)''$. Alors $C_1 =$ Centre de N_1 est contenu dans le centre de R et il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} H(N_2 | N_1) &= \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c) H((N_2)_c | (N_1)_c), \\ H((N_1 \cup N_2)'' | N_1) &= \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c) H((N_1 \cup N_2)''_c | (N_1)_c), \end{aligned}$$

$$H((N_1 \cup N_2)'') - H(N_1) = \sum_{c \text{ atome de } C_1} \tau(c)(H((N_1 \cup N_2)''_c) - H((N_1)_c)),$$

où dans chacun des termes comme $H((N_2)_c|(N_1)_c)$, l'entropie est calculée dans R_c par rapport à $\tau/\tau(c)$.

Il s'ensuit que l'on peut supposer N_1 factorielle, auquel cas les égalités découlent de la deuxième propriété de sous-additivité forte de Lieb-Ruskai ([6]) qui montre que $H((N_1 \cup N_2)''|N_1) \leq H(N_2)$. $\square$

De plus, nous prouverons que H est fortement continue ; plus précisément, étant donnés n et $\epsilon > 0$, on trouve $\delta > 0$ tel que $(\dim N = n, N \subset^\delta P) \implies H(N|P) < \epsilon$.

3. Continuité de l'entropie relative dans la topologie forte

Soit R une algèbre de von Neumann finie donnée munie d'une trace τ . Si N, P sont des sous-algèbres de von Neumann de R , nous écrirons (cf. [12]) $N \subset^\delta P$ si et seulement si pour tout $x \in N$ avec $\|x\|_\infty \leq 1$, il existe $y \in P$ avec $\|y\|_\infty \leq 1$ tel que $\|x - y\|_2 < \delta$, où pour chaque $p \in [1, \infty]$, $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$ et $\|a\|_\infty$ est la norme C^* de a .

Théorème 4. *Soient R et τ comme ci-dessus. Pour chaque entier $n < \infty$, et chaque $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann N, P de R :*

$$(\dim N = n, N \subset^\delta P) \implies H(N|P) < \epsilon.$$

Première partie (les Lemmes 2 à 9 n'impliquent pas la fonction H).

Lemme 5. *Pour chaque $m > 0$ et $\eta > 0$, il existe un $\delta = \delta_m(\eta)$ tel que pour toute sous-algèbre de von Neumann P de R , et toute sous-algèbre de von Neumann abélienne A de R de projections minimales $(a_i)_{i=1, \dots, m}$ avec $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, on a :*

$$(A \subset^\delta P) \implies \left(\|a_i - a'_i\|_2 < \eta, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m a'_i = 1 \text{ pour une famille de projections } a'_i \in P \right).$$

Démonstration. Pour $m = 1$, le lemme est évident. Supposons-le prouvé pour $m \leq m_0$ et prouvons-le pour $m = m_0 + 1$. Choisissons η_1 tel que $9(3\eta_1)^{1/2} + \eta_1 \leq \eta$. Prenons ensuite δ plus petit que $\delta_{m_0}(\eta_1)$ et que η_1 . Soient A et P donnés, avec $A \subset^\delta P$, et soit B la sous-algèbre de von Neumann abélienne de A dont la liste des projections minimales est $b_1 = a_1, \dots, b_{m_0-1} = a_{m_0-1}, b_{m_0} = a_{m_0} + a_{m_0+1}$. Il existe par hypothèse des projections $(b'_j)_{j=1, \dots, m_0}$ de P telles que $\|b'_j - b_j\|_2 \leq \eta_1$ pour tout j . Comme $\delta \leq \eta_1$, il existe $x \in P_+$ avec $\|x\|_\infty \leq 1$ tel que $\|x - a_{m_0}\|_2 \leq \eta_1$.

Maintenant $b'_{m_0} x b'_{m_0}$ est un élément positif de R_+ tel que :

$$\|b'_{m_0} x b'_{m_0} - a_{m_0}\|_2 = \|b'_{m_0} x b'_{m_0} - b_{m_0} a_{m_0} b_{m_0}\|_2 \leq 2\|b'_{m_0} - b_{m_0}\|_2 + \|x - a_{m_0}\|_2 \leq 3\eta_1.$$

D'après [3, Lemme 4, p. 273], il existe une projection spectrale a'_{m_0} de $b'_{m_0} x b'_{m_0}$ telle que $\|a'_{m_0} - a_{m_0}\|_2 \leq 9(3\eta_1)^{1/2}$.

Nous avons $a'_{m_0} \in P$ et $a'_{m_0} \leq b'_{m_0}$, de sorte que la famille $(b'_1, \dots, b'_{m_0-1}, a'_{m_0}, b'_{m_0} - a'_{m_0})$ de projections de P satisfait aux conditions requises. $\square$

Lemme 6. Soit e une projection, $e \in R$, et soit $y \in R$ tel que $y^*y \leq e$. Soit $y = u\rho$ la décomposition polaire de y . Alors il existe une projection spectrale f de ρ telle que :

$$\|f - e\|_2 \leq 9\|y^*y - e\|_2^{1/2}, \quad \|uf - y\|_2 \leq 8\|y^*y - e\|_2^{1/2}.$$

Démonstration. D'après [3, Lemme 4, p. 273], en posant $\epsilon = \|\rho - e\|_2^{1/2}$ et en supposant $\epsilon < \frac{1}{2}$, la projection spectrale f de ρ correspondant à $[1 - \epsilon, 1]$ satisfera à la première des inégalités requises. De plus, d'après [3, p. 274], nous avons $\|\rho - f\|_2 \leq 8\epsilon$, d'où $\|uf - u\rho\|_2 \leq 8\epsilon$. $\square$

Lemme 7. Soient $n > 0$ et $\epsilon > 0$ donnés. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann Q et P de R avec $Q \subset^\delta P$, $\dim Q = n$, et tout système d'unités matricielles $(e_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n_k, k=1,\dots,s}$ avec $\sum_{i,k} e_{ii}^{(k)} = 1$ de Q , il existe un système d'unités matricielles $(p_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n_k, k=1,\dots,s}$ de P tel que $\|e_{j1}^{(k)} - p_{j1}^{(k)}\|_2 < \epsilon$ pour tout j, k .

Démonstration. Choisissons d'abord $\eta > 0$ tel que $3\eta + 9(7\eta)^{1/2} \leq \epsilon/3\sqrt{n}$.

Puis choisissons $\delta = \delta_n(\eta)$ comme dans le Lemme 2 avec $\delta < \eta$. Soient Q et P satisfaisant $Q \subset^\delta P$ et $(e_{ij}^{(k)})$ un système d'unités matricielles dans Q . D'après le Lemme 2, nous pouvons trouver une famille $(b_j^{(k)})_{j=1,\dots,n_k, k=1,\dots,s}$ de projections de P avec $\sum_{j,k} b_j^{(k)} = 1$ et $\|e_{jj}^{(k)} - b_j^{(k)}\|_2 \leq \eta$ pour tout j, k . Fixons maintenant k et construisons un système d'unités matricielles $n_k \times n_k$ $p_{ij}^{(k)}$ appartenant tous à $P_{\sum_j b_j^{(k)}}$. Soit $j \in \{1, \dots, n_k\}$, et $x \in P$ tel que $\|e_{j1}^{(k)} - x\|_2 < \eta$. Alors :

$$\|b_j^{(k)}xb_1^{(k)} - e_{j1}^{(k)}\|_2 \leq \|b_j^{(k)} - e_{jj}^{(k)}\|_2 + \|b_1^{(k)} - e_{11}^{(k)}\|_2 + \eta \leq 3\eta$$

et

$$\|(b_j^{(k)}xb_1^{(k)})^*(b_j^{(k)}xb_1^{(k)}) - b_1^{(k)}\|_2 \leq 7\eta.$$

Par conséquent, d'après le Lemme 3, il existe une isométrie partielle $u_j^{(k)} \in P$ de support initial $f_j^{(k)} \leq b_1^{(k)}$ telle que :

$$u_j^{(k)}u_j^{(k)*} \leq b_j^{(k)}, \quad \|u_j^{(k)} - e_{j1}^{(k)}\|_2 \leq 3\eta + 8(7\eta)^{1/2}, \quad \text{et} \quad \|b_1^{(k)} - f_j^{(k)}\|_2 \leq 9(7\eta)^{1/2}.$$

Posons $p_{11}^{(k)} = \bigwedge_j f_j^{(k)}$. Alors $\tau(b_1^{(k)} - p_{11}^{(k)}) \leq \sum_j \tau(b_1^{(k)} - f_j^{(k)})$, ce qui découle de la relation $e - e \wedge f \sim e \vee f - e$ pour les projections. Ainsi $\|b_1^{(k)} - p_{11}^{(k)}\|_2 \leq \epsilon/3$, d'où $\|e_{11}^{(k)} - p_{11}^{(k)}\|_2 \leq 2\epsilon/3$. Posons aussi $p_{j1}^{(k)} = u_j^{(k)}p_{11}^{(k)}$. Il est clair que les $p_{j1}^{(k)}p_{j1}^{(k)*}$ forment un système d'unités matricielles $n_k \times n_k$, et nous avons :

$$\|p_{j1}^{(k)} - e_{j1}^{(k)}\|_2 \leq \|u_j^{(k)} - e_{j1}^{(k)}\|_2 + \|p_{11}^{(k)} - e_{11}^{(k)}\|_2 \leq \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon.$$

$\square$

Notation 5. Soit N une sous-algèbre de von Neumann de R , alors pour toute projection $f \in N'$ nous posons $N^f = \{xf + \lambda(1 - f), x \in N, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Clairement N^f est une sous-algèbre de von Neumann de R .

Lemme 8. Soient $n > 0$ et $\alpha > 0$ donnés. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann N et P de R avec $N \subset^\delta P$, $\dim N = n$, il existe une sous-algèbre de von Neumann $\tilde{N}$ de P , $\dim \tilde{N} \leq n + 1$, une paire de projections $f \in N'$, $\tilde{f} \in \tilde{N}'$ et un unitaire $u \in R$ tels que : (1) $ufu^* = \tilde{f}$, (2) $uN^f u^* = \tilde{N}^{\tilde{f}}$, (3) $\|f - 1\|_2 \leq \alpha$, $\|\tilde{f} - 1\|_2 \leq \alpha$, (4) $\|u - 1\|_2 \leq \alpha$.

Démonstration. Choisissons d'abord $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \alpha/8n$ et $14\epsilon^{1/4} \leq \alpha/8n$.

Appliquons ensuite le Lemme 4 pour ce n et cet ϵ pour obtenir δ . Soient N et P donnés, $N \subset^\delta P$, et soit $(e_{ij}^{(k)})$ un système d'unités matricielles dans N . D'après le Lemme 4, il existe un système d'unités matricielles $(p_{ij}^{(k)})$ de P tel que $\|e_{i1}^{(k)} - p_{i1}^{(k)}\|_2 < \epsilon$ pour tout i, k .

Soit $\widetilde{N}$ la sous-algèbre de von Neumann de P engendrée par les $p_{ij}^{(k)}$. Clairement $\dim \widetilde{N} \leq n + 1$ (elle est égale à $n + 1$ si la somme des $p_{11}^{(k)}$ est différente de 1).

La démonstration du Lemme 5 (p. 274 de [3]) n'utilise pas l'hypothèse de "facteur". Par conséquent, nous obtenons pour chaque $k \in \{1, \dots, s\}$ une isométrie partielle w_k telle que $w_k^* w_k \leq e_{11}^{(k)}$, $w_k w_k^* \leq p_{11}^{(k)}$ et $\|w_k - e_{11}^{(k)}\|_2 \leq \alpha/8n$. Posons $w = \sum_k \sum_j p_{j1}^{(k)} w_k e_{1j}^{(k)}$. Les isométries partielles $p_{j1}^{(k)} w_k e_{1j}^{(k)}$ ont des projections initiales deux à deux orthogonales et des projections finales deux à deux orthogonales. Donc w est une isométrie partielle, avec $w^* w = \sum_{j,k} e_{j1}^{(k)} w_k^* w_k e_{1j}^{(k)}$ et $ww^* = \sum_{j,k} p_{j1}^{(k)} w_k w_k^* p_{1j}^{(k)}$.

Dès lors, $f = w^* w$ appartient à N' et $\widetilde{f} = ww^*$ appartient à $(\widetilde{N})'$. Pour tout i, j, k nous avons :

$$we_{ij}^{(k)} w^* = p_{i1}^{(k)} w_k e_{1i}^{(k)} e_{ii}^{(k)} e_{1i}^{(k)} w_k^* p_{1j}^{(k)} = p_{i1}^{(k)} w_k w_k^* p_{1i}^{(k)} = \widetilde{f} p_{ij}^{(k)}.$$

Soit u un unitaire dans R tel que $uf = w$. Alors :

$$ufu^* = ww^* = \widetilde{f}, \quad ufe_{ij}^{(k)} fu^* = \widetilde{f} p_{ij}^{(k)} \quad \forall i, j, k.$$

D'où $uN^f u^* = \widetilde{N}^{\widetilde{f}}$.

Aussi $\|w - \sum_k \sum_j e_{j1}^{(k)} e_{11}^{(k)} e_{1j}^{(k)}\|_2 \leq n\epsilon + n\frac{\alpha}{8n} \leq \frac{\alpha}{4}$, de sorte que $\|w - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{4}$, et par suite $\|f - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{2}$, $\|\widetilde{f} - 1\|_2 \leq \frac{\alpha}{2}$, et $\|u - 1\|_2 \leq \|uf - 1\|_2 + \|u(1 - f)\|_2 \leq \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \leq \alpha$. $\square$

Lemme 9. Soit $\alpha > 0$, u un unitaire dans R tel que $\|u - 1\|_2 \leq \alpha$, alors il existe des unitaires v et v' tels que $\|v - 1\|_\infty \leq \alpha^{1/2}$, $\tau(\text{Support}(v' - 1)) \leq \alpha^{1/2}$ et $vv' = u$.

Démonstration. Soit e' la projection spectrale de u telle que $|u - 1|^2 e' \geq \alpha e'$ et $|u - 1|^2 (1 - e') \leq \alpha(1 - e')$. Prenons alors $v = u(1 - e') + e'$ et $v' = (1 - e') + ue'$, et utilisons l'inégalité $\tau(|u - 1|^2 e') \leq \|u - 1\|_2^2 \leq \alpha^2$ pour obtenir $\tau(e') \leq \alpha$. $\square$

Lemme 10. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que si N est une sous-algèbre de von Neumann de R avec $\dim N = n$, alors pour toute projection $e \in R$, il existe une projection $E \in N' \cap R$ telle que $E \leq e$ et $\tau(1 - E) \leq k(n)\tau(1 - e)$.

Démonstration. Considérons N comme plongée en blocs le long de la diagonale principale dans les matrices $n \times n$ M_n . M_n est engendrée par le groupe H d'unitaires à coefficients 0, ± 1 . Posons $k(n) = \text{card } H$. Si $G = H \cap N$, alors $(G)'' = N$. Posons $E = \bigwedge_{u \in G} ueu^*$. $\square$

Lemme 11. Soient n et $\epsilon' > 0$ donnés. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que, pour toute paire de sous-algèbres de von Neumann de R , avec $N \subset^\delta P$ et $\dim N = n$, il existe un unitaire v avec $\|v - 1\|_\infty \leq \epsilon'$, une projection E avec $\tau(E) > 1 - \epsilon'$ et une sous-algèbre de von Neumann $\widetilde{N}$ de P avec $\dim \widetilde{N} \leq n + 1$ telles que :

$$E \in N', \quad vEv^* \in \widetilde{N}', \quad \text{et} \quad vN^E v^* = (\widetilde{N})^{(vEv^*)}.$$

Démonstration. Choisissons $\alpha > 0$ tel que si $k(n)$ est défini comme dans le Lemme 8, alors $\alpha^{1/2} \leq \epsilon'$ et $\alpha^{1/2} + \alpha^2 \leq \epsilon'/k(n)$.

Puis choisissons δ correspondant à n et α par le Lemme 6. Soient $N \subset^\delta P$ avec $\dim N = n$. Soient alors $\widetilde{N} \subset P, u, f, \widetilde{f}$ satisfaisant les conditions du Lemme 6. D'après le Lemme 7, il existe des unitaires $v, v' \in R$ avec $vv' = u$ et $\|v - 1\|_\infty \leq \alpha^{1/2}$, $\tau(\text{Support}(v' - 1)) \leq \alpha^{1/2}$. Soit $e = f(1 - \text{Support}(1 - v'))$, de sorte que $\tau(1 - e) \leq \tau(1 - f) + \tau(\text{Support}(1 - v')) \leq \|1 - f\|_2^2 + \alpha^{1/2} \leq \alpha^2 + \alpha^{1/2} \leq \epsilon'/k(n)$.

Soit $E \in N'$ une projection telle que $E \leq e$, $\tau(1 - E) \leq k(n)\tau(1 - e) \leq \epsilon'$ (Lemme 8). Comme $E \leq f$, nous avons $(N^f)^E = N^E$, et $((\widetilde{N})^{\widetilde{f}})^{(uEu^*)} = (uN^f u^*)^{(uEu^*)} = uN^E u^*$, et comme $uEu^* \leq \widetilde{f}$, $\widetilde{N}^{(uEu^*)} = uN^E u^*$. Aussi $E \leq e$, de sorte que $uEu^* = vEv^*$, et $uN^E u^* = vN^E v^*$, d'où $vN^E v^* = \widetilde{N}^{(vEv^*)}$. $\square$

Seconde partie

Lemme 12. Soient $n > 0$ et $\epsilon > 0$ donnés. Il existe alors un $\epsilon' > 0$ tel que pour toute sous-algèbre de von Neumann Q de R de dimension n , on a :

$$H(Q|vQv^*) < \epsilon \quad \forall v \text{ unitaire avec } \|v - 1\|_\infty < \epsilon'.$$

Démonstration. Choisissons ϵ' tel que pour toute famille de réels positifs $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ avec $\sum \alpha_i = 1$ et toutes familles $\lambda_i, \lambda'_i > 0, i = 1, \dots, n$ avec $\sum \lambda_i = \sum \lambda'_i = 1$,

$$\sum |\lambda_i - \lambda'_i| \alpha_i < 2\epsilon' \implies |\sum (\eta(\lambda_i) - \eta(\lambda'_i)) \alpha_i| < \epsilon.$$

Soient alors Q et v donnés. Soit $x \in R_+$, $\tau(x) = 1$. Nous avons $E_{vQv^*}(x) = vE_Q(v^*xv)v^*$, $\tau\eta E_{vQv^*}(x) = \tau\eta E_Q(v^*xv)$. Maintenant $X = E_Q(x)$ et $X' = E_Q(v^*xv)$ appartiennent tous deux à Q^+ et satisfont $\tau(X) = \tau(X') = 1$, $\|X' - X\|_1 \leq \|v^*xv - x\|_1 \leq 2\epsilon'$ puisque E_Q est une contraction dans la norme $\|\cdot\|_1$.

Soient $q_1, \dots, q_s$ la liste des atomes du centre de Q , où Q_{q_j} est de type n_j , avec $\sum n_j^2 = n$ de sorte que $\sum n_j \leq n$. Soient $X = \sum_{k,j} \lambda_j^{(k)} e_j^{(k)}$ (resp. $X' = \sum_{k,j} \lambda'_j{}^{(k)} e_j'^{(k)}$) la décomposition spectrale de X (resp. X'), où pour chaque k, j , $e_j^{(k)}$ et $e_j'^{(k)}$ sont des projections minimales de Q_{q_k} . Nous avons, pour un choix convenable des décompositions [10, Théorème 5.6], que :

$$\sum |\lambda_i^{(k)} - \lambda'_i{}^{(k)}| \tau(e_i^{(k)}) \leq 2\epsilon',$$

et par conséquent :

$$|\tau\eta E_{vQv^*}(x) - \tau\eta E_Q(x)| = |\sum (\eta(\lambda_i^{(k)}) - \eta(\lambda'_i{}^{(k)})) \tau(e_i^{(k)})| \leq \epsilon.$$

Nous avons montré que pour tout $x \in R^+$, $|\tau\eta E_{vQv^*}(x) - \tau\eta E_Q(x)| \leq \epsilon\tau(x)$. Il s'ensuit facilement que $H(Q|vQv^*) < \epsilon$. $\square$

Lemme 13. Soit N une sous-algèbre de von Neumann de R de dimension $\leq n$ et $E \in N'$ une projection, alors :

$$H(N^E|N) \leq \eta(\tau(E)) + \eta(1 - \tau(E)),$$

$$H(N|N^E) \leq \eta(\tau(E)) + \eta(1 - \tau(E)) + \tau(1 - E) \log n.$$

Démonstration. Soit Q l'algèbre de von Neumann engendrée par N et la sous-algèbre de von Neumann abélienne A de N' engendrée par E . Nous avons (propriété I) $H(Q|N) \leq H(A) = \eta\tau(E) + \eta\tau(1 - E)$.

Puisque N^E et N^{1-E} commutent et engendrent Q , nous avons (propriété I) :

$$H(Q|N^E) \leq H(N^{1-E}) \leq \eta\tau(1 - E) + \eta(\tau(E)) + \tau(1 - E) \log n$$

et

$$H(N|N^E) \leq H(Q|N^E) \leq \eta(\tau(1 - E)) + \eta\tau(E) + \tau(1 - E) \log n,$$

$$H(N^E|N) \leq H(Q|N) \leq \eta(\tau(E)) + \eta(\tau(1 - E)).$$

□

Fin de la démonstration du théorème 1.

Choisissons d'abord ϵ' de telle sorte que le Lemme 10 soit satisfait avec $n + 1$ et $\epsilon/2$, et de telle sorte que $\epsilon' \leq 1/2$ et $2(\eta(\epsilon') + \eta(1 - \epsilon')) + \epsilon' \log(n + 1) \leq \epsilon/2$.

Puis choisissons δ de sorte que le Lemme 9 soit satisfait pour n et ϵ' . Soient maintenant N et P donnés, avec $N \subset^\delta P$ et $\dim N = n$. D'après le Lemme 9, nous trouvons $E \in N'$ avec $\tau(E) > 1 - \epsilon'$, et $\widetilde{N}$ avec $\widetilde{N} \subset P$, $\dim \widetilde{N} \leq n + 1$, et un unitaire $v \in R$ avec $\|v - 1\|_\infty < \epsilon'$ tels que $vN^E v^* = \widetilde{N}^{(vEv^*)}$. D'après le Lemme 11, nous avons :

$$H(N|N^E) \leq \eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon') + \epsilon' \log(n + 1).$$

D'après le Lemme 10, nous avons :

$$H(N^E|vN^E v^*) \leq \epsilon/2.$$

D'après le Lemme 11, nous avons :

$$H(\widetilde{N}^{(vEv^*)}|\widetilde{N}) \leq \eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon').$$

Ainsi, en utilisant la propriété G et le fait que $H(\widetilde{N}|P) = 0$, nous obtenons :

$$H(N|P) \leq 2(\eta(1 - \epsilon') + \eta(\epsilon')) + \epsilon' \log(n + 1) + \epsilon/2 \leq \epsilon.$$

4. Le théorème de Kolmogoroff-Sinai non abélien

Définition 14. Soit θ un automorphisme de l'algèbre de von Neumann finie R , préservant la trace normale fidèle τ , $\tau(1) = 1$. Alors :

(a) Pour toute sous-algèbre de von Neumann de dimension finie N de R , posons :

$$H(N, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \dots, \theta^k(N)).$$

(b) Posons $H(\theta) = \sup_N H(N, \theta)$.

Note : En (a), la limite existe en raison de la propriété B.

Théorème 15. Soit R une algèbre de von Neumann hyperfinie de type II_1 , et θ comme ci-dessus. Soit $(P_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de R avec $(\bigcup_{q=1}^{\infty} P_q)'' = R$ (fermeture faible), alors :

$$H(\theta) = \lim_{q \rightarrow \infty} H(P_q, \theta).$$

Démonstration. Soit N une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de R , et $\epsilon > 0$. Appliquons le théorème 1 de la section 3 pour obtenir un q tel que $H(N|P_q) < \epsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} H(N, \theta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(N, \theta(N), \dots, \theta^k(N)) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(P_q, \theta(P_q), \dots, \theta^k(P_q)) + \overline{\lim}_k \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k H(\theta^j(N)|\theta^j(P_q)) \\ &\leq H(P_q, \theta) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 16. Soit N_0 une algèbre de von Neumann de dimension finie munie d'une trace normalisée τ_0 . Posons $(R, \tau) = \otimes_{v \in \mathbb{Z}} (N_0, \tau_0)_v$ et soit S l'automorphisme de R correspondant à la translation de 1 dans $\mathbb{Z}$. Alors S préserve τ et $H(S) = H(N_0)$.

Démonstration. Soit π_j le homomorphisme de N_0 dans R tel que $\pi_j(x) = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \dots$ (en position j). Nous avons par construction $S\pi_j = \pi_{j+1}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P_k = (\bigcup_{|j| \leq k} \pi_j(N))''$. Il est clair que les P_k forment une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de R et que $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ est faiblement dense dans R .

La propriété E montre que $H(P_k, SP_k, \dots, S^n P_k) = (2k + n + 1)H(N_0)$, d'où le fait que le théorème 3 découle du théorème 2. □

Nous étendons ensuite le théorème 3 à une classe plus large d'automorphismes ergodiques du facteur hyperfini R qui sont les analogues des décalages de Bernoulli. Rappelons que si M_n est le facteur de type I_n avec une trace Tr_n telle que $\text{Tr}_n(1) = n$, et ω est un état de M_n , alors $\omega(x) = \text{Tr}_n(hx)$, où h est un opérateur positif de trace 1, et la liste des valeurs propres de ω est le spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de h compté avec multiplicité. Si R_m est une algèbre de von Neumann et ϕ_m un état normal de R_m pour $m \in \mathbb{Z}$, nous désignons comme précédemment par $\otimes_{m \in \mathbb{Z}} (R_m, \phi_m)$ l'algèbre de von Neumann obtenue à partir de la représentation GNS de $\otimes \phi_m$ sur le produit tensoriel d'algèbres C^* .

Si ϕ est un état sur une algèbre de von Neumann M , son centralisateur est l'algèbre $\{x \in M : \phi(xy - yx) = 0, \forall y \in M'\}$. Le théorème suivant a également été noté par W. Krieger.

Théorème 17. Soit M_0 l'algèbre des matrices $n \times n$ et ϕ_0 un état fidèle sur M_0 avec une liste de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, soient $M_m = M_0$ et $\phi_m = \phi_0$. Soit $M = \otimes_{m \in \mathbb{Z}} (M_m, \phi_m)$. Alors :

- (1) Si R est le centralisateur de $\otimes \phi_m$ dans M , alors R est le facteur hyperfini de type II_1 .
- (2) La restriction du décalage sur M à R est un automorphisme ergodique d'entropie $-\sum_{j=1}^n \lambda_j \log \lambda_j$.

Définition 18. *L'automorphisme de R construit ci-dessus est le décalage de Bernoulli défini par $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.*

Démonstration. Soit ϕ l'état normal $\otimes \phi_m$ sur M . Il est bien connu que ϕ est fidèle et que M est un facteur. Si $p \leq q$ sont des entiers, soit M_p^q l'image de $\otimes_p^q M_m$ dans M sous son plongement naturel. Soit F_p^q le centralisateur de $\phi|_{M_p^q}$ dans M_p^q . Si $p \leq r \leq s \leq q$, alors clairement $F_r^s \subset F_p^q$. Nous affirmons que $\bigcup_1^\infty F_{-p}^p$ est fortement dense dans R .

Soit $\sigma_t = \sigma_t^\phi$ l'automorphisme modulaire de M défini par ϕ [15]. Puisque ϕ est un état produit, pour chaque $p \leq q$ nous avons $\sigma_t = \sigma_t|_{M_p^q} \otimes \sigma_t|(M_p^q)^c$, où $(M_p^q)^c = (M_p^q)' \cap M$, et M est identifié à $M_p^q \otimes (M_p^q)^c$. Soit Φ l'espérance conditionnelle normale fidèle σ -invariante de M sur R [4]. Alors $\Phi(M_p^q) = F_p^q$. Soit $x \in R$. Puisque $\bigcup_1^\infty M_{-p}^p$ est fortement dense dans M , il existe un $\{x_\alpha\}$ dans $\bigcup_1^\infty M_{-p}^p$ convergeant fortement vers x . Ainsi $x = \Phi(x) = \text{forte-lim } \Phi(x_\alpha)$, avec $\Phi(x_\alpha) \in \bigcup_1^\infty F_{-p}^p$. L'affirmation en découle.

Montrons que R est un facteur ; par le paragraphe ci-dessus, R est alors le facteur hyperfini de type II_1 . Soit P le groupe des permutations finies sur $\mathbb{Z}$ et G le groupe des $*$ -automorphismes de M défini par l'action de P sur les facteurs du produit tensoriel infini. Puisque ϕ est G -invariant, les automorphismes sont bien définis, et R est globalement invariant pour chaque $g \in G$. Si $g \in G$, il existe des entiers $p \leq q$ tels que g est un automorphisme de M_p^q et l'identité sur $(M_p^q)^c$. Puisque M_p^q est un facteur de type I, g est un automorphisme intérieur de M , implémenté par un opérateur unitaire $u_g \in M$. Puisque ϕ est G -invariant, $u_g \in R$. Les arguments de [13] montrent que l'algèbre $C^* M_m$ est asymptotiquement abélienne par rapport à G et que ϕ est un état invariant extrémal. Puisque ϕ est fidèle sur M , G agit de manière ergodique sur M [14]. Puisque $u_g \in R$ pour tout $g \in G$, R est un facteur, comme affirmé.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, soit α l'automorphisme de M qui décale les facteurs du produit tensoriel infini d'un facteur vers la droite, de sorte que $\alpha(M_p^q) = M_{p+1}^{q+1}$, et soit H le groupe cyclique engendré par α . Comme ci-dessus, ϕ est H -invariant, l'automorphisme est bien défini, et $\otimes M_m$ est asymptotiquement abélien par rapport à H . Puisque M est un facteur, ϕ est ergodique [14], et H agit de manière ergodique sur M [14]. Soit θ la restriction de α à R . Alors θ est un automorphisme ergodique de R . D'après le théorème 2, $H(\theta) = \lim H(F_{-p}^p, \theta)$. Fixons p ; alors :

$$H(F_{-p}^p, \theta(F_{-p}^p), \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) = H(F_{-p}^p, F_{-p+1}^{p+1}, \dots, F_{-p+k}^{p+k}).$$

Par la propriété C :

$$H(F_{-p}^p, \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) \leq H(F_{-p}^{p+k}).$$

Soit A_{-p}^p une sous-algèbre abélienne maximale de F_{-p}^p telle que A_{-p}^p commute avec $\theta^j(A_{-p}^p)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et telle que $A = (A_{-p}^p \cup \theta(A_{-p}^p) \cup \dots \cup \theta^k(A_{-p}^p))''$ est une sous-algèbre abélienne maximale de F_{-p}^{p+k} . Ce choix est possible puisque ϕ est un état produit. Ainsi, par les propriétés C, D, E ainsi que l'inégalité ci-dessus, nous avons :

$$H(F_{-p}^p, \dots, \theta^k(F_{-p}^p)) = H(A) = (2p + k) \left(- \sum_1^n \lambda_j \log \lambda_j \right).$$

La démonstration est complète. □

Remarque : Récemment, G. Emch a défini une entropie pour les automorphismes d'algèbres de von Neumann. Sa définition est différente de la nôtre, et dans la mesure où son entropie ne peut pas être calculée dans les exemples ci-dessus en raison de l'absence d'un théorème de Kolmogoroff-Sinai, nous ne savons pas si les deux définitions coïncident dans le cas des décalages. En fait, sa définition de $H(N, \theta)$ n'est même pas croissante en N , de sorte que nous ne croyons pas que l'analogie de notre théorème 2 puisse être prouvé dans son cadre.

Remarque : Un autre candidat possible pour l'entropie d'un automorphisme est l'entropie abélienne :

$$H_a(\theta) = \sup H(\theta|A),$$

où le supremum est pris sur toutes les sous-algèbres de von Neumann abéliennes A de R avec $\theta(A) = A$ et $H(\theta|A)$ est l'entropie de $\theta|A$ définie dans le cas abélien. Si θ est le décalage de Bernoulli défini par $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, nous obtenons à nouveau $H_a(\theta) = -\sum_{j=1}^n \lambda_j \log \lambda_j$. Cependant, la définition est insatisfaisante en ce sens qu'il n'est pas clair qu'il existe de grandes sous-algèbres de von Neumann abéliennes invariantes pour un θ donné. Dans la remarque suivante, nous montrons comment calculer $H(\theta^k)$ à partir de $H(\theta)$; il est hautement improbable que la même formule soit valable pour l'entropie abélienne H_a , car une algèbre de von Neumann abélienne $A \subset R$ globalement invariante sous θ^k n'est pas nécessairement globalement invariante par θ .

Remarque : Soit R une algèbre de von Neumann de type II_1 , et θ un automorphisme préservant une trace normale fidèle τ satisfaisant $\tau(1) = 1$. Nous montrons que si p est un entier, alors $|p|H(\theta) \geq H(\theta^p)$, et si R est hyperfini, alors $|p|H(\theta) = H(\theta^p)$. Le cas $p = 0$ est trivial, de même que l'identité $H(\theta^{-1}) = H(\theta)$. Nous supposons donc $p > 0$. Soient $\epsilon > 0$, N une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de R , et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$H(\theta^p) < \frac{1}{r} H(N, \theta^p N, \dots, \theta^{rp} N) + \epsilon \quad \text{pour } r \geq n_0.$$

Il découle immédiatement des propriétés A et C que :

$$H(N_1, \dots, N_k) \leq H(N_1, \dots, N_k, N_{k+1})$$

pour des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie $N_1, \dots, N_{k+1}$ de R . Par conséquent, pour n_0 suffisamment grand, et $r \geq n_0$:

$$H(\theta) + \epsilon > \frac{1}{rp} H(N, \theta N, \dots, \theta^{rp} N) > \frac{1}{rp} H(N, \theta^p N, \dots, \theta^{rp} N) > \frac{1}{p} H(\theta^p) - \frac{\epsilon}{p}.$$

Ainsi $pH(\theta) \geq H(\theta^p)$.

Pour l'inégalité réciproque, supposons que R soit hyperfini, il existe donc une suite croissante $\{F_j\}$ de sous-algèbres de von Neumann de dimension finie dont l'union est faiblement dense dans R . Soient $\epsilon > 0$. D'après le théorème 2, il existe $k, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\left| H(\theta) - \frac{1}{n} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^n F_k) \right| < \frac{\epsilon}{p} \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Soit $m = \dim F_k$. Choisissons d'après le théorème 1 un $\delta > 0$ si petit que pour des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie N et P de R , nous ayons :

$$(\dim N = m, N \subset^\delta P) \implies H(N|P) < \frac{\epsilon}{p}.$$

Puisque la suite $\{F_j\}$ est croissante avec une union dense dans R , il existe $q \in \mathbb{N}, q \geq k$, tel que $F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{p-1} F_k \subset F_q$. Choisissons $r \in \mathbb{N}$ si grand que $rp \geq n_0$. Par la propriété C :

$$H(F_q, \theta^p F_q, \dots, \theta^{rp} F_q) \geq H(F_k, \dots, \theta^p F_k, \dots, \theta^{(r-1)p} F_k, \dots, \theta^{rp} F_k),$$

où toutes les répétitions se produisent p fois. En utilisant ceci avec la propriété F, nous obtenons à partir de (1)-(4) :

$$\begin{aligned} H(\theta^p, F_q) + \epsilon &> \frac{1}{r} H(F_q, \theta F_q, \dots, \theta^{rm} F_q) \\ &\geq \frac{1}{r} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{rm} F_k) - \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^{sp+t} F_k | \theta^{sp} F_q) - \frac{1}{r} H(\theta^{rm} F_k | \theta^{rm} F_q) \\ &= \frac{p}{rp} H(F_k, \theta F_k, \dots, \theta^{rm} F_k) - \frac{1}{r} \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^t F_k | F_q) - \frac{1}{r} H(F_k | F_q) \\ &> p \left(H(\theta) - \frac{\epsilon}{p} \right) - \left(p + \frac{1}{r} \right) \frac{\epsilon}{p} \geq pH(\theta) - 3\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $H(\theta^p) \geq pH(\theta)$, comme affirmé.

Références

- [1] H. Behncke, Topics in C^* - and von Neumann algebras. *Lectures in operator algebras*, Lecture Notes Math. 247, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972, 2-55.
- [2] M. D. Choi, Positive linear maps on C^* -algebras, *Canad. J. Math.*, 24 (1972), 520-529.
- [3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [4] I. Kovács & J. Szcs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 233-246.
- [5] E. H. Lieb, Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture, *Advances Math.*, 11 (1973), 267-288.
- [6] E. H. Lieb & M. B. RUSKAI, Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy, *J. Math. Physics*, 14 (1973), 1938-1941.
- [7] G. Lindblad, Entropy, information and quantum measurements, *Commun. Math. Phys.*, 33 (1973), 305-322.
- [8] G. Lindblad, Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems, *Commun. Math. Phys.*, 39 (1974), 111-119.
- [9] M. Nakamura & H. Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, *Proc. Japan Acad.*, 37 (1961), 149-154.
- [10] R. T. Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, *Ann. of Math.*, 86 (1967), 138-171.
- [11] D. Ruelle, *Statistical mechanics, rigorous results*, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam 1969.
- [12] S. Sakai, *C^* - and W^* -algebras*, Ergebnisse der Math., Band 60.
- [13] E. Størmer, Symmetric states of infinite tensor products of C^* -algebras, *J. Funct. Anal.*, 3 (1969), 48-68.
- [14] E. Størmer, Asymptotically abelian system, *Cargèse lectures in physics*, Vol. 4, 195-213, New York, Gordon and Breach 1970.
- [15] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes Math. 128, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1970.