Qu'est-ce qu'un nombre naturel ?
Richard Dedekind

I. Système d'éléments

1. Dans ce qui suit, j'entends par *chose* tout objet de notre pensée. Pour pouvoir parler commodément des choses, on les désigne par des signes, par exemple par des lettres, et on se permet de parler brièvement de la chose a ou même de a, alors qu'en réalité on vise la chose désignée par a, et non la lettre a elle-même. Une chose est complètement déterminée par tout ce qui peut être affirmé ou pensé d'elle. Une chose a est la même que b (identique à b), et b la même que a, si tout ce qui peut être pensé de a peut aussi l'être de b, et si tout ce qui vaut pour b peut aussi être pensé de a. Que a et b ne soient que des signes ou des noms pour une seule et même chose est indiqué par le signe $a = b$ et de même par $b = a$. Si de plus $b = c$, si donc c est aussi, comme a, un signe pour la chose désignée par b, alors on a aussi $a = c$. Si l'accord précité de la chose désignée par a avec la chose désignée par b n'existe pas, ces choses a, b sont dites différentes, a est une autre chose que b, b une autre chose que a ; il existe une propriété quelconque qui convient à l'une et pas à l'autre.

2. Il arrive très souvent que des choses différentes $a, b, c \ldots$ soient, pour une raison quelconque, envisagées sous un point de vue commun, rassemblées dans l'esprit, et on dit alors qu'elles forment un *système* S ; on appelle les choses $a, b, c \ldots$ les *éléments* du système S, ils sont *contenus* dans S ; inversement, S est composé de ces éléments. Un tel système S (ou un ensemble, une multiplicité, une totalité) est, en tant qu'objet de notre pensée, également une chose (1) ; il est complètement déterminé lorsque pour chaque chose il est déterminé si elle est élément de S ou non.

3. Le système S est donc le même que le système T, en signes $S = T$, si tout élément de S est aussi élément de T et tout élément de T est aussi élément de S. Pour l'uniformité de l'expression, il est avantageux d'admettre aussi le cas particulier où un système S est composé d'un seul (d'un et d'un seul) élément a, c'est-à-dire que la chose a est élément de S, mais que toute chose différente de a n'est pas élément de S. En revanche, nous voulons exclure ici, pour certaines raisons, le système vide, qui ne contient aucun élément, bien qu'il puisse être commode pour d'autres recherches d'en ériger un.

4. **Définition.** Un système A est appelé *partie* d'un système S lorsque tout élément de A est aussi élément de S. Comme cette relation entre un système A et un système S reviendra sans cesse dans la suite, nous voulons l'exprimer en abrégé par le signe $A \Subset S$. Le signe inverse $S \Supset A$, qui pourrait désigner le même fait, je l'éviterai entièrement pour plus de clarté et de simplicité, mais je dirai parfois, faute d'un meilleur mot, que S est un *ensemble* de A, ce qui doit donc exprimer que parmi les éléments de S se trouvent aussi tous les éléments de A. Comme, en outre, tout élément s d'un système S peut, d'après 2, être lui-même envisagé comme système, nous pouvons aussi appliquer ici la notation $s \Subset S$.

5. **Théorème.** D'après 3, on a $A \Subset A$.

6. **Théorème.** Si $A \Subset B$ et $B \Subset A$, alors $A = B$. La preuve découle de 3, 2.

7. **Définition.** Un système A est appelé une *partie propre* de S si A est une partie de S, mais différente de S. D'après 5, S n'est alors pas une partie de A, c'est-à-dire (3) qu'il existe dans S un élément qui n'est pas élément de A.

8. **Théorème.** Si $A \Subset B$ et $B \Subset C$, ce qu'on peut aussi noter brièvement par $A \Subset B \Subset C$, alors $A \Subset C$, et A est certainement une partie propre de C si A est une partie propre de B ou si B est une partie propre de C. La preuve découle de 3, 6.

9. **Définition.** Par système *composé* de systèmes quelconques $A, B, C \ldots$, qui sera noté

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots),$$

on entend le système dont les éléments sont déterminés par la règle suivante : une chose vaut comme élément de $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ si et seulement si elle est élément de l'un quelconque des systèmes $A, B, C \ldots$, c'est-à-dire élément de A ou de B ou de $C \ldots$ Nous admettons aussi le cas où un seul système A est présent ; alors il est évident que $\mathfrak{M}(A) = A$. Nous remarquons en outre que le système $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$, composé de $A, B, C \ldots$, est bien distinct du système dont les éléments sont les systèmes $A, B, C \ldots$ eux-mêmes.

10. **Théorème.** Les systèmes $A, B, C \ldots$ sont des parties de

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

La preuve découle de 8, 3.

11. **Théorème.** Si $A, B, C \ldots$ sont des parties d'un système S, alors $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \Subset S$. La preuve découle de 8, 3.

12. **Théorème.** Si P est une partie de l'un des systèmes $A, B, C \ldots$, alors $P \Subset \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$. La preuve découle de 9, 7.

13. **Théorème.** Si chacun des systèmes $P, Q \ldots$ est une partie de l'un des systèmes $A, B, C \ldots$, alors $\mathfrak{M}(P, Q \ldots) \Subset \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$. La preuve découle de 11, 10.

14. **Théorème.** Si A est composé de certains des systèmes $P, Q \ldots$, alors $A \Subset \mathfrak{M}(P, Q \ldots)$.

Preuve. Car tout élément de A est, d'après 8, élément de l'un des systèmes $P, Q \ldots$, donc, d'après 8, aussi élément de $\mathfrak{M}(P, Q \ldots)$, d'où découle le théorème d'après 3.

15. **Théorème.** Si chacun des systèmes $A, B, C \ldots$ est composé de certains des systèmes $P, Q \ldots$, alors

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \Subset \mathfrak{M}(P, Q \ldots).$$

La preuve découle de 13, 10.

16. **Théorème.** Si chacun des systèmes $P, Q \ldots$ est une partie de l'un des systèmes $A, B, C \ldots$, et si chacun de ces derniers est composé de certains des premiers, alors

$$\mathfrak{M}(P, Q \ldots) = \mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

La preuve découle de 12, 14, 5.

17. **Théorème.** Si $A = \mathfrak{M}(P, Q)$ et $B = \mathfrak{M}(Q, R)$, alors $\mathfrak{M}(A, R) = \mathfrak{M}(P, B)$.

Preuve. Car d'après le théorème précédent 15, on a à la fois $\mathfrak{M}(A, R)$ et $\mathfrak{M}(P, B) = \mathfrak{M}(P, Q, R)$.

18. **Définition.** Une chose g est appelée *élément commun* des systèmes $A, B, C \ldots$ si elle est contenue dans chacun de ces systèmes (donc dans A et dans B et dans $C \ldots$). De même, un système T est appelé une *partie commune* de $A, B, C \ldots$ si T est une partie de chacun de ces systèmes, et par la *communauté* des systèmes $A, B, C \ldots$ nous entendons le système complètement déterminé $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, qui est composé de tous les éléments communs g de $A, B, C \ldots$ et est par conséquent aussi une partie commune de ces systèmes. Nous admettons encore le cas où un seul système A est présent ; alors on doit poser $\mathfrak{G}(A) = A$. Mais il peut aussi arriver que les systèmes $A, B, C \ldots$ n'aient aucun élément commun, donc aussi aucune partie commune, aucune communauté ; ils sont alors appelés des systèmes sans partie commune, et le signe $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ est dénué de sens (cf. la fin de 2). Nous laisserons cependant presque toujours au lecteur le soin d'ajouter dans les pensées, pour les théorèmes sur les communautés, les conditions de leur existence et de trouver l'interprétation correcte de ces théorèmes même dans le cas de la non-existence.

19. **Théorème.** Toute partie commune de $A, B, C \ldots$ est une partie de $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$. La preuve découle de 17.

20. **Théorème.** Toute partie de $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ est une partie commune de $A, B, C \ldots$. La preuve découle de 17, 7.

21. **Théorème.** Si chacun des systèmes $A, B, C \ldots$ est un ensemble (3) de l'un des systèmes $P, Q \ldots$, alors

$$\mathfrak{G}(P, Q \ldots) \Subset \mathfrak{G}(A, B, C \ldots).$$

Preuve. Car tout élément de $\mathfrak{G}(P, Q \ldots)$ est un élément commun de $P, Q \ldots$, donc aussi un élément commun de $A, B, C \ldots$, ce qu'il fallait démontrer.

II. Illustration d'un système

22. **Définition.** Par une *application* φ d'un système S, on entend une loi d'après laquelle à chaque élément déterminé s de S appartient une chose déterminée, qui est appelée l'*image* de s et est notée $\varphi(s)$; nous disons aussi que $\varphi(s)$ correspond à l'élément s, que $\varphi(s)$ provient ou est engendré de s par l'application φ, que s est transformé par l'application φ en $\varphi(s)$. Si maintenant T est une partie quelconque de S, alors une application déterminée de T est en même temps contenue dans l'application φ de S, application que, par souci de simplicité, on peut bien désigner par le même signe φ et qui consiste en ce qu'à chaque élément t du système T correspond la même image

$\varphi(t)$ que t possède en tant qu'élément de S ; en même temps, le système composé de toutes les images $\varphi(t)$ doit être appelé l'*image* de T et être noté $\varphi(T)$, ce qui explique aussi la signification de $\varphi(S)$. On peut déjà considérer comme un exemple d'application d'un système l'affectation de ses éléments à des signes ou des noms déterminés. L'application la plus simple d'un système est celle par laquelle chacun de ses éléments est transformé en lui-même ; elle doit être appelée l'*application identique* du système. Pour plus de commodité, nous voulons dans les théorèmes 22, 23, 24, qui se rapportent à une application quelconque φ d'un système quelconque S, désigner les images des éléments s et des parties T respectivement par s' et T' ; en outre, nous convenons que les petites et grandes lettres latines sans accent désignent toujours des éléments et des parties de ce système S.

23. **Théorème.** Si $A \Subset B$, alors $A' \Subset B'$.

Preuve. Car tout élément de A' est l'image d'un élément contenu dans A, donc aussi dans B, et est par conséquent élément de B', ce qu'il fallait démontrer.

24. **Théorème.** L'image de $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ est $\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$.

Preuve. Si l'on désigne le système $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$, qui d'après 10 est aussi une partie de S, par M, alors tout élément de son image M' est l'image m' d'un élément m de M ; comme m est, d'après 8, aussi élément de l'un des systèmes $A, B, C \ldots$, et par conséquent m' est élément de l'un des systèmes $A', B', C' \ldots$, donc, d'après 8, aussi élément de $\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$, on a, d'après 3, $M' \Subset \mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$. D'autre part, comme $A, B, C \ldots$ sont, d'après 9, des parties de M, donc $A', B', C' \ldots$ sont, d'après 22, des parties de M', on a, d'après 10, aussi $\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots) \Subset M'$, et de là, en liaison avec ce qui précède, on obtient, d'après 5, le théorème à démontrer

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C' \ldots).$$

25. **Théorème.** L'image de toute partie commune de $A, B, C \ldots$, donc aussi celle de la communauté $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, est une partie de $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$.

Preuve. Car celle-ci est, d'après 22, une partie commune de $A', B', C' \ldots$, d'où découle le théorème d'après 18.

26. **Définition et théorème.** Si φ est une application d'un système S, et ψ une application de l'image $S' = \varphi(S)$, alors il en résulte toujours une application θ de S, *composée* de φ et ψ, qui consiste en ce qu'à chaque élément s de S correspond l'image

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s)),$$

où l'on a de nouveau posé $\varphi(s) = s'$. Cette application θ peut être désignée brièvement par le symbole $\psi \cdot \varphi$ ou $\psi\varphi$, l'image $\theta(s)$ par $\psi\varphi(s)$, en prenant bien garde à la position des signes φ, ψ, car le signe $\varphi\psi$ est en général dénué de sens et n'a de sens que si $\psi(S') \Subset S$. Si maintenant χ désigne une application du système $\psi(S') = \psi\varphi(S)$, et η l'application composée de ψ et χ, $\chi\psi$, du système S', alors on a $\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s)$, donc les applications composées $\chi\theta$ et $\eta\varphi$ coïncident pour tout élément s de S, c'est-à-dire qu'on a $\chi\theta = \eta\varphi$. Ce théorème peut, d'après la signification de θ et η, être exprimé par

$$\chi \cdot \psi\varphi = \chi\psi \cdot \varphi,$$

et cette application composée de φ, ψ, χ peut être désignée brièvement par $\chi\psi\varphi$.

27. **Définition.** Une application φ d'un système S est dite *semblable* (ou distincte) si à des éléments différents a, b du système S correspondent toujours des images différentes $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$. Comme dans ce cas, inversement, de $s' = t'$ résulte toujours $s = t$, tout élément du système $S' = \varphi(S)$ est l'image s' d'un seul élément s du système S, complètement déterminé, et l'on peut donc opposer à l'application φ de S une application *inverse*, qu'on désignera par $\overline{\varphi}$, du système S', qui consiste en ce qu'à chaque élément s' de S' correspond l'image $\overline{\varphi}(s') = s$ et qui est évidemment aussi semblable. Il est clair que $\overline{\varphi}(S') = S$, que φ est l'application inverse correspondant à $\overline{\varphi}$, et que l'application $\overline{\varphi}\varphi$, composée de φ et $\overline{\varphi}$ d'après 25, est l'application identique de S (21). En même temps, on obtient les compléments suivants au § 2 en conservant les notations de là-bas.

28. **Théorème.** Si $A' \Subset B'$, alors $A \Subset B$.

Preuve. Car si a est un élément de A, alors a' est un élément de A', donc aussi de B', par conséquent $= b'$, où b est un élément de B ; mais comme de $a' = b'$ résulte toujours $a = b$, tout élément a de A est aussi élément de B, ce qu'il fallait démontrer.

29. **Théorème.** Si $A' = B'$, alors $A = B$. La preuve découle de 27, 4, 5.

30. **Théorème.** Si $G = \mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, alors

$$G' = \mathfrak{G}(A', B', C' \ldots).$$

Preuve. Tout élément de $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ est en tout cas contenu dans S', donc l'image g' d'un élément g contenu dans S ; mais comme g' est un élément commun de $A', B', C' \ldots$, g doit, d'après 27, être un élément commun de $A, B, C \ldots$, donc aussi un élément de G ; par conséquent, tout élément de $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ est l'image d'un élément g de G, donc un élément de G', c'est-à-dire que l'on a $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots) \Subset G'$, et de là découle notre théorème en considération de 24, 5.

31. **Théorème.** L'application identique d'un système est toujours une application semblable.

32. **Théorème.** Si φ est une application semblable de S, et ψ une application semblable de $\varphi(S)$, alors l'application $\psi\varphi$, composée de φ et ψ, de S est aussi une application semblable, et l'application inverse correspondante $\overline{\psi\varphi}$ est $= \overline{\varphi}\overline{\psi}$.

Preuve. Car à des éléments différents a, b de S correspondent des images différentes $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$, et à celles-ci des images différentes $\psi(a') = \psi\varphi(a), \psi(b') = \psi\varphi(b)$; donc $\psi\varphi$ est une application semblable. En outre, tout élément $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ du système $\psi\varphi(S)$ est transformé par $\overline{\psi}$ en $s' = \varphi(s)$ et celui-ci par $\overline{\varphi}$ en s, donc $\psi\varphi(s)$ est transformé par $\overline{\varphi}\overline{\psi}$ en s, ce qu'il fallait démontrer.

33. **Définition.** Les systèmes R, S sont dits *semblables* s'il existe une application semblable φ de S telle que $\varphi(S) = R$, donc aussi $\overline{\varphi}(R) = S$. Il est évident, d'après 30, que tout système est semblable à lui-même.

34. **Théorème.** Si R, S sont des systèmes semblables, alors tout système Q semblable à R est aussi semblable à S.

Preuve. Car si φ, ψ sont des applications semblables de S, R telles que $\varphi(S) = R, \psi(R) = Q$, alors (d'après 31) $\psi\varphi$ est une application semblable de S telle que $\psi\varphi(S) = Q$, ce qu'il fallait démontrer.

35. **Définition.** On peut donc répartir tous les systèmes en *classes*, en plaçant dans une classe déterminée tous les systèmes, et seulement ceux, $Q, R, S \ldots$ qui sont semblables à un système déterminé R, le représentant de la classe ; d'après le théorème précédent 33, la classe ne change pas si l'on choisit un autre système S lui appartenant comme représentant.

36. **Théorème.** Si R, S sont des systèmes semblables, alors toute partie de S est aussi semblable à une partie de R, et toute partie propre de S est aussi semblable à une partie propre de R.

Preuve. Car si φ est une application semblable de S, $\varphi(S) = R$, et $T \Subset S$, alors, d'après 22, le système $\varphi(T)$, semblable à T, est une partie de R ; si de plus T est une partie propre de S, et s un élément de S non contenu dans T, alors l'élément $\varphi(s)$ contenu dans R ne peut, d'après 27, être contenu dans $\varphi(T)$; par conséquent, $\varphi(T)$ est une partie propre de R, ce qu'il fallait démontrer.

III. Application d'un système en lui-même

37. **Définition.** Si φ est une application semblable ou dissemblable d'un système S, et $\varphi(S)$ une partie d'un système Z, nous appelons φ une application de S *dans* Z, et nous disons que S est appliqué par φ dans Z. Nous appelons donc φ une application du système S en lui-même si $\varphi(S) \Subset S$, et nous voulons dans ce paragraphe étudier les lois générales d'une telle application φ. Nous utilisons ici les mêmes notations qu'au § 2, en posant à nouveau $\varphi(s) = s', \varphi(T) = T'$. Ces images s', T' sont, d'après 22, 7, maintenant elles-mêmes des éléments ou des parties de S, comme toutes les choses désignées par des lettres latines.

38. **Définition.** K est appelé une *chaîne* si $K' \Subset K$. Nous remarquons expressément que ce nom n'appartient pas à la partie K du système S en soi, mais lui est conféré seulement en relation avec l'application déterminée φ ; par rapport à une autre application du système S en lui-même, K peut très bien ne pas être une chaîne.

39. **Théorème.** S est une chaîne.

40. **Théorème.** L'image K' d'une chaîne K est une chaîne.

Preuve. Car de $K' \Subset K$ résulte, d'après 22, aussi $(K')' \Subset K'$, ce qu'il fallait démontrer.

41. **Théorème.** Si A est une partie d'une chaîne K, alors on a aussi $A' \Subset K$.

Preuve. Car de $A \Subset K$ résulte (d'après 22) $A' \Subset K'$, et comme (d'après 37) $K' \Subset K$, on a (d'après 7) $A' \Subset K$, ce qu'il fallait démontrer.

42. **Théorème.** Si l'image A' est une partie d'une chaîne L, alors il existe une chaîne K qui satisfait aux conditions $A \Subset K, K' \Subset L$; et $\mathfrak{M}(A, L)$ est une telle chaîne K.

Preuve. Si l'on pose effectivement $K = \mathfrak{M}(A, L)$, alors, d'après 9, la première condition $A \Subset K$ est remplie. Comme, d'après 23, on a en outre $K' = \mathfrak{M}(A', L')$ et, par hypothèse, $A' \Subset L, L' \Subset L$, on a, d'après 10, aussi l'autre condition $K' \Subset L$ est remplie, et de là, parce que (d'après 9) $L \Subset K$, on a aussi $K' \Subset K$, c'est-à-dire K est une chaîne, ce qu'il fallait démontrer.

43. **Théorème.** Un système $\mathfrak{M}$, composé uniquement de chaînes $A, B, C \ldots$, est une chaîne.

Preuve. Comme (d'après 23) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$ et, par hypothèse, $A' \Subset A, B' \Subset B, C' \Subset C \ldots$, on a (d'après 12) $\mathfrak{M}' \Subset \mathfrak{M}$, ce qu'il fallait démontrer.

44. **Théorème.** La communauté $\mathfrak{G}$ de chaînes $A, B, C \ldots$ est une chaîne.

Preuve. Comme $\mathfrak{G}$ est, d'après 17, une partie commune de $A, B, C \ldots$, donc $\mathfrak{G}'$ est, d'après 22, une partie commune de $A', B', C' \ldots$ et, par hypothèse, $A' \Subset A, B' \Subset B, C' \Subset C \ldots$, on a (d'après 7) $\mathfrak{G}'$ aussi partie commune de $A, B, C \ldots$ et par conséquent, d'après 18, aussi partie de $\mathfrak{G}$, ce qu'il fallait démontrer.

45. **Définition.** Si A est une partie quelconque de S, nous voulons désigner par A_0 la communauté de toutes les chaînes (par exemple S) dont A est une partie ; cette communauté A_0 existe (cf. 17), car A est elle-même une partie commune de toutes ces chaînes. Comme, en outre, A_0 est, d'après 43, une chaîne, nous voulons appeler A_0 la *chaîne* du système A ou brièvement la chaîne de A. Cette définition se rapporte entièrement à l'application déterminée φ du système S en lui-même qui est sous-jacente, et s'il devient nécessaire plus tard pour plus de clarté, nous voulons écrire $\varphi_0(A)$ au lieu de A_0, et de même nous désignerons la chaîne de A correspondant à une autre application ω par $\omega_0(A)$. Les théorèmes suivants sont maintenant valables pour cette notion très importante.

46. **Théorème.** On a $A \Subset A_0$.

Preuve. Car A est une partie commune de toutes les chaînes dont la communauté est A_0, d'où découle le théorème d'après 18.

47. **Théorème.** On a $(A_0)' \Subset A_0$.

Preuve. Car, d'après 44, A_0 est une chaîne (37).

48. **Théorème.** Si A est une partie d'une chaîne K, alors on a aussi $A_0 \Subset K$.

Preuve. Car A_0 est la communauté et par conséquent aussi une partie commune de toutes les chaînes K dont A est une partie.

49. **Remarque.** On se convainc facilement que la notion de la chaîne A_0, définie en 44, est complètement caractérisée par les théorèmes précédents 45, 46, 47.

50. **Théorème.** On a $A' \Subset (A_0)'$. La preuve découle de 45, 22.

51. **Théorème.** On a $A' \Subset A_0$. La preuve découle de 49, 46, 7.

52. **Théorème.** Si A est une chaîne, alors $A_0 = A$.

Preuve. Comme A est une partie de la chaîne A, on a, d'après 47, aussi $A_0 \Subset A$, d'où, d'après 45, 5, découle le théorème.

53. **Théorème.** Si $B \Subset A$, alors $B \Subset A_0$. La preuve découle de 45, 7.

54. **Théorème.** Si $B \Subset A_0$, alors $B_0 \Subset A_0$, et inversement.

Preuve. Parce que A_0 est une chaîne, il résulte de 47, de $B \Subset A_0$, que $B_0 \Subset A_0$; inversement, si $B_0 \Subset A_0$, alors il résulte de 7 que $B \Subset A_0$, parce que (d'après 45) $B \Subset B_0$.

55. **Théorème.** Si $B \Subset A$, alors $B_0 \Subset A_0$. La preuve découle de 52, 53.

56. **Théorème.** Si $B \Subset A_0$, alors on a aussi $B' \Subset A_0$.

Preuve. Car, d'après 53, on a $B_0 \Subset A_0$, et comme (d'après 50) $B' \Subset B_0$, le théorème à démontrer résulte de 7. On obtient le même résultat, comme on le voit facilement, aussi d'après 22, 46, 7 ou aussi d'après 40.

57. **Théorème.** Si $B \Subset A_0$, alors $(B_0)' \Subset (A_0)'$. La preuve découle de 53, 22.

58. **Théorème et définition.** On a $(A_0)' = (A')_0$, c'est-à-dire l'image de la chaîne de A est en même temps la chaîne de l'image de A. On peut donc désigner ce système brièvement par A'_0 et l'appeler au choix l'image en chaîne ou la chaîne image de A. D'après la notation plus explicite indiquée en 44, le théorème s'exprimerait par $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$.

Preuve. Si l'on pose en abrégé $(A')_0 = L$, alors L est une chaîne (44), et, d'après 45, $A' \Subset L$; par conséquent, il existe d'après 41 une chaîne K qui satisfait aux conditions $A \Subset K, K' \Subset L$; de là résulte, d'après 47, aussi $A_0 \Subset K$, donc $(A_0)' \Subset K'$, et par conséquent, d'après 7, aussi $(A_0)' \Subset L$, c'est-à-dire $(A_0)' \Subset (A')_0$. Comme, d'après 49, on a en outre $A' \Subset (A_0)'$ et que $(A_0)'$ est, d'après 44, 39, une chaîne, on a, d'après 47, aussi $(A')_0 \Subset (A_0)'$, d'où, en liaison avec le résultat précédent, découle le théorème à démontrer (5).

59. **Théorème.** On a $A_0 = \mathfrak{M}(A, A'_0)$, c'est-à-dire la chaîne de A est composée de A et de la chaîne

image de A.

Preuve. Si l'on pose à nouveau, en abrégé, $L = A'_0 = (A_0)' = (A')_0$ et $K = \mathfrak{M}(A, L)$, alors (d'après 45) $A' \Subset L$, et comme L est une chaîne, il en est de même de K d'après 41 ; comme, en outre, $A \Subset K$ (9), il résulte, d'après 47, aussi $A_0 \Subset K$. D'autre part, comme (d'après 45) $A \Subset A_0$ et (d'après 46) aussi $L \Subset A_0$, on a, d'après 10, aussi $K \Subset A_0$, d'où, en liaison avec le résultat précédent, découle le théorème à démontrer $A_0 = K$ (5).

60. **Théorème de l'induction complète.** Pour prouver que la chaîne A_0 est une partie d'un système quelconque Σ — que ce dernier soit une partie de S ou non — il suffit de montrer :

61. que $A \Subset \Sigma$, et

62. que l'image de tout élément commun de A_0 et Σ est aussi un élément de Σ.

Preuve. Car si 1 est vrai, alors il existe en tout cas, d'après 45, la communauté $G = \mathfrak{G}(A_0, \Sigma)$, et même (d'après 18) $A \Subset G$; comme, en outre, d'après 17, $G \Subset A_0$, G est aussi une partie de notre système S, qui est appliqué par φ en lui-même, et en même temps il résulte de 55 que $G' \Subset A_0$. Si maintenant 2 est également vrai, c'est-à-dire si $G' \Subset \Sigma$, alors G' doit, en tant que partie commune des systèmes A_0, Σ, être, d'après 18, une partie de leur communauté G, c'est-à-dire G est une chaîne (37), et comme, comme déjà remarqué ci-dessus, $A \Subset G$, il résulte, d'après 47, aussi $A_0 \Subset G$ et de là, en liaison avec le résultat précédent, $G = A_0$, donc, d'après 17, aussi $A_0 \Subset \Sigma$, ce qu'il fallait démontrer.

63. Le théorème précédent constitue, comme on le verra plus tard, le fondement scientifique du mode de démonstration connu sous le nom d'induction complète (du passage de n à $n + 1$), et il peut aussi s'énoncer de la manière suivante : Pour prouver que tous les éléments de la chaîne A_0 possèdent une certaine propriété $\mathfrak{E}$ (ou qu'un théorème $\mathfrak{S}$, dans lequel il est question d'une chose indéterminée n, est vrai pour tous les éléments n de la chaîne A_0), il suffit de montrer :

64. que tous les éléments a du système A possèdent la propriété $\mathfrak{E}$ (ou que $\mathfrak{S}$ est vrai pour tous les a), et

65. que l'image n' de tout élément n de A_0 qui possède la propriété $\mathfrak{E}$ possède la même propriété $\mathfrak{E}$ (ou que le théorème $\mathfrak{S}$, dès qu'il est vrai pour un élément n de A_0, doit certainement aussi l'être pour son image n').

En effet, si l'on désigne par Σ le système de toutes les choses qui possèdent la propriété $\mathfrak{E}$ (ou pour lesquelles le théorème $\mathfrak{S}$ est vrai), on voit immédiatement la parfaite concordance de l'expression actuelle du théorème avec celle utilisée en 59.

66. **Théorème.** La chaîne de $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ est $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0 \ldots)$.

Preuve. Si l'on désigne le premier système par M et le dernier par K, alors K est, d'après 42, une chaîne. Comme maintenant chacun des systèmes $A, B, C \ldots$ est, d'après 45, une partie de l'un des

systèmes $A_0, B_0, C_0 \ldots$, donc (d'après 12) $M \Subset K$, il résulte, d'après 47, aussi

$$M_0 \Subset K.$$

D'autre part, comme, d'après 9, chacun des systèmes $A, B, C \ldots$ est une partie de M, donc, d'après 45, 7, aussi une partie de la chaîne M_0, il doit résulter, d'après 47, que chacun des systèmes $A_0, B_0, C_0 \ldots$ est une partie de M_0, donc, d'après 10,

$$K \Subset M_0,$$

d'où, en liaison avec ce qui précède, découle le $M_0 = K$ à démontrer (5).

67. **Théorème.** La chaîne de $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ est une partie de $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0 \ldots)$.

Preuve. Si l'on désigne le premier système par G et le dernier par K, alors K est, d'après 43, une chaîne. Comme maintenant chacun des systèmes $A_0, B_0, C_0 \ldots$ est, d'après 45, un ensemble de l'un des systèmes $A, B, C \ldots$, donc (d'après 20) $G \Subset K$, il résulte de 47 le théorème à démontrer $G_0 \Subset K$.

68. **Théorème.** Si $K' \Subset L \Subset K$, donc K une chaîne, alors L est aussi une chaîne. Si celle-ci est une partie propre de K, et U le système de tous les éléments de K qui ne sont pas contenus dans L, si de plus la chaîne U_0 est une partie propre de K, et V le système de tous les éléments de K qui ne sont pas contenus dans U_0, alors on a $K = \mathfrak{M}(U_0, V)$ et $L = \mathfrak{M}(U_0', V)$. Si enfin $L = K'$, alors $V \Subset V'$. La preuve de ce théorème, dont nous ne ferons pas usage (pas plus que des deux précédents), sera laissée au lecteur.

IV. Le fini et l'infini

69. **Définition.** Un système S est appelé *infini* s'il est semblable à une partie propre de lui-même (32) ; dans le cas contraire, S est appelé un système *fini*.

70. **Théorème.** Tout système composé d'un seul élément est fini.

Preuve. Car un tel système ne possède aucune partie propre (2, 6).

71. **Théorème.** Il existe des systèmes infinis.

Preuve. Mon monde de pensées, c'est-à-dire la totalité S de toutes les choses qui peuvent être l'objet de ma pensée, est infini. Car si s désigne un élément de S, alors la pensée s', que s peut être l'objet de ma pensée, est elle-même un élément de S. Si l'on considère celle-ci comme l'image $\varphi(s)$ de l'élément s, alors l'application φ de S ainsi déterminée a la propriété que l'image S' est une partie de S ; et même S' est une partie propre de S, car il existe dans S des éléments (par exemple mon propre moi) qui sont différents de toute telle pensée s' et ne sont donc pas contenus dans S'. Enfin, il est clair que si a, b sont des éléments différents de S, leurs images a', b' sont aussi différentes, que l'application φ est donc une application distincte (semblable) (26). Par conséquent, S est infini, ce qu'il fallait démontrer.

72. **Théorème.** Si R, S sont des systèmes semblables, alors R est fini ou infini selon que S est fini ou infini.

Preuve. Si S est infini, donc semblable à une partie propre S' de lui-même, alors, si R et S sont semblables, S' doit, d'après 33, être semblable à R et, d'après 35, en même temps semblable à une partie propre de R, laquelle, par conséquent, d'après 33, est elle-même semblable à R ; donc R est infini, ce qu'il fallait démontrer.

73. **Théorème.** Tout système S qui possède une partie infinie T est aussi infini ; ou en d'autres termes, toute partie d'un système fini est finie.

Preuve. Si T est infini, s'il existe donc une application semblable ψ de T telle que $\psi(T)$ soit une partie propre de T, alors, si T est une partie de S, on peut étendre cette application ψ en une application φ de S, en posant, si s désigne un élément quelconque de S, $\varphi(s) = \psi(s)$ ou $\varphi(s) = s$, selon que s est ou non élément de T. Cette application φ est semblable ; en effet, si a, b sont des éléments différents de S, alors, s'ils sont tous deux contenus dans T, l'image $\varphi(a) = \psi(a)$ est différente de l'image $\varphi(b) = \psi(b)$, parce que ψ est une application semblable ; si de plus a est dans T, b n'est pas dans T, alors $\varphi(a) = \psi(a)$ est différent de $\varphi(b) = b$, parce que $\psi(a)$ est contenu dans T ; enfin, si ni a ni b ne sont dans T, alors $\varphi(a) = a$ est aussi différent de $\varphi(b) = b$, ce qu'il fallait démontrer. Comme, en outre, $\psi(T)$ est une partie de T, donc, d'après 7, aussi une partie de S, il est clair que $\varphi(S) \Subset S$. Enfin, comme $\psi(T)$ est une partie propre de T, il existe dans T, donc aussi dans S, un élément t qui n'est pas contenu dans $\psi(T) = \varphi(T)$; comme l'image $\varphi(s)$ de tout élément s non contenu dans T est elle-même $= s$, donc aussi différente de t, t ne peut en général pas être contenu dans $\varphi(S)$; par conséquent, $\varphi(S)$ est une partie propre de S, et S est infini, ce qu'il fallait démontrer.

74. **Théorème.** Tout système semblable à une partie d'un système fini est lui-même fini. La preuve découle de 67, 68.

75. **Théorème.** Si a est un élément de S, et si l'ensemble T de tous les éléments de S différents de a est fini, alors S est aussi fini.

Preuve. Nous avons (d'après 64) à montrer que, si φ est une application semblable quelconque de S en lui-même, l'image $\varphi(S)$ ou S' n'est jamais une partie propre de S, mais toujours $= S$. Il est évident que $S = \mathfrak{M}(a, T)$, et par conséquent, d'après 23, si les images sont à nouveau désignées par des accents, $S' = \mathfrak{M}(a', T')$, et, à cause de la similitude de l'application φ, a' n'est pas contenu dans T' (26). Comme, en outre, par hypothèse $S' \Subset S$, a' et de même tout élément de T' doivent être soit $= a$ soit un élément de T. Si donc — cas que nous voulons traiter d'abord — a n'est pas contenu dans T', alors on doit avoir $T' \Subset T$ et par conséquent $T' = T$, parce que φ est une application semblable et que T est un système fini ; et comme a', comme on l'a remarqué, n'est pas contenu dans T', c'est-à-dire n'est pas contenu dans T, on doit avoir $a' = a$, et par conséquent, dans ce cas, on a effectivement $S' = S$, comme on l'affirmait. Dans le cas contraire, si a est contenu dans T' et est donc l'image b' d'un élément b contenu dans T, nous désignerons par U l'ensemble de tous les éléments u de T qui sont différents de b ; alors $T = \mathfrak{M}(b, U)$ et (d'après 15) $S = \mathfrak{M}(a, b, U)$, donc $S' = \mathfrak{M}(a', a, U')$. Nous déterminons maintenant une nouvelle application ψ de T, en posant $\psi(b) = a'$ et généralement $\psi(u) = u'$, ce qui donne (d'après 23) $\psi(T) = \mathfrak{M}(a', U')$. ψ est évidemment

une application semblable, parce que φ l'était, et parce que a n'est pas contenu dans U, donc a' n'est pas non plus contenu dans U'. Comme, en outre, a et tout élément u sont différents de b, il doit (à cause de la similitude de φ) en être de même de a' et de tout élément u', qui sont donc différents de a et par conséquent contenus dans T ; par conséquent, $\psi(T) \Subset T$, et comme T est fini, on doit avoir $\psi(T) = T$, donc $\mathfrak{M}(a', U') = T$. Mais de là résulte (d'après 15)

$$\mathfrak{M}(a', a, U') = \mathfrak{M}(a, T),$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, $S' = S$. Donc, même dans ce cas, la preuve requise est faite.

V. Systèmes simplement infinis. Suite des nombres naturels

76. **Définition.** Un système N est appelé *simplement infini* s'il existe une application semblable φ de N en lui-même telle que N apparaisse comme la chaîne (44) d'un élément qui n'est pas contenu dans $\varphi(N)$. Nous appelons cet élément, que nous voulons désigner dans la suite par le symbole 1, l'*élément de base* de N et disons en même temps que le système simplement infini N est *ordonné* par cette application φ. Si nous conservons les notations commodes antérieures pour les images et les chaînes (§ 4), alors l'essence d'un système simplement infini N consiste en l'existence d'une application φ de N et d'un élément 1 qui satisfont aux conditions suivantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

α. $N' \Subset N$.
β. $N = 1_0$.
γ. L'élément 1 n'est pas contenu dans N'.
δ. L'application φ est semblable.

Il résulte évidemment de α, γ, δ que tout système simplement infini N est effectivement un système infini (64), parce qu'il est semblable à une partie propre N' de lui-même.

77. **Théorème.** Dans tout système infini S est contenu un système simplement infini N comme partie.

Preuve. Il existe, d'après 64, une application semblable φ de S telle que $\varphi(S)$ ou S' devienne une partie propre de S ; il existe donc un élément 1 dans S qui n'est pas contenu dans S'. La chaîne $N = 1_0$, qui correspond à cette application φ du système S en lui-même (44), est un système simplement infini, ordonné par φ ; car les conditions caractéristiques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en 71 sont évidemment toutes remplies.

78. **Définition.** Si, dans la considération d'un système N simplement infini et ordonné par une application φ, on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, qu'on ne retient que leur discernabilité et qu'on ne saisit que les relations dans lesquelles ils sont mis les uns par rapport aux autres par l'application ordonnatrice φ, alors ces éléments sont appelés des *nombres naturels* ou des *nombres ordinaux*, ou encore simplement des *nombres*, et l'élément de base 1 est appelé le *nombre de base* de la suite des nombres N. En égard à cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut à juste titre appeler les nombres une *libre création de l'esprit humain*. Les relations ou lois qui découlent uniquement des conditions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en 71 et sont par conséquent toujours les mêmes dans tous les systèmes simplement infinis ordonnés,

quels que soient les noms donnés aux éléments individuels (cf. 134), forment l'objet immédiat de la science des nombres ou de l'arithmétique. Des notions et théorèmes généraux du § 4 sur l'application d'un système en lui-même, nous extrayons d'abord immédiatement les principes suivants, où $a, b \ldots m, n \ldots$ désignent toujours des éléments de N, donc des nombres, $A, B, C \ldots$ des parties de N, $a', b' \ldots m', n' \ldots A', B', C' \ldots$ les images correspondantes, qui sont engendrées par l'application ordonnatrice φ et sont toujours à nouveau des éléments ou des parties de N ; l'image n' d'un nombre n est aussi appelée le nombre qui *suit* n.

79. **Théorème.** D'après 45, tout nombre n est contenu dans sa chaîne n_0, et, d'après 53, la condition $n \Subset m_0$ est équivalente à $n_0 \Subset m_0$.

80. **Théorème.** D'après 57, on a $n_0' = (n_0)' = (n')_0$.

81. **Théorème.** D'après 46, on a $n_0' \Subset n_0$.

82. **Théorème.** D'après 58, on a $n_0 = \mathfrak{M}(n, n_0')$.

83. **Théorème.** On a $N = \mathfrak{M}(1, N')$, donc tout nombre différent du nombre de base 1 est un élément de N', c'est-à-dire l'image d'un nombre. La preuve découle de 77 et 71.

84. **Théorème.** N est la seule chaîne numérique dans laquelle le nombre de base 1 est contenu.

Preuve. Car si 1 est un élément d'une chaîne numérique K, alors, d'après 47, la chaîne correspondante $N \Subset K$, par conséquent $N = K$, parce que $K \Subset N$ est évidemment vrai.

85. **Théorème de l'induction complète** (passage de n à n'). Pour prouver qu'un théorème est vrai pour tous les nombres n d'une chaîne m_0, il suffit de montrer

86. qu'il est vrai pour $n = m$, et

87. que de la validité du théorème pour un nombre n de la chaîne m_0 résulte toujours sa validité aussi pour le nombre suivant n'.

Cela résulte immédiatement du théorème plus général 59 ou 60. Le cas le plus fréquent sera celui où $m = 1$, donc m_0 est la suite complète des nombres N.

VI. Nombres plus grands et plus petits

88. **Théorème.** Tout nombre n est différent du nombre n' qui le suit. Preuve par induction complète (80). Car

89. le théorème est vrai pour le nombre $n = 1$, parce qu'il n'est pas contenu dans N' (71), tandis que le nombre suivant $1'$, en tant qu'image du nombre 1 contenu dans N, est un élément de N'.

90. Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si l'on pose le nombre suivant $n' = p$, alors n est différent de p, d'où, d'après 26, à cause de la similitude (71) de l'application ordonnatrice φ, il résulte que n', donc p, est différent de p'. Par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre p qui suit n, ce qu'il fallait démontrer.

91. **Théorème.** Dans la chaîne image n'_0 d'un nombre n, son image n' est bien contenue (d'après 74, 75), mais pas le nombre n lui-même. Preuve par induction complète (80). Car

92. le théorème est vrai pour $n = 1$, parce que $1'_0 = N'$, et que, d'après 71, le nombre de base 1 n'est pas contenu dans N'.

93. Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si l'on pose à nouveau $n' = p$, alors n n'est pas contenu dans p_0, donc est différent de tout nombre q contenu dans p_0, d'où, à cause de la similitude de φ, il résulte que n', donc p, est différent de tout nombre q' contenu dans p'_0, donc n'est pas contenu dans p'_0. Par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre p qui suit n, ce qu'il fallait démontrer.

94. **Théorème.** La chaîne image n'_0 est une partie propre de la chaîne n_0. La preuve découle de 76, 74, 82.

95. **Théorème.** De $m_0 = n_0$ résulte $m = n$.

Preuve. Comme (d'après 74) m est contenu dans m_0, et $m_0 = n_0 = \mathfrak{M}(n, n'_0)$ (77), si le théorème était faux, donc m différent de n, m devrait être contenu dans la chaîne n'_0, par conséquent, d'après 74, aussi $m_0 \Subset n'_0$, c'est-à-dire $n_0 \Subset n'_0$; comme cela contredit le théorème 83, notre théorème est démontré.

97. **Théorème.** Si le nombre n n'est pas contenu dans la chaîne numérique K, alors $K \Subset n'_0$. Preuve par induction complète (80). Car

98. le théorème est vrai, d'après 78, pour $n = 1$.

99. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il est aussi vrai pour le nombre suivant $p = n'$; car si p n'est pas contenu dans la chaîne numérique K, alors, d'après 40, n ne peut pas non plus être contenu dans K, et par conséquent, d'après notre hypothèse, $K \Subset n'_0$; comme maintenant (d'après 77) $n'_0 = p_0 = \mathfrak{M}(p, p'_0)$, donc $K \Subset \mathfrak{M}(p, p'_0)$, et que p n'est pas contenu dans K, on doit avoir $K \Subset p'_0$, ce qu'il fallait démontrer.

100. **Théorème.** Si le nombre n n'est pas contenu dans la chaîne numérique K, mais bien son image n', alors $K = n'_0$.

Preuve. Comme n n'est pas contenu dans K, on a (d'après 85) $K \Subset n'_0$, et comme $n' \Subset K$, on a, d'après 47, aussi $n'_0 \Subset K$, par conséquent $K = n'_0$, ce qu'il fallait démontrer.

101. **Théorème.** Dans toute chaîne numérique K, il y a un et (d'après 84) un seul nombre k dont la chaîne $k_0 = K$.

Preuve. Si le nombre de base 1 est contenu dans K, alors (d'après 79) $K = N = 1_0$. Dans le cas contraire, soit Z le système de tous les nombres non contenus dans K ; comme le nombre de base 1 est contenu dans Z, mais que Z n'est qu'une partie propre de la suite des nombres N, Z ne peut (d'après 79) être une chaîne, c'est-à-dire Z' ne peut être une partie de Z ; il existe donc dans Z un nombre n dont l'image n' n'est pas dans Z, donc certainement dans K ; comme, en outre, n est dans Z, donc pas dans K, on a (d'après 86) $K = n'_0$, donc $k = n'$, ce qu'il fallait démontrer.

102. **Théorème.** Si m, n sont des nombres différents, alors l'une des chaînes m_0, n_0 est une partie propre de l'autre, et (d'après 83, 84) une seule, et même on a soit $n_0 \Subset m'_0$ soit $m_0 \Subset n'_0$.

Preuve. Si n est contenu dans m_0, donc, d'après 74, aussi $n_0 \Subset m_0$, alors m ne peut pas être contenu dans la chaîne n_0 (car autrement, d'après 74, on aurait aussi $m_0 \Subset n_0$, donc $m_0 = n_0$, par conséquent, d'après 84, aussi $m = n$), et de là résulte, d'après 85, que $n_0 \Subset m'_0$. Dans le cas contraire, si n n'est pas contenu dans la chaîne m_0, on doit avoir (d'après 85) $m_0 \Subset n'_0$, ce qu'il fallait démontrer.

103. **Définition.** Le nombre m est appelé *plus petit* que le nombre n, et en même temps n est appelé *plus grand* que m, en signes

$$m < n \quad \text{et} \quad n > m,$$

si la condition

$$n_0 \Subset m'_0$$

est remplie, ce qui, d'après 74, peut aussi s'exprimer par

$$n \Subset m'_0.$$

104. **Théorème.** Si m, n sont des nombres quelconques, alors il se présente toujours un et un seul des cas suivants λ, μ, ν :

$\lambda.$ $m = n$, $n = m$, c'est-à-dire $m_0 = n_0$,
$\mu.$ $m < n$, $n > m$, c'est-à-dire $n_0 \Subset m'_0$,
$\nu.$ $m > n$, $n < m$, c'est-à-dire $m_0 \Subset n'_0$.

Preuve. Car si λ a lieu (84), alors ni μ ni ν ne peuvent se présenter, parce que, d'après 83, on n'a jamais $n_0 \Subset n'_0$. Mais si λ n'a pas lieu, alors, d'après 88, un et un seul des cas μ, ν se présente, ce qu'il fallait démontrer.

105. **Théorème.** On a $n < n'$.

Preuve. Car la condition pour le cas ν en 90 est remplie par $m = n'$.

106. **Définition.** Pour exprimer que m est soit $= n$ soit $< n$, donc n'est pas $> n$ (90), on utilise la notation

$$m \leq n \quad \text{ou aussi} \quad n \geq m,$$

et l'on dit que m est au plus égal à n, et que n est au moins égal à m.

107. **Théorème.** Chacune des conditions

$$m \leq n, \quad m < n', \quad n_0 \Subset m_0$$

est équivalente à chacune des autres.

Preuve. Car si $m \leq n$, alors il résulte de λ, μ en 90 toujours $n_0 \Subset m_0$, parce que (d'après 76) $m'_0 \Subset m_0$. Inversement, si $n_0 \Subset m_0$, donc

108. **Théorème.** Chacune des conditions

$$m' \leq n, \quad m' < n', \quad m < n$$

est équivalente à chacune des autres. La preuve découle immédiatement de 93, si l'on y remplace m par m', et de μ en 90.

109. **Théorème.** Si $l < m$ et $m \leq n$, ou si $l \leq m$ et $m < n$, alors $l < n$. Mais si $l \leq m$ et $m \leq n$, alors $l \leq n$.

Preuve. Car des conditions correspondantes (d'après 89, 93) $m_0 \Subset l'_0$ et $n_0 \Subset m_0$ résulte (d'après 7) $n_0 \Subset l'_0$, et il en est de même des conditions $m_0 \Subset l_0$ et $n_0 \Subset m'_0$, parce que, en vertu de la première, on a aussi $m'_0 \Subset l'_0$. Enfin, de $m_0 \Subset l_0$ et $n_0 \Subset m'_0$ résulte aussi $n_0 \Subset l_0$, ce qu'il fallait démontrer.

110. **Théorème.** Dans toute partie T de N, il y a un et un seul *plus petit* nombre k, c'est-à-dire un nombre k qui est plus petit que tout autre nombre contenu dans T. Si T est composé d'un seul nombre, celui-ci est aussi le plus petit nombre dans T.

Preuve. Comme T_0 est une chaîne (44), il existe, d'après 87, un nombre k dont la chaîne $k_0 = T_0$. Comme de là résulte (d'après 45, 77) $T \Subset \mathfrak{M}(k, k'_0)$, k lui-même doit d'abord être contenu dans T (car autrement on aurait $T \Subset k'_0$, donc, d'après 47, aussi $T_0 \Subset k'_0$, c'est-à-dire $k_0 \Subset k'_0$, ce qui est impossible d'après 83), et en outre tout nombre de T différent de k doit être contenu dans k'_0, c'est-à-dire être $> k$ (89), d'où résulte en même temps, d'après 90, qu'il n'y a qu'un seul plus petit nombre dans T, ce qu'il fallait démontrer.

111. **Théorème.** Le plus petit nombre de la chaîne n_0 est n, et le nombre de base 1 est le plus petit de tous les nombres.

Preuve. Car, d'après 74, 93, la condition $m \Subset n_0$ est équivalente à $m \geq n$. Ou bien notre théorème résulte aussi immédiatement de la preuve du théorème précédent, parce que, si l'on y prend $T = n_0$, on a évidemment $k = n$ (51).

112. **Définition.** Si n est un nombre quelconque, nous voulons désigner par Z_n le système de tous les nombres qui ne sont pas plus grands que n, donc ne sont pas contenus dans n_0'. La condition

$$m \geq n$$

est, d'après 92, 93, évidemment équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$m \leq n, \quad m < n', \quad n_0 \Subset m_0.$$

113. **Théorème.** On a $1 \Subset Z_n$ et $n \Subset Z_n$. La preuve découle de 98 ou aussi de 71 et 82.

114. **Théorème.** Chacune des conditions équivalentes d'après 98

$$m \geq n, \quad m < n', \quad n_0 \Subset m_0$$

est aussi équivalente à la condition

$$Z_m \Subset Z_n.$$

Preuve. Car si $m \geq n$, donc $m \leq n$, et si $l \geq m$, donc $l \leq m$, alors, d'après 95, on a aussi $l \leq n$, c'est-à-dire $l \geq n$; donc si $m \geq n$, tout élément l du système Z_m est aussi élément de Z_n, c'est-à-dire $Z_m \Subset Z_n$. Inversement, si $Z_m \Subset Z_n$, alors, d'après 7, on doit aussi avoir $m \geq n$, parce que (d'après 99) $m \geq Z_m$, ce qu'il fallait démontrer.

115. **Théorème.** Les conditions pour les cas λ, μ, ν en 90 peuvent aussi se représenter de la manière suivante :

$$\begin{array}{lllll} \lambda. & m = n, & n = m, & Z_m = Z_n, \\ \mu. & m < n, & n > m, & Z_m \Subset Z_n, \\ \nu. & m > n, & n < m, & Z_n \Subset Z_m. \end{array}$$

La preuve découle immédiatement de 90, si l'on considère que, d'après 100, les conditions $n_0 \Subset m_0'$ et $Z_m \Subset Z_n$ sont équivalentes.

116. **Théorème.** On a $Z_1 = 1$.

Preuve. Car le nombre de base 1 est, d'après 99, contenu dans Z_1, et tout nombre différent de 1 est, d'après 78, contenu dans $1_0'$, donc, d'après 98, n'est pas contenu dans Z_1, ce qu'il fallait démontrer.

117. **Théorème.** D'après 98, on a $N = \mathfrak{M}(Z_n, n_0')$.

118. **Théorème.** On a $n = \mathfrak{G}(Z_n, n_0)$, c'est-à-dire n est le seul élément commun des systèmes Z_n et n_0.

Preuve. De 99 et 74 résulte que n est contenu dans Z_n et n_0 ; mais tout élément de la chaîne n_0 différent de n est, d'après 77, contenu dans n'_0, donc, d'après 98, n'est pas contenu dans Z_n, ce qu'il fallait démontrer.

119. **Théorème.** D'après 91, 98, le nombre n' n'est pas contenu dans Z_n.

120. **Théorème.** Si $m < n$, alors Z_m est une partie propre de Z_n, et inversement.

Preuve. Si $m < n$, alors (d'après 100) $Z_m \Subset Z_n$, et comme le nombre n, contenu d'après 99 dans Z_n, ne peut, d'après 98, être contenu dans Z_m, parce que $n > m$, Z_m est une partie propre de Z_n. Inversement, si Z_m est une partie propre de Z_n, alors (d'après 100) $m \leq n$, et comme m ne peut être $= n$, car alors on aurait aussi $Z_m = Z_n$, on doit avoir $m < n$, ce qu'il fallait démontrer.

121. **Théorème.** Z_n est une partie propre de $Z_{n'}$. La preuve découle de 106, parce que (d'après 91) $n < n'$.

122. **Théorème.** $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$.

Preuve. Car tout nombre contenu dans $Z_{n'}$ est (d'après 98) $\leq n'$, donc est soit $= n'$ soit $< n'$, et par conséquent, d'après 98, un élément de Z_n ; par conséquent, on a certainement $Z_{n'} \Subset \mathfrak{M}(Z_n, n')$. Comme inversement (d'après 107) $Z_n \Subset Z_{n'}$ et (d'après 99) $n' \Subset Z_{n'}$, il résulte (d'après 10) $\mathfrak{M}(Z_n, n') \Subset Z_{n'}$, d'où découle notre théorème d'après 5.

123. **Théorème.** L'image Z'_n du système Z_n est une partie propre du système $Z_{n'}$.

Preuve. Car tout nombre contenu dans Z_n est l'image m' d'un nombre m contenu dans Z_n, et comme $m \leq n$, donc (d'après 94) $m' \leq n'$, il résulte (d'après 98) $Z'_n \Subset Z_{n'}$. Comme, en outre, le nombre 1 est, d'après 99, dans $Z_{n'}$, mais ne peut, d'après 71, être contenu dans l'image Z'_n, Z'_n est une partie propre de $Z_{n'}$, ce qu'il fallait démontrer.

124. **Théorème.** $Z_{n'} = \mathfrak{M}(1, Z'_n)$.

Preuve. Tout nombre du système $Z_{n'}$ différent de 1 est, d'après 78, l'image m' d'un nombre m, et celui-ci doit être $\leq n$, donc, d'après 98, être contenu dans Z_n (car autrement on aurait $m > n$, donc, d'après 94, aussi $m' > n'$, par conséquent m' ne serait pas, d'après 98, contenu dans $Z_{n'}$) ; de $m \Subset Z_n$ résulte cependant $m' \Subset Z'_n$, et par conséquent on a certainement $Z_{n'} \Subset \mathfrak{M}(1, Z'_n)$. Comme inversement (d'après 99) $1 \Subset Z_{n'}$ et (d'après 109) $Z'_n \Subset Z_{n'}$, il résulte (d'après 10) $\mathfrak{M}(1, Z'_n) \Subset Z_{n'}$, et de là découle notre théorème d'après 5.

125. **Définition.** S'il existe dans un système E de nombres un élément g qui est plus grand que tout autre nombre contenu dans E, alors g est appelé le *plus grand* nombre du système E, et il est évident qu'il ne peut y avoir, d'après 90, qu'un seul tel plus grand nombre dans E. Si un système

est composé d'un seul nombre, celui-ci est lui-même le plus grand nombre du système.

126. **Théorème.** D'après 98, n est le plus grand nombre du système Z_n.

127. **Théorème.** S'il existe dans E un plus grand nombre g, alors $E \Subset Z_g$.

Preuve. Car tout nombre contenu dans E est $\leq g$, donc, d'après 98, contenu dans Z_g, ce qu'il fallait démontrer.

128. **Théorème.** Si E est une partie d'un système Z_n, ou, ce qui revient au même, s'il existe un nombre n tel que tous les nombres contenus dans E soient $\leq n$, alors E possède un plus grand nombre g.

Preuve. Le système de tous les nombres p qui satisfont à la condition $E \Subset Z_p$ — et, d'après notre hypothèse, il en existe — est une chaîne (37), parce que, d'après 107, 7, on a aussi $E \Subset Z_{p'}$, et est donc (d'après 87) $= g_0$, où g est le plus petit de ces nombres (96, 97). On a donc aussi $E \Subset Z_g$, par conséquent (98) tout nombre contenu dans E est $\leq g$, et nous n'avons plus qu'à montrer que le nombre g lui-même est contenu dans E. Cela est immédiatement clair si $g = 1$, car alors (d'après 102) Z_g et par conséquent aussi E sont composés du seul nombre 1. Mais si g est différent de 1 et est donc, d'après 78, l'image f' d'un nombre f, alors (d'après 108) $E \Subset \mathfrak{M}(Z_f, g)$; si maintenant g n'était pas contenu dans E, on devrait avoir $E \Subset Z_f$, et il existerait donc parmi les nombres p un nombre f qui est (d'après 91) $< g$, ce qui contredit ce qui précède ; par conséquent, g est contenu dans E, ce qu'il fallait démontrer.

129. **Définition.** Si $l < m$ et $m < n$, nous disons que le nombre m se trouve *entre* l et n (aussi entre n et l).

130. **Théorème.** Il n'y a pas de nombre qui se trouve entre n et n'.

Preuve. Car dès que $m < n'$, donc (d'après 93) $m \leq n$, on ne peut, d'après 90, avoir $n < m$, ce qu'il fallait démontrer.

131. **Théorème.** Si t est un nombre dans T, mais pas le plus petit (96), alors il existe dans T un et un seul nombre s immédiatement plus petit, c'est-à-dire un nombre s tel que $s < t$, et qu'il n'y ait dans T aucun nombre entre s et t. De même, si t n'est pas le plus grand nombre dans T (111), il existe toujours dans T un et un seul nombre u immédiatement plus grand, c'est-à-dire un nombre u tel que $t < u$, et qu'il n'y ait dans T aucun nombre entre t et u. En même temps, t est dans T immédiatement plus grand que s et immédiatement plus petit que u.

Preuve. Si t n'est pas le plus petit nombre dans T, soit E le système de tous les nombres de T qui sont $< t$; alors (d'après 98) $E \Subset Z_t$, et par conséquent (114) il existe dans E un plus grand nombre s, qui possède évidemment les propriétés indiquées dans le théorème et est aussi le seul nombre de ce genre. Si, en outre, t n'est pas le plus grand nombre dans T, il existe, d'après 96, parmi tous les nombres de T qui sont $> t$, certainement un plus petit u, qui possède, et lui seul, les propriétés indiquées dans le théorème. De même, la justesse de la remarque finale du théorème est évidente.

132. **Théorème.** Dans N, le nombre n' est immédiatement plus grand que n, et n est immédiatement plus petit que n'. La preuve découle de 116, 117.

VII. Parties finies et infinies de la suite des nombres

133. **Théorème.** Tout système Z_n en 98 est fini. Preuve par induction complète (80). Car

134. le théorème est vrai pour $n = 1$ d'après 65, 102.

135. Si Z_n est fini, il résulte de 108 et 70 que $Z_{n'}$ est aussi fini, ce qu'il fallait démontrer.

136. **Théorème.** Si m, n sont des nombres différents, alors Z_m, Z_n sont des systèmes dissemblables.

Preuve. Par symétrie, nous pouvons, d'après 90, supposer $m < n$; alors Z_m est, d'après 106, une partie propre de Z_n, et comme Z_n est, d'après 119, fini, Z_m et Z_n ne peuvent (d'après 64) être semblables, ce qu'il fallait démontrer.

137. **Théorème.** Toute partie E de la suite des nombres N qui possède un plus grand nombre (111) est finie. La preuve découle de 113, 119, 68.

138. **Théorème.** Toute partie U de la suite des nombres N qui ne possède pas de plus grand nombre est simplement infinie (71).

Preuve. Si u est un nombre quelconque dans U, il existe, d'après 117, dans U un et un seul nombre immédiatement plus grand que u, que nous désignerons par $\psi(u)$ et que nous voulons considérer comme l'image de u. L'application ψ du système U ainsi complètement déterminée a évidemment la propriété

$$\alpha. \quad \psi(U) \Subset U,$$

c'est-à-dire U est appliqué par ψ en lui-même. Si de plus u, v sont des nombres différents dans U, nous pouvons, par symétrie, d'après 90, supposer $u < v$; alors il résulte, d'après 117, de la définition de ψ que $\psi(u) \leq v$ et $v < \psi(v)$, donc (d'après 95) $\psi(u) < \psi(v)$; par conséquent, d'après 90, les images $\psi(u), \psi(v)$ sont différentes, c'est-à-dire

$$\delta. \quad \text{l'application } \psi \text{ est semblable.}$$

Si de plus u_1 désigne le plus petit nombre (96) du système U, alors tout nombre u contenu dans U est $\geq u_1$, et comme on a généralement $u < \psi(u)$, on a (d'après 95) $u_1 < \psi(u)$, donc u_1 est, d'après 90, différent de $\psi(u)$, c'est-à-dire

$$\gamma. \quad \text{l'élément } u_1 \text{ de } U \text{ n'est pas contenu dans } \psi(U).$$

Par conséquent, $\psi(U)$ est une partie propre de U, et U est, d'après 64, un système infini. Désignons maintenant, conformément à 44, si V est une partie quelconque de U, par $\psi_0(V)$ la chaîne de V

correspondant à l'application ψ, nous voulons enfin montrer que

$$\beta. \quad U = \psi_0(u_1).$$

En effet, comme toute telle chaîne $\psi_0(V)$ est, en vertu de sa définition (44), une partie du système U appliqué par ψ en lui-même, on a naturellement $\psi_0(u_1) \geq U$; inversement, il résulte d'abord de 45 que l'élément u_1 contenu dans U est certainement contenu dans $\psi_0(u_1)$; mais supposons qu'il existe des éléments de U qui ne sont pas contenus dans $\psi_0(u_1)$; alors il doit y avoir parmi eux, d'après 96, un plus petit nombre w, et comme celui-ci est, d'après ce qui vient d'être dit, différent du plus petit nombre u_1 du système U, il doit exister, d'après 117, dans U aussi un nombre v immédiatement plus petit que w, d'où résulte en même temps que $w = \psi(v)$; comme $v < w$, v doit, en vertu de la définition de w, être certainement contenu dans $\psi_0(u_1)$; de là résulte cependant, d'après 55, que $\psi(v)$, donc w, doit aussi être contenu dans $\psi_0(u_1)$, et comme cela est en contradiction avec la définition de w, notre hypothèse ci-dessus est inadmissible ; par conséquent, $U \geq \psi_0(u_1)$ et aussi $U = \psi_0(u_1)$, comme on l'affirmait. De $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ résulte maintenant, d'après 71, que U est un système simplement infini ordonné par ψ, ce qu'il fallait démontrer.

139. **Théorème.** D'après 121, 122, une partie quelconque T de la suite des nombres N est finie ou simplement infinie, selon qu'il existe ou non dans T un plus grand nombre.

VIII. Définition d'une application de la suite des nombres par induction

140. Nous désignons aussi dans la suite par de petites lettres latines des nombres et conservons en général toutes les notations des §§ 6 à 8 précédents, tandis que Ω désigne un système quelconque dont les éléments ne doivent pas nécessairement être contenus dans N.

141. **Théorème.** Si une application quelconque (semblable ou dissemblable) θ d'un système Ω en lui-même est donnée, et de plus un élément déterminé ω dans Ω, alors à chaque nombre n correspond une et une seule application ψ_n du système numérique Z_n correspondant, défini en 98, qui satisfait aux conditions *)

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \psi_n(Z_n) \Subset \Omega, \\ \text{II.} & \psi_n(1) = \omega, \\ \text{III.} & \psi_n(t') = \theta\psi_n(t), \text{ si } t < n, \end{array}$$

où le signe $\theta\psi_n$ a la signification indiquée en 25.
Preuve par induction complète (80). Car

142. le théorème est vrai pour $n = 1$. Dans ce cas, en effet, d'après 102, le système Z_n est composé du seul nombre 1, et l'application ψ_1 est donc déjà complètement définie par II et de telle sorte que I est remplie, tandis que III disparaît entièrement.

143. Si le théorème est vrai pour un nombre n, nous montrons qu'il est aussi vrai pour le nombre suivant $p = n'$, et nous commençons par prouver qu'il ne peut y avoir qu'une seule application

correspondante ψ_p du système Z_p. En effet, si une application ψ_p satisfait aux conditions

$$\begin{array}{ll} \text{I}'. & \psi_p(Z_p) \Subset \Omega, \\ \text{II}'. & \psi_p(1) = \omega, \\ \text{III}'. & \psi_p(m') = \theta\psi_p(m), \text{ si } m < p, \end{array}$$

alors, d'après 21, parce que $Z_n \Subset Z_p$ (107), une application de Z_n est contenue dans celle-ci, laquelle satisfait évidemment aux mêmes conditions I, II, III que ψ_n et coïncide donc entièrement avec ψ_n ; pour tous les nombres m contenus dans Z_n, donc (d'après 98) pour tous les nombres m qui sont $< p$, c'est-à-dire $\leq n$, on doit donc avoir

$$\psi_p(m) = \psi_n(m) \quad (m)$$

d'où résulte, comme cas particulier, aussi $\psi_p(n) = \psi_n(n)$ (n) ; comme, en outre, p est, d'après 105, 108, le seul nombre du système Z_p non contenu dans Z_n, et que, d'après III' et (n), on doit aussi avoir $\psi_p(p) = \theta\psi_n(n)$ (p), il en résulte la justesse de notre affirmation précédente, qu'il ne peut y avoir qu'une seule application ψ_p du système Z_p satisfaisant aux conditions I', II', III', parce que ψ_p est entièrement ramenée à ψ_n par les conditions (m) et (p) que nous venons de déduire. Nous avons maintenant à montrer que, inversement, cette application ψ_p du système Z_p, complètement déterminée par (m) et (p), satisfait effectivement aux conditions I', II', III'. Il est évident que I' résulte de (m) et (p) en égard à I et à ce que $\theta(\Omega) \Subset \Omega$. De même, II' résulte de (m) et II, parce que le nombre 1 est, d'après 99, contenu dans Z_n. La justesse de III' résulte d'abord pour les nombres m qui sont $< n$ de (m) et III, et pour le seul nombre restant $m = n$, elle résulte de (p) et (n). Ceci démontre complètement que de la validité de notre théorème pour le nombre n résulte toujours sa validité pour le nombre suivant p, ce qu'il fallait démontrer.

144. **Théorème de la définition par induction.** Si une application quelconque (semblable ou dissemblable) θ d'un système Ω en lui-même est donnée, et de plus un élément déterminé ω dans Ω, alors il existe une et une seule application ψ de la suite des nombres N qui satisfait aux conditions

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \psi(N) \Subset \Omega, \\ \text{II.} & \psi(1) = \omega, \\ \text{III.} & \psi(n') = \theta\psi(n), \end{array}$$

où n désigne tout nombre.

Preuve. Comme, s'il existe effectivement une telle application ψ, une application ψ_n du système Z_n est contenue dans celle-ci d'après 21, laquelle satisfait aux conditions I, II, III indiquées en 125, on doit, parce qu'il existe toujours une et une seule telle application ψ_n, nécessairement avoir $\psi(n) = \psi_n(n)$ (n). Comme ψ est ainsi complètement déterminée, il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule telle application ψ (cf. la fin de 130). Que, inversement, l'application ψ déterminée par (n) satisfasse aussi à nos conditions I, II, III, résulte facilement de (n) en considération des propriétés I, II et (p) démontrées en 125, ce qu'il fallait démontrer.

145. **Théorème.** Sous les hypothèses du théorème précédent, on a

$$\psi(T') = \theta\psi(T),$$

où T désigne une partie quelconque de la suite des nombres N.

Preuve. Car si t désigne tout nombre du système T, alors $\psi(T')$ est composé de tous les éléments $\psi(t')$, et $\theta\psi(T)$ de tous les éléments $\theta\psi(t)$; de là découle notre théorème, parce que (d'après III en 126) $\psi(t') = \theta\psi(t)$.

146. **Théorème.** Si l'on conserve les mêmes hypothèses et si l'on désigne par θ_0 les chaînes (44) qui correspondent à l'application θ du système Ω en lui-même, alors

$$\psi(N) = \theta_0(\omega).$$

Preuve. Nous montrons d'abord par induction complète (80) que

$$\psi(N) \geq \theta_0(\omega),$$

c'est-à-dire que toute image $\psi(n)$ est aussi un élément de $\theta_0(\omega)$. En effet,

147. ce théorème est vrai pour $n = 1$, parce que (d'après 126. II) $\psi(1) = \omega$, et que (d'après 45) $\omega \Subset \theta_0(\omega)$.

148. Si le théorème est vrai pour un nombre n, si donc $\psi(n) \Subset \theta_0(\omega)$, alors, d'après 55, $\theta(\psi(n)) \Subset \theta_0(\omega)$, c'est-à-dire (d'après 126. III) $\psi(n') \Subset \theta_0(\omega)$, donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver, en outre, que tout élément ν de la chaîne $\theta_0(\omega)$ est contenu dans $\psi(N)$, que donc

$$\theta_0(\omega) \geq \psi(N),$$

nous appliquons également l'induction complète, à savoir le théorème 59 transposé à Ω et à l'application θ. En effet,

149. l'élément ω est $= \psi(1)$, donc contenu dans $\psi(N)$.

150. Si ν est un élément commun de la chaîne $\theta_0(\omega)$ et du système $\psi(N)$, alors $\nu = \psi(n)$, où n désigne un nombre, et de là résulte (d'après 126. III) $\theta(\nu) = \theta\psi(n) = \psi(n')$, par conséquent $\theta(\nu)$ est aussi contenu dans $\psi(N)$, ce qu'il fallait démontrer.

Des théorèmes démontrés $\psi(N) \geq \theta_0(\omega)$ et $\theta_0(\omega) \geq \psi(N)$ résulte (d'après 5) $\psi(N) = \theta_0(\omega)$, ce qu'il fallait démontrer.

151. **Théorème.** Sous les mêmes hypothèses, on a généralement

$$\psi(n_0) = \theta_0(\psi(n)).$$

Preuve par induction complète 80. Car

152. le théorème est vrai, d'après 128, pour $n = 1$, parce que $1_0 = N$ et $\psi(1) = \omega$.

153. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il résulte

$$\theta(\psi(n_0)) = \theta(\theta_0(\psi(n)));$$

comme maintenant, d'après 127, 75,

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n_0')$$

et, d'après 57, 126. III,

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta(\psi(n))) = \theta_0(\psi(n'))$$

on obtient

$$\psi(n_0') = \theta_0(\psi(n')),$$

c'est-à-dire le théorème est aussi vrai pour le nombre n' qui suit n, ce qu'il fallait démontrer.

154. **Remarque.** Avant de passer aux applications les plus importantes du théorème de la définition par induction démontré en 126 (§§ 10 à 14), il vaut la peine d'attirer l'attention sur une circonstance par laquelle celui-ci diffère essentiellement du théorème de la démonstration par induction démontré en 80, ou plutôt déjà en 59, 60, si proche que la parenté entre celui-ci et celui-là semble être. Tandis que, en effet, le théorème 59 est tout à fait général pour toute chaîne A_0, où A est une partie quelconque d'un système S appliqué par une application quelconque φ en lui-même (§ 4), il en va tout autrement du théorème 126, qui n'affirme que l'existence d'une application ψ non contradictoire (ou univoque) du système simplement infini 1_0. Si l'on voulait, dans ce dernier théorème (en conservant les hypothèses sur Ω et θ), mettre à la place de la suite des nombres 1_0 une chaîne quelconque A_0 d'un tel système S, et définir une application ψ de A_0 dans Ω d'une manière analogue à 126. II, III, en posant que

155. à tout élément a de A corresponde un élément déterminé $\psi(a)$ choisi dans Ω, et

156. que pour tout élément n contenu dans A_0 et son image $n' = \varphi(n)$, la condition $\psi(n') = \theta\psi(n)$ doit être satisfaite, il arriverait très souvent que cette application ψ n'existe pas du tout, parce que ces conditions α, β peuvent entrer en contradiction même si l'on restreint d'emblée, conformément à la condition β, la liberté de choix contenue dans α. Un exemple suffira pour s'en convaincre. Si le système S, composé des éléments différents a et b, est appliqué par φ en lui-même de telle sorte que $a' = b, b' = a$, on a évidemment $a_0 = b_0 = S$; soit, en outre, le système Ω, composé des éléments différents α, β et γ, appliqué par θ en lui-même de telle sorte que $\theta(\alpha) = \beta, \theta(\beta) = \gamma, \theta(\gamma) = \alpha$; si l'on exige maintenant une application ψ de a_0 dans Ω telle que $\psi(a) = \alpha$ et que, en outre, pour

tout élément n contenu dans a_0, on ait toujours $\psi(n') = \theta\psi(n)$, on rencontre une contradiction ; car pour $n = a$, on obtient $\psi(b) = \theta(a) = \beta$, et de là résulte, pour $n = b$, que $\psi(a) = \theta(\beta) = \gamma$ devrait être, tandis que $\psi(a) = \alpha$ était.

S'il existe une application ψ de A_0 dans Ω qui satisfasse sans contradiction aux conditions α, β ci-dessus, il résulte facilement de 60 qu'elle est complètement déterminée ; car si l'application χ satisfait aux mêmes conditions, on a généralement $\chi(n) = \psi(n)$, parce que ce théorème, en vertu de α, est vrai pour tous les éléments $n = a$ contenus dans A, et parce qu'il doit, en vertu de β, aussi être vrai pour son image n' s'il est vrai pour un élément n de A_0.

157. Pour mettre en lumière la portée de notre théorème 126, nous voulons insérer ici une considération qui est aussi utile pour d'autres recherches, par exemple pour la théorie dite des groupes.

Nous considérons un système Ω dont les éléments admettent une certaine combinaison de telle sorte que de l'élément ν par l'action d'un élément ω résulte toujours un élément déterminé du même système Ω, qui peut être noté $\omega \cdot \nu$ ou $\omega\nu$ et qui doit en général être distingué de $\nu\omega$. On peut aussi concevoir cela comme si à chaque élément déterminé ω correspondait une application déterminée, qu'on peut désigner par ω, du système Ω en lui-même, en ce sens que tout élément ν fournit l'image déterminée $\omega(\nu) = \omega\nu$. Si l'on applique à ce système Ω et à son élément ω le théorème 126, en remplaçant en même temps l'application notée là par θ par ω, alors à chaque nombre n correspond un élément déterminé $\psi(n)$ contenu dans Ω, que l'on peut maintenant désigner par le symbole ω^n et qui est parfois appelé la n-ième puissance de ω ; cette notion est complètement définie par les conditions qui lui sont imposées

$$\begin{aligned} &\text{II.} \quad \omega^1 = \omega, \\ &\text{III.} \quad \omega^{n'} = \omega\omega^n, \end{aligned}$$

et son existence est garantie par la démonstration du théorème 126. Si la combinaison ci-dessus des éléments est de plus telle que pour des éléments quelconques μ, ν, ω on ait toujours $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\mu$, alors les théorèmes $\omega^{n'} = \omega^n\omega$, $\omega^m\omega^n = \omega^n\omega^m$ sont aussi valables, dont les preuves sont faciles à conduire par induction complète (80) et peuvent être laissées au lecteur. La considération générale qui précède peut être appliquée immédiatement à l'exemple suivant. Si S est un système d'éléments quelconques, et Ω le système correspondant dont les éléments sont toutes les applications ν de S en lui-même (36), alors ces éléments peuvent toujours se composer d'après 25, parce que $\nu(S) \subset S$, et l'application $\omega\nu$ composée de telles applications ν et ω est elle-même à nouveau un élément de Ω. Alors toutes les éléments ω^n sont aussi des applications de S en lui-même, et l'on dit qu'elles proviennent par *répétition* de l'application ω. Nous voulons maintenant mettre en évidence une relation simple qui existe entre cette notion et la notion de chaîne $\omega_0(A)$ définie en 44, où A désigne à nouveau une partie quelconque de S. Si l'on désigne, pour abréger, l'image $\omega^n(A)$ engendrée par l'application ω^n par A_n, il résulte de III, 25, que $\omega(A_n) = A_{n'}$. De là résulte facilement par induction complète (80) que tous ces systèmes A_n sont des parties de la chaîne $\omega_0(A)$; car

158. cette assertion est vraie, d'après 50, pour $n = 1$, et

159. si elle est vraie pour un nombre n, alors il résulte de 55 et de $A_n = \omega(A_n)$ qu'elle est aussi

vraie pour le suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

Comme, en outre, d'après 45, $A \subset \omega_0(A)$, il résulte de 10 que le système K composé de A et de toutes les images A_n est aussi une partie de $\omega_0(A)$. Inversement, comme (d'après 23) $\omega(K)$ est composé de $\omega(A) = A_1$ et de tous les systèmes $\omega(A_n) = A_{n'}$, donc (d'après 78) de tous les systèmes A_n, qui sont, d'après 9, des parties de K, on a (d'après 10) $\omega(K) \subset K$, c'est-à-dire K est une chaîne (37), et comme (d'après 9) $A \subset K$, il résulte, d'après 47, que $\omega_0(A) \subset K$. Par conséquent, $\omega_0(A) = K$, c'est-à-dire le théorème suivant est valable : Si ω est une application d'un système S en lui-même, et A une partie quelconque de S, alors la chaîne de A correspondant à l'application ω est composée de A et de toutes les images $\omega^n(A)$ provenant de la répétition de ω. Nous recommandons au lecteur de revenir avec cette conception d'une chaîne aux théorèmes antérieurs 57, 58.

IX. La classe des systèmes simplement infinis

160. **Théorème.** Tous les systèmes simplement infinis sont semblables à la suite des nombres N et par conséquent (d'après 33) aussi semblables entre eux.

Preuve. Soit le système simplement infini Ω ordonné par l'application θ (71), et soit ω l'élément de base de Ω qui intervient ici ; si nous désignons à nouveau par θ_0 les chaînes correspondant à l'application θ (44), alors, d'après 71, on a ce qui suit :

α. $\theta(\Omega) \Subset \Omega$.
β. $\Omega = \theta_0(\omega)$.
γ. ω n'est pas contenu dans $\theta(\Omega)$.
δ. L'application θ est semblable.

Si maintenant ψ désigne l'application de la suite des nombres N définie en 126, alors il résulte de β et 128 d'abord $\psi(N) = \Omega$, et nous n'avons donc, d'après 32, plus qu'à montrer que ψ est une application semblable, c'est-à-dire (26) qu'à des nombres différents m, n correspondent aussi des images différentes $\psi(m), \psi(n)$. Par symétrie, nous pouvons, d'après 90, supposer $m > n$, donc $m \Subset n_0$, et le théorème à démontrer revient à dire que $\psi(n)$ n'est pas contenu dans $\psi(n_0)$, donc (d'après 127) pas dans $\theta\psi(n_0)$. Nous prouvons ceci pour tout nombre n par induction complète (80). En effet,

161. ce théorème est vrai, d'après γ, pour $n = 1$, parce que $\psi(1) = \omega$ et $\psi(1_0) = \psi(N) = \Omega$.

162. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il est aussi vrai pour le nombre suivant n' ; car si $\psi(n')$, c'est-à-dire $\theta\psi(n)$, était contenu dans $\theta\psi(n_0)$, on devrait (d'après δ et 27) avoir aussi $\psi(n)$ contenu dans $\psi(n_0)$, tandis que notre hypothèse affirme précisément le contraire, ce qu'il fallait démontrer.

163. **Théorème.** Tout système semblable à un système simplement infini et par conséquent (d'après 132, 33) aussi à la suite des nombres N est simplement infini.

Preuve. Si Ω est un système semblable à la suite des nombres N, alors il existe, d'après 32, une application semblable ψ de N telle que

$$\text{I.} \quad \psi(N) = \Omega$$

; alors nous posons

$$\text{II.} \quad \psi(1) = \omega.$$

Si l'on désigne, d'après 26, par $\overline{\psi}$ l'application inverse, également semblable, de Ω, alors à chaque élément ν de Ω correspond un nombre déterminé $\overline{\psi}(\nu) = n$, à savoir celui dont l'image $\psi(n) = \nu$ est. Comme maintenant à ce nombre n correspond un nombre suivant déterminé $\varphi(n) = n'$, et à celui-ci à nouveau un élément déterminé $\psi(n')$ dans Ω, il appartient aussi à chaque élément ν du système Ω un élément déterminé $\psi(n')$ du même système, que nous voulons désigner comme l'image de ν par $\theta(\nu)$. Par là est complètement déterminée une application θ de Ω en lui-même, et pour démontrer notre théorème, nous voulons montrer que Ω est ordonné par θ comme système simplement infini (71), c'est-à-dire que les conditions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indiquées dans la démonstration de 132 sont toutes remplies. D'abord, α résulte immédiatement de la définition de θ. Comme, en outre, à tout nombre n correspond un élément $\nu = \psi(n)$ pour lequel $\theta(\nu) = \psi(n')$, on a généralement

$$\text{III.} \quad \psi(n') = \theta\psi(n),$$

et de là, en liaison avec I, II, α, il résulte que les applications θ, ψ satisfont à toutes les conditions du théorème 126 ; par conséquent, β résulte de 128 et I. D'après 127 et I, on a en outre $\psi(N') = \theta\psi(N) = \theta(\Omega)$, et de là, en liaison avec II et la similitude de l'application ψ, résulte γ, car autrement $\psi(1)$ serait contenu dans $\psi(N')$, donc (d'après 27) le nombre 1 devrait être contenu dans N', ce qui (d'après 71. γ) n'est pas le cas. Enfin, si μ, ν sont des éléments de Ω, et m, n les nombres correspondants dont les images $\psi(m) = \mu, \psi(n) = \nu$ sont, alors de l'hypothèse $\theta(\mu) = \theta(\nu)$ résulte, d'après ce qui précède, que $\psi(m') = \psi(n')$, de là, à cause de la similitude de ψ, que $m' = n'$, $m = n$, donc aussi $\mu = \nu$; par conséquent, δ est aussi valable, ce qu'il fallait démontrer.

164. **Remarque.** En vertu des deux théorèmes précédents 132, 133, tous les systèmes simplement infinis forment une classe au sens de 34. En même temps, il est clair, en égard à 71, 73, que tout théorème sur les nombres, c'est-à-dire sur les éléments n du système simplement infini N ordonné par l'application φ, et notamment tout théorème dans lequel on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments n et où il n'est question que de concepts provenant de l'ordonnancement φ, possède une validité générale aussi pour tout autre système simplement infini Ω ordonné par une application θ et pour ses éléments ν, et que le transfert de N à Ω (par exemple aussi la traduction d'un théorème arithmétique d'une langue dans une autre) se fait par l'application ψ considérée en 132, 133, qui transforme tout élément n de N en un élément ν de Ω, à savoir en $\psi(n)$. Cet élément ν peut être appelé le n-ième élément de Ω, et, d'après cela, le nombre n lui-même est le n-ième nombre de la suite des nombres N. La même signification que possède l'application φ pour les lois dans le domaine N, en ce sens qu'à tout élément n succède un élément déterminé $\varphi(n) = n'$, revient, par la transformation opérée par ψ, à l'application θ pour les mêmes lois dans le domaine Ω, en ce sens qu'à l'élément $\nu = \psi(n)$ provenant de la transformation de n succède l'élément $\theta(\nu) = \psi(n')$ provenant de la transformation de n' ; on peut donc dire à juste titre que φ est transformé par ψ en θ, ce qui peut s'exprimer symboliquement par $\theta = \psi\varphi\overline{\psi}, \varphi = \overline{\psi}\theta\psi$. Par ces remarques, la définition du concept de nombre établie en 73 est, je crois, complètement justifiée. Nous passons maintenant à d'autres applications du théorème 126.

X. Addition des nombres

165. **Définition.** Il est naturel d'appliquer le théorème 126 de la définition d'une application ψ de la suite des nombres N ou de la fonction $\psi(n)$ déterminée par celle-ci au cas où le système noté là par Ω, dans lequel l'image $\psi(N)$ doit être contenue, est la suite des nombres N elle-même, parce que pour ce système Ω il existe déjà une application θ de Ω en lui-même, à savoir l'application φ par laquelle N est ordonné comme système simplement infini (71, 73). Alors on a donc $\Omega = N, \theta(n) = \varphi(n) = n'$, donc

$$\text{I.} \quad \psi(N) \Subset N,$$

et il ne reste plus, pour déterminer complètement ψ, qu'à choisir l'élément ω de Ω, c'est-à-dire de N, à volonté. Si l'on prend $\omega = 1$, ψ sera évidemment l'application identique (21) de N, parce que les conditions

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(n') = (\psi(n))'$$

sont satisfaites généralement par $\psi(n) = n$. Si donc une autre application ψ de N doit être engendrée, il faut choisir pour ω un nombre m' différent de 1 et contenu, d'après 78, dans N', où m est lui-même un nombre quelconque ; comme l'application ψ dépend évidemment du choix de ce nombre m, nous désignons l'image correspondante $\psi(n)$ d'un nombre quelconque n par le symbole $m+n$ et appelons ce nombre la *somme* qui provient du nombre m par addition du nombre n, ou brièvement la somme des nombres m, n. Elle est donc, d'après 126, complètement déterminée par les conditions

$$\text{II.} \quad m + 1 = m',$$
$$\text{III.} \quad m + n' = (m + n)'.$$

166. **Théorème.** On a $m' + n = m + n'$. Preuve par induction complète (80). Car

167. le théorème est vrai pour $n = 1$, parce que (d'après 135. II) $m' + 1 = (m')' = (m + 1)'$ et (d'après 135. III) $(m + 1)' = m + 1'$.

Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si l'on pose le nombre suivant $n' = p$, alors $m' + n = m + p$, donc aussi $(m' + n)' = (m + p)'$, d'où (d'après 135. III) $m' + p = m + p'$; par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant p, ce qu'il fallait démontrer.

168. **Théorème.** On a $m' + n = (m + n)'$. La preuve découle de 136 et 135. III.

169. **Théorème.** On a $1 + n = n'$. Preuve par induction complète (80). Car

170. le théorème est vrai, d'après 135. II, pour $n = 1$.

171. Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si l'on pose $n' = p$, alors $1 + n = p$, donc aussi $(1 + n)' = p'$, par conséquent (d'après 135. III) $1 + p = p'$, c'est-à-dire le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant p, ce qu'il fallait démontrer.

172. **Théorème.** On a $1 + n = n + 1$.

173. **Théorème.** On a $m + n = n + m$. Preuve par induction complète (80). Car

174. le théorème est vrai, d'après 139, pour $n = 1$.

175. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il en résulte aussi $(m + n)' = (n + m)'$, c'est-à-dire (d'après 135. III) $m + n' = n + m'$, donc (d'après 136) $m + n' = n' + m$; par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

176. **Théorème.** On a $(l + m) + n = l + (m + n)$. Preuve par induction complète (80). Car

177. le théorème est vrai pour $n = 1$, parce que (d'après 135. II, III, II) $(l + m) + 1 = (l + m)' = l + m' = l + (m + 1)$.

178. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il en résulte aussi $((l+m)+n)' = (l+(m+n))'$, c'est-à-dire (d'après 135. III) $(l + m) + n' = l + (m + n)' = l + (m + n')$, donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

179. **Théorème.** On a $m + n > m$. Preuve par induction complète (80). Car

180. le théorème est vrai, d'après 135. II et 91, pour $n = 1$.

181. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il est aussi vrai, d'après 95, pour le nombre suivant n', parce que (d'après 135. III et 91) $m + n' = (m + n)' > m + n$, ce qu'il fallait démontrer.

182. **Théorème.** Les conditions $m > a$ et $m + n > a + n$ sont équivalentes. Preuve par induction complète (80). Car

183. le théorème est vrai, d'après 135. II et 94, pour $n = 1$.

184. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il est aussi vrai pour le nombre suivant n', parce que la condition $m + n > a + n$ est, d'après 94, équivalente à $(m + n)' > (a + n)'$, donc, d'après 135. III, aussi à $m + n' > a + n'$, ce qu'il fallait démontrer.

185. **Théorème.** Si $m > a$ et $n > b$, alors on a aussi $m + n > a + b$.

Preuve. Car de nos hypothèses résulte (d'après 143) $m + n > a + n$ et $n + a > b + a$ ou, ce qui est la même chose d'après 140, $a + n > a + b$, d'où découle le théorème d'après 95.

186. **Théorème.** Si $m + n = a + n$, alors $m = a$.

Preuve. Car si m n'est pas $= a$, donc, d'après 90, soit $m > a$ soit $m < a$, alors, d'après 143, on a respectivement $m + n > a + n$ ou $m + n < a + n$, donc $m + n$ ne peut certainement pas (d'après 90) être $= a + n$, ce qu'il fallait démontrer.

187. **Théorème.** Si $l > n$, alors il existe un et (d'après 145) un seul nombre m qui satisfait à la condition $m + n = l$. Preuve par induction complète (80). Car

188. le théorème est vrai pour $n = 1$. En effet, si $l > 1$, c'est-à-dire (89) si l est contenu dans N', donc est l'image m' d'un nombre m, il résulte de 135. II que $l = m + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

189. Si le théorème est vrai pour un nombre n, nous montrons qu'il est aussi vrai pour le nombre suivant n'. En effet, si $l > n'$, alors, d'après 91, 95, on a aussi $l > n$, et par conséquent il existe un nombre k qui satisfait à la condition $l = k + n$; comme celui-ci est, d'après 138, différent de 1 (car autrement on aurait $l = n'$), il est, d'après 78, l'image m' d'un nombre m, et par conséquent $l = m' + n$, donc, d'après 136, aussi $l = m + n'$, ce qu'il fallait démontrer.

XI. Multiplication des nombres

190. **Définition.** Après qu'au § 11 précédent on a trouvé un système infini de nouvelles applications de la suite des nombres N en elle-même, on peut, d'après 126, utiliser chacune d'elles pour engendrer à nouveau de nouvelles applications ψ de N. En posant là $\Omega = N$ et $\theta(n) = m + n = n + m$, où m est un nombre déterminé, on a de nouveau

$$\text{I.} \quad \psi(N) \Subset N,$$

et il ne reste, pour déterminer complètement ψ, qu'à choisir l'élément ω de N à volonté. Le cas le plus simple se présente alors lorsque l'on met ce choix en une certaine concordance avec le choix de θ, en posant $\omega = m$. Comme l'application ψ ainsi complètement déterminée dépend de ce nombre m, nous désignons l'image correspondante $\psi(n)$ d'un nombre quelconque n par le symbole $m \times n$ ou $m \cdot n$ ou mn, et appelons ce nombre le *produit* qui provient du nombre m par *multiplication* par le nombre n, ou brièvement le produit des nombres m, n. Il est donc, d'après 126, complètement déterminé par les conditions

$$\text{II.} \quad m \cdot 1 = m,$$
$$\text{III.} \quad m \cdot n' = m \cdot n + m.$$

191. **Théorème.** On a $m' \cdot n = m \cdot n + n$. Preuve par induction complète (80). Car

192. le théorème est vrai pour $n = 1$, parce que (d'après 147. II) $m' \cdot 1 = m'$ et (d'après 147. II, 135. II) $m \cdot 1 + 1 = m + 1 = m'$.

193. Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si l'on pose $n' = p$, alors $m' \cdot n = m \cdot n + n$, donc $m' \cdot n + m' = m \cdot n + n + m'$; or (d'après 147. III, 141, 140) le premier membre est $m' \cdot p$ et le second $m \cdot p + p$; par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant p, ce qu'il fallait démontrer.

194. **Théorème.** On a $m \cdot n' = m' \cdot n$. La preuve découle de 147. III et 148.

195. **Théorème.** On a $1 \cdot n = n$. Preuve par induction complète (80). Car

196. le théorème est vrai, d'après 147. II, pour $n = 1$.

Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors $1 \cdot n = n$, donc $1 \cdot n + 1 = n + 1$, c'est-à-dire (d'après 147. III et 135. II) $1 \cdot n' = n'$; donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

197. **Théorème.** On a $m \cdot n = n \cdot m$. Preuve par induction complète (80). Car

198. le théorème est vrai, d'après 149, pour $n = 1$.

199. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il en résulte $m \cdot n + m = n \cdot m + m$, c'est-à-dire (d'après 147. III, 148, 147. III) $m \cdot n' = n' \cdot m$; donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

200. **Théorème.** On a $l(m + n) = lm + ln$. Preuve par induction complète (80). Car

201. le théorème est vrai pour $n = 1$, parce que (d'après 135. II, 147. III, 147. II) $l(m + 1) = lm' = lm + l = lm + l \cdot 1$.

202. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il en résulte $l(m + n) + l = (lm + ln) + l$, c'est-à-dire (d'après 135. III, 147. III, 141, 147. III) $l(m + n') = lm + ln'$; donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

203. **Théorème.** On a $(m + n)l = ml + nl$. La preuve découle de 151, 150.

204. **Théorème.** On a $(lm)n = l(mn)$. Preuve par induction complète (80). Car

205. le théorème est vrai, d'après 147. II, pour $n = 1$.

Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il résulte $(lm)n + lm = l(mn) + lm$, c'est-à-dire (d'après 147. III, 151, 147. III) $(lm)n' = l(mn + m) = l(mn')$; donc le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

206. **Remarque.** Si l'on n'avait pas supposé en 147 de relation entre ω et θ, mais posé $\omega = k$, $\theta(n) = m + n$, il en serait résulté, d'après 126, une application ψ de la suite des nombres N moins simple ; pour le nombre 1, on aurait $\psi(1) = k$, et pour tout autre nombre, donc contenu dans la forme n', on aurait $\psi(n') = mn + k$; car c'est ainsi, comme on s'en convainc facilement en utilisant les théorèmes précédents, que la condition $\psi(n') = \theta\psi(n)$, c'est-à-dire $\psi(n') = m + \psi(n)$ est satisfaite pour tous les nombres n.

XII. Élévation à la puissance des nombres

207. **Définition.** Si, dans le théorème 126, on pose à nouveau $\Omega = N$, puis $\omega = a$, $\theta(n) = an = na$, il en résulte une application ψ de N qui satisfait à nouveau à la condition

$$\text{I.} \quad \psi(N) \Subset N.$$

L'image correspondante $\psi(n)$ d'un nombre quelconque n, nous la désignons par le symbole a^n et appelons ce nombre une *puissance* de la base a, tandis que n est l'*exposant* de cette puissance de a. Cette notion est donc complètement déterminée par les conditions

$$\text{II.} \quad a^1 = a,$$
$$\text{III.} \quad a^{n'} = a \cdot a^n = a^n \cdot a.$$

208. **Théorème.** On a $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. Preuve par induction complète (80). Car

209. le théorème est vrai, d'après 135. II, 155. III, 155. II, pour $n = 1$.

210. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il résulte

$$a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n) \cdot a;$$

d'après 155. III, on a cependant $a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)'}$, et d'après 150, 153, 155. III, on a $(a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m \cdot a^{n'} = a^m \cdot a^{m+n}$; par conséquent, le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

211. **Théorème.** On a $(a^m)^n = a^{mn}$. Preuve par induction complète (80). Car

212. le théorème est vrai, d'après 155. II, 147. II, pour $n = 1$.

213. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il résulte $(a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m$; d'après 155. III, on a cependant $(a^m)^n \cdot a^m = (a^m)^{n'}$, et d'après 156, 147. III, $a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{mn'}$; par conséquent, $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$, c'est-à-dire le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

214. **Théorème.** On a $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. Preuve par induction complète (80). Car

215. le théorème est vrai, d'après 155. II, pour $n = 1$.

216. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il résulte, d'après 150, 153, 155. III, aussi

$$(ab)^n \cdot a = a(a^n \cdot b^n) = (a \cdot a^n) \cdot b^n = a^{n'} \cdot b^n,$$

et de là

$$(ab)^n \cdot ab = (a^{n'} \cdot b^n) \cdot b;$$

d'après 153, 155. III, on a cependant

$$(ab)^n \cdot ab = (ab)^n \cdot (ab) = (ab)^{n'},$$

et de même

$$(a^{n'} \cdot b^n) \cdot b = a^{n'} \cdot (b^n \cdot b) = a^{n'} \cdot b^{n'};$$

par conséquent, $(ab)^{n'} = a^{n'} \cdot b^{n'}$, c'est-à-dire le théorème est aussi vrai pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

XIII. Nombre d'éléments d'un système fini

217. **Théorème.** Si Σ est un système infini, alors chacun des systèmes numériques Z_n définis en 98 peut être appliqué semblablement dans Σ (c'est-à-dire rendu semblable à une partie de Σ), et inversement.

Preuve. Si Σ est infini, il existe, d'après 72, certainement une partie T de Σ qui est simplement infinie, donc, d'après 132, semblable à la suite des nombres N, et par conséquent, d'après 35, tout système Z_n, en tant que partie de N, est aussi semblable à une partie de T, donc aussi à une partie de Σ, ce qu'il fallait démontrer. La preuve de l'inverse — si évidente qu'elle puisse paraître — est plus compliquée. Si tout système Z_n peut être appliqué semblablement dans Σ, alors à chaque nombre n correspond une telle application semblable α_n de Z_n telle que $\alpha_n(Z_n) \geq \Sigma$. De l'existence d'une telle série d'applications α_n, considérée comme donnée, sur laquelle on ne suppose rien d'autre, nous déduisons d'abord, à l'aide du théorème 126, l'existence d'une nouvelle série de telles applications ψ_n qui possède la propriété particulière que, chaque fois que $m \leq n$, donc (d'après 100) $Z_m \geq Z_n$, l'application ψ_m de la partie Z_m est contenue dans l'application ψ_n de Z_n (21), c'est-à-dire que les applications ψ_m et ψ_n coïncident complètement pour tous les nombres contenus dans Z_m, donc aussi qu'on a toujours $\psi_m(m) = \psi_n(m)$. Pour appliquer le théorème cité conformément à ce but, nous entendons par Ω le système dont les éléments sont toutes les applications semblables possibles de tous les systèmes Z_n dans Σ, et définissons, à l'aide des éléments α_n donnés, également contenus dans Ω, une application θ de Ω en lui-même de la manière suivante. Si β est un élément quelconque de Ω, par exemple une application semblable du système déterminé Z_n dans Σ, alors le système $\alpha_n(Z_n)$ ne peut pas être une partie de $\beta(Z_n)$, car autrement Z_n serait, d'après 35, semblable à une partie de Z_n, donc, d'après 107, à une partie propre de lui-même, par conséquent infini, ce qui contredirait le théorème 119 ; il existe donc dans Z_n certainement un nombre ou plusieurs nombres p tels que $\alpha_n(p)$ ne soit pas contenu dans $\beta(Z_n)$; parmi ces nombres p, nous choisissons — seulement pour fixer quelque chose de déterminé — toujours le plus petit k (96) et définissons, comme $Z_{n'}$ est composé, d'après 108, de Z_n et de n', une application γ de $Z_{n'}$ en posant que pour tous les nombres m contenus dans Z_n, l'image $\gamma(m) = \beta(m)$, et en outre $\gamma(n') = \alpha_n(k)$; cette application γ, évidemment semblable, de $Z_{n'}$ dans Σ, nous la considérons maintenant comme une image $\theta(\beta)$ de l'application β, et par là une application θ du système Ω en lui-même est complètement définie. Après que les objets Ω et θ mentionnés en 126 sont déterminés, nous choisissons enfin pour l'élément noté ω de Ω l'application donnée α_1 ; par là est déterminée, d'après 126, une application ψ de la suite des nombres N dans Ω qui, si nous désignons l'image correspondante d'un

nombre quelconque n non par $\psi(n)$ mais par ψ_n, satisfait aux conditions

II. $\psi_1 = \alpha_1$,
III. $\psi_{n'} = \theta(\psi_n)$.

Par induction complète (80), il résulte d'abord que ψ_n est une application semblable de Z_n dans Σ ; car

218. ceci est vrai, d'après II, pour $n = 1$, et

219. si cette assertion est vraie pour un nombre n, alors il résulte de III et de la nature du passage θ de β à γ décrit ci-dessus que l'assertion est aussi vraie pour le nombre suivant n', ce qu'il fallait démontrer.

Là-dessus, nous prouvons également par induction complète (80) que, si m est un nombre quelconque, la propriété annoncée ci-dessus $\psi_n(m) = \psi_m(m)$ est vraie pour tous les nombres n qui sont $\geq m$, donc, d'après 93, 74, appartiennent à la chaîne m_0 ; en effet,

220. ceci est immédiatement évident pour $n = m$, et

221. si cette propriété est vraie pour un nombre n, alors il résulte à nouveau de III et de la nature de θ qu'elle est aussi vraie pour le nombre n', ce qu'il fallait démontrer.

Après que cette propriété particulière de notre nouvelle série d'applications ψ_n est également établie, nous pouvons facilement démontrer notre théorème. Nous définissons une application χ de la suite des nombres N en faisant correspondre à tout nombre n l'image $\chi(n) = \psi_n(n)$; il est évident que (d'après 21) toutes les applications ψ_n sont contenues dans cette unique application χ. Comme ψ_n était une application de Z_n dans Σ, il résulte d'abord que la suite des nombres N est également appliquée par χ dans Σ, donc $\chi(N) \geq \Sigma$. Si de plus m, n sont des nombres différents, on peut, par symétrie, d'après 90, supposer $m < n$; alors, d'après ce qui précède, $\chi(m) = \psi_m(m) = \psi_n(m)$ et $\chi(n) = \psi_n(n)$; mais comme ψ_n était une application semblable de Z_n dans Σ, et que m, n sont des éléments différents de Z_n, $\psi_n(m)$ est différent de $\psi_n(n)$, donc aussi $\chi(m)$ est différent de $\chi(n)$, c'est-à-dire χ est une application semblable de N. Comme, en outre, N est un système infini (71), il en est de même, d'après 67, du système $\chi(N)$ qui lui est semblable, et, d'après 68, comme $\chi(N)$ est une partie de Σ, il en est de même de Σ, ce qu'il fallait démontrer.

222. **Théorème.** Un système Σ est fini ou infini selon qu'il existe ou non un système Z_n qui lui soit semblable.

Preuve. Si Σ est fini, il existe, d'après 159, des systèmes Z_n qui ne peuvent être appliqués semblablement dans Σ ; comme, d'après 102, le système Z_1 est composé du seul nombre 1 et peut donc être appliqué semblablement dans tout système, le plus petit nombre k (96) auquel correspond un système Z_k qui ne peut être appliqué semblablement dans Σ doit être différent de 1, donc (d'après 78) être $= n'$, et comme $n < n'$ (91), il existe une application semblable ψ de Z_n dans Σ ; si maintenant $\psi(Z_n)$ n'était qu'une partie propre de Σ, s'il existait donc un élément α dans Σ qui n'est pas

contenu dans $\psi(Z_n)$, on pourrait, comme $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$ (108), étendre cette application ψ en une application semblable χ de $Z_{n'}$ dans Σ en posant $\chi(n') = \alpha$, tandis que, d'après notre hypothèse, $Z_{n'}$ ne peut être appliqué semblablement dans Σ. Par conséquent, $\psi(Z_n) = \Sigma$, c'est-à-dire Z_n et Σ sont des systèmes semblables. Inversement, si un système Σ est semblable à un système Z_n, alors Σ est, d'après 119, 67, fini, ce qu'il fallait démontrer.

223. **Définition.** Si Σ est un système fini, il existe, d'après 160, un, et, d'après 120, 33, un seul nombre n auquel correspond un système Z_n semblable au système Σ ; ce nombre n est appelé le *nombre* des éléments contenus dans Σ (ou aussi le *degré* du système Σ), et l'on dit que Σ est composé de n éléments, ou est un système de n éléments, ou que le nombre n indique combien d'éléments sont contenus dans Σ. Lorsque les nombres sont utilisés pour exprimer exactement cette propriété déterminée des systèmes finis, ils sont appelés des *nombres cardinaux*. Dès qu'une application semblable déterminée ψ du système Z_n est choisie, par laquelle $\psi(Z_n) = \Sigma$, alors à tout nombre m contenu dans Z_n (c'est-à-dire à tout nombre m qui est $\leq n$) correspond un élément déterminé $\psi(m)$ du système Σ, et, inversement, d'après 26, à tout élément de Σ correspond, par l'application inverse $\overline{\psi}$, un nombre déterminé m dans Z_n. Très souvent, on désigne tous les éléments de Σ par une seule lettre, par exemple α, à laquelle on ajoute les nombres distinctifs m comme indices, de sorte que $\psi(m)$ soit noté α_m. On dit aussi que ces éléments sont *comptés* et ordonnés d'une manière déterminée par ψ, et l'on appelle α_m le m-ième élément de Σ ; si $m < n$, $\alpha_{m'}$ est appelé l'élément suivant α_m, et α_n est appelé le dernier élément. En comptant ainsi les éléments, les nombres m apparaissent donc à nouveau comme des nombres ordinaux (73).

224. **Théorème.** Tous les systèmes semblables à un système fini possèdent le même nombre d'éléments. La preuve découle immédiatement de 33, 161.

225. **Théorème.** Le nombre des éléments contenus dans Z_n, c'est-à-dire des nombres qui sont $\leq n$, est n.

Preuve. Car, d'après 32, Z_n est semblable à lui-même.

226. **Théorème.** Si un système est composé d'un seul élément, le nombre de ses éléments est $= 1$, et inversement. La preuve découle immédiatement de 2, 26, 32, 102, 161.

227. **Théorème.** Si T est une partie propre d'un système fini Σ, alors le nombre des éléments de T est plus petit que celui des éléments de Σ.

Preuve. D'après 68, T est un système fini, donc semblable à un système Z_m, où m est le nombre des éléments de T ; si de plus n est le nombre des éléments de Σ, donc Σ semblable à Z_n, alors T est, d'après 35, semblable à une partie propre E de Z_n, et, d'après 33, Z_m et E sont aussi semblables entre eux ; si maintenant on avait $n \leq m$, donc $Z_n \Subset Z_m$, alors E serait, d'après 7, aussi une partie propre de Z_m, et par conséquent Z_m serait un système infini, ce qui contredit le théorème 119 ; par conséquent, on a (d'après 90) $m < n$, ce qu'il fallait démontrer.

228. **Théorème.** Si $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, où B est un système de n éléments et γ un élément de Γ non contenu dans B, alors Γ est composé de n' éléments.

Preuve. Car si $B = \psi(Z_n)$, où ψ est une application semblable de Z_n, on peut étendre celle-ci, d'après 105, 108, en une application semblable χ de $Z_{n'}$ en posant $\chi(n') = \gamma$, et l'on aura $\chi(Z_{n'}) = \Gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

229. **Théorème.** Si γ est un élément d'un système Γ composé de n' éléments, alors n est le nombre de tous les autres éléments de Γ.

Preuve. Car si B est l'ensemble de tous les éléments de Γ différents de γ, alors $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$; si maintenant b est le nombre des éléments du système fini B, alors, d'après le théorème précédent, b' est le nombre des éléments de Γ, donc $= n'$, d'où, d'après 26, résulte aussi $b = n$, ce qu'il fallait démontrer.

230. **Théorème.** Si A est composé de m, et B de n éléments, et si A et B n'ont aucun élément commun, alors $\mathfrak{M}(A, B)$ est composé de $m + n$ éléments. Preuve par induction complète (80). Car

231. le théorème est vrai pour $n = 1$ d'après 166, 164, 135. II.

232. Si le théorème est vrai pour un nombre n, alors il est aussi vrai pour le nombre suivant n'. En effet, si Γ est un système de n' éléments, on peut (d'après 167) poser $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, où γ est un élément et B le système des n autres éléments de Γ. Si maintenant A est un système de m éléments dont aucun n'est dans Γ, donc pas non plus dans B, et si l'on pose $\mathfrak{M}(A, B) = \Sigma$, alors, d'après notre hypothèse, $m + n$ est le nombre des éléments de Σ, et comme γ n'est pas contenu dans Σ, le nombre des éléments contenus dans $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma)$ est, d'après 166, $= (m + n)'$, donc (d'après 135. III) $= m + n'$; mais comme, d'après 15, on a évidemment $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma) = \mathfrak{M}(A, B, \gamma) = \mathfrak{M}(A, \Gamma)$, $m + n'$ est le nombre des éléments de $\mathfrak{M}(A, \Gamma)$, ce qu'il fallait démontrer.

233. **Théorème.** Si A, B sont des systèmes finis de respectivement m, n éléments, alors $\mathfrak{M}(A, B)$ est un système fini, et le nombre de ses éléments est $\leq m + n$.

Preuve. Si $B \Subset A$, alors $\mathfrak{M}(A, B) = A$, et le nombre m des éléments de ce système est (d'après 142) $< m + n$, comme on l'affirmait. Mais si B n'est pas une partie de A, et T le système de tous les éléments de B qui ne sont pas contenus dans A, alors, d'après 165, leur nombre p est $\leq n$, et comme on a évidemment

$$\mathfrak{M}(A, B) = \mathfrak{M}(A, T),$$

le nombre $m + p$ des éléments de ce système est, d'après 143, $\leq m + n$, ce qu'il fallait démontrer.

234. **Théorème.** Tout système composé d'un nombre n de systèmes finis est fini. Preuve par induction complète (80). Car

235. le théorème est, d'après 8, évident pour $n = 1$.

236. Si le théorème est vrai pour un nombre n, et si Σ est composé de n' systèmes finis, soit A l'un de ces systèmes et B le système composé de tous les autres ; comme leur nombre est (d'après 167)

$= n$, B est, d'après notre hypothèse, un système fini. Comme on a évidemment $\Sigma = \mathfrak{M}(A, B)$, il résulte de là et de 169 que Σ est aussi un système fini, ce qu'il fallait démontrer.

237. **Théorème.** Si ψ est une application dissemblable d'un système fini Σ de n éléments, alors le nombre des éléments de l'image $\psi(\Sigma)$ est plus petit que n.

Preuve. Si l'on choisit, parmi tous les éléments de Σ qui possèdent une seule et même image, toujours un seul à volonté, le système T de tous ces éléments choisis est évidemment une partie propre de Σ, parce que ψ est une application dissemblable.

238. **Remarque finale.** Bien qu'il soit démontré à l'instant que le nombre m des éléments de $\psi(\Sigma)$ est plus petit que le nombre n des éléments de Σ, on dit pourtant dans certains cas volontiers que le nombre des éléments de $\psi(\Sigma)$ est $= n$. Naturellement, le mot nombre est alors employé dans un autre sens que celui qui a prévalu jusqu'ici (161) ; si en effet α est un élément de Σ, et α le nombre de tous les éléments de Σ qui possèdent une seule et même image $\psi(\alpha)$, ce dernier est, en tant qu'élément de $\psi(\Sigma)$, souvent encore considéré comme le représentant de α éléments, qui peuvent être considérés, du moins quant à leur origine, comme distincts les uns des autres, et est compté en conséquence comme élément α-fois dans $\psi(\Sigma)$. On arrive ainsi à la notion, très utile dans de nombreux cas, de systèmes dans lesquels chaque élément est muni d'un certain nombre de *fréquence* qui indique combien de fois le même élément doit être compté comme élément du système. Dans le cas ci-dessus, on dirait par exemple que n est le nombre des éléments de $\psi(\Sigma)$ comptés en ce sens, tandis que le nombre m des éléments réellement différents de ce système coïncide avec le nombre des éléments de T. Des écarts analogues par rapport à la signification primitive d'un terme technique, qui ne sont rien d'autre que des extensions des notions primitives, se présentent très fréquemment en mathématiques ; mais il n'entre pas dans le but de ce traité d'y entrer plus en détail.