Sur le théorème de Pythagore

de Edsger W. Dijkstra

Pour le théorème de Pythagore, je commence à partir de la formulation de Coxeter ("*Introduction to Geometry*", p. 8) :

"Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (les catheti)."

Jouons un peu avec cette formulation. Dans un triangle de côtés a, b, et c - différents de 0 pour que les angles du triangle soient bien définis - on introduit la notation habituelle α, β et γ pour les angles opposés respectifs des côtés. (Nous avons introduit un nom d'angle pour pouvoir exprimer le fait qu'un angle est droit, et les noms des deux autres angles pour des raisons de symétrie.)

Une expression formelle de la formulation de Coxeter est

$$\gamma = \pi/2 \implies a^2 + b^2 = c^2$$

En plus de la notation que nous avons introduite, cette formulation contient la constante (transcendentale !) π. Heureusement, on peut l'éliminer grâce à

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma$$

L'arithmétique élémentaire amène la formulation équivalente

$$\alpha + \beta = \gamma \quad \implies \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

N'est-ce pas joliment symétrique ? Cela suggère immédiatement - au moins à moi - le renforcement

(0) $$\alpha + \beta = \gamma \;\equiv\; a^2 + b^2 = c^2.$$

(Cela s'avèrera être un théorème.) On obtient une formulation équivalente en prenant la négation des deux côtés :

$$\alpha + \beta \neq \gamma \;\equiv\; a^2 + b^2 \neq c^2$$

Mais $x \neq y \;\equiv\; x < y \;\vee\; x > y$, et les termes de cette dernière disjonction sont mutuellement exclusifs. En se rappelant que l'angle le plus grand est opposé au côté le plus grand, il est audacieux d'imaginer

(1) $$\alpha + \beta < \gamma \;\equiv\; a^2 + b^2 < c^2 \qquad \text{et}$$

(2) $$\alpha + \beta > \gamma \;\equiv\; a^2 + b^2 > c^2?$$

Audacieux peut-être, mais pas déraisonnable.

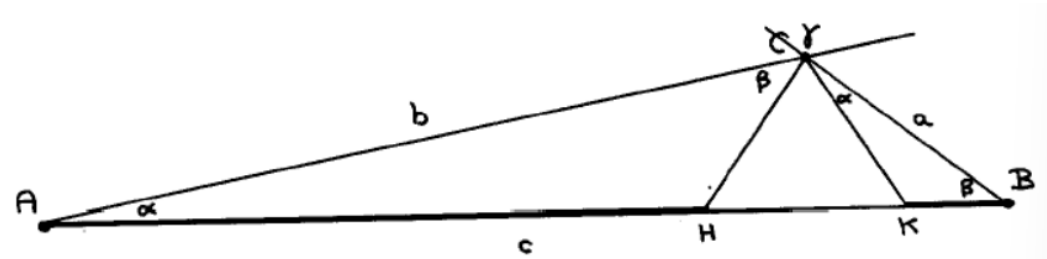
Notons que les assertions (0), (1) et (2) ne sont pas indépendantes : de deux quelconques d'entre elles, la troisième peut être déduite. On peut toutes les formuler en utilisant la fonction sgn - lire "signum" - par

EWD975-0, https://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2009-10-2-094.pdf.
Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2023.

$$\mathrm{sgn}.0 = 0 \quad \wedge (\mathrm{sgn}.x = 1 \quad \equiv \quad x > 0) \wedge (\mathrm{sgn}.x = -1 \quad \equiv \quad x < 0),$$

plus exactement $\quad \mathrm{sgn}.(\alpha + \beta - \gamma) = \mathrm{sgn}.(a^2 + b^2 - c^2)$

Considérons maintenant la figure suivante.



On a dessiné le cas $\alpha + \beta < \gamma$, dans lequel les triangles ΔCKB et ΔAHC, d'aires disjointes, ne couvrent pas l'entièreté de ΔACB ; en notant "XYZ" l'aire de ΔXYZ, on a dans ce cas

$$CKB + AHC < ACB$$

Dans le cas $\alpha + \beta = \gamma$, H et K coïncident et on a

$$CKB + AHC = ACB$$

et dans le cas $\alpha + \beta > \gamma$, les deux triangles se chevauchent et on a

$$CKB + AHC > ACB$$

En résumé

$$\mathrm{sgn}.(\alpha + \beta - \gamma) = \mathrm{sgn}.(CKB + AHC - ACB).$$

Les trois aires sur le côté droit sont celles de triangles semblables et par conséquent, elles sont dans les mêmes ratios que les carrés des segments correspondant, en particulier

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ACB}{c^2} > 0 \ \ ;$$

donc

$$\mathrm{sgn}.(CKB + AHC - ACB) = \mathrm{sgn}.(a^2 + b^2 - c^2).$$

Par conséquent, on a prouvé

$$\mathrm{sgn}.(\alpha + \beta - \gamma) = \mathrm{sgn}.(a^2 + b^2 - c^2)$$

un théorème, disons, 4 fois plus riche que celui que nous avions cité de Coxeter.

* *
*

Le titre de cette note peut faire se demander "Pourquoi perdrais-je mon temps à fouetter un cheval aussi mort que le théorème de Pythagore ?". Donc essayons de résumer ce que nous pourrions apprendre de cet exercice.

- Trois hourras pour la formalisation ! Au lieu d'entreprendre de prouver $a^2 + b^2 = c^2$ pour un triangle rectangle, on a inclus l'antécédent $\gamma = \pi/2$ dans l'énoncé formel de ce qui était à démontrer. C'est seulement après l'introduction de π qu'on a pu l'éliminer et rencontrer la formulation "joliment symétrique".

- Trois hourras pour l'équivalence ! Il semble assez clair que le théorème n'est pas à propos des triangles rectangles, mais à propos des triangles en général.

- Trois hourras pour les avantages de notation qu'offre la fonction sgn. Si on n'avait pas fait attention, on aurait fini par prouver

$$(\alpha + \beta)\ \underline{\mathrm{R}}\ \gamma \quad \equiv \quad (a^2 + b^2)\ \underline{\mathrm{R}}\ c^2$$

  pour $\underline{\mathrm{R}}$ n'importe laquelle des six relations $=, \neq, <, \leq, >$ and $\geq$.

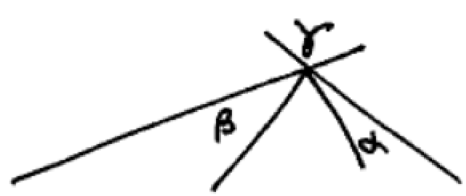
- Aucun hourra du tout pour cette étape de l'argumentation dans laquelle le manque d'axiomatisation nous a forcés à recourir à un dessin. Les dessins sont presque inévitablement ultra-spécifiques et nous forcent souvent à une analyse de cas. Notons que j'ai soigneusement évité les dessins pour $\alpha + \beta > \gamma$; il y en a 9 : K à droite de A, coïncidant avec A, et à gauche de A, et similairement pour la paire H et B. Pour l'argumentation, ces distinctions sont non pertinentes mais, quand on dessine, on peut difficilement les éviter.

- Un de ces jours, j'aimerais trouver une explication convaincante du fait que l'on continue d'éduquer les jeunes avec le théorème de Pythagore dans sa forme diluée telle que celle fournie par Coxeter. Notons que les 9 figures auraient pu être évitées en démontrant également

$$\begin{array}{lll} CKB + AHC < ACB & \implies \alpha + \beta < \gamma & \qquad\qquad \text{et} \\ CKB + AHC = ACB & \implies \alpha + \beta = \gamma \ , & \end{array}$$

  i.e. en prouvant (0) et (1) en entier.

- Notons que notre figure <u>n'est pas</u> sortie d'un chapeau de magicien ! Dès que sgn.$(\alpha + \beta - \gamma)$ apparaît dans la démonstration, il est doucement raisonnable de construire cette différence. Pour ne pas détruire la symétrie entre α et β, on commence avec γ et on soustrait α d'un côté et β de l'autre :



  et ceci est le germe de la figure que nous avons dessinée.

<u>Épilogue</u>. Je suis dans une situation paradoxale. Je suis convaincu que parmi les personnes qui connaissent le théorème de Pythagore, presqu'aucune ne peut lire ce qui a précédé sans être surpris au moins une fois. De plus, je pense que toutes ces surprises sont pertinentes (parce qu'elles

témoignent de leur éducation au raisonnement). Pourtant, je ne connais pas un seul journal respectable dans lequel je pourrais fouetter ce cheval mort.

Austin, 7 septembre 1986

Prof. Dr. Edsger W. Dijkstra
Département d'Informatique
Université du Texas à Austin
Austin, TX 78712-1188 , USA.