

Dans le quatrième article de Slepian¹ dédié aux fonctions d'ondes sphéroïdales prolates, on trouve cette phrase de David Slepian, en fin d'article avant l'annexe, de remerciement à l'informaticienne Estelle Sonnenblick qui a procédé aux calculs. Voici la traduction en français de leur article.

I am indebted to Mrs. E. Sonnenblick for programming and carrying out the computations reported here.

Valeurs propres associées aux fonctions d'onde sphéroïdales prolates d'ordre zéro
David Slepian, Estelle Sonnenblick
(Manuscrit reçu le 10 juin 1965)

Résumé. *Sont présentées ici les tables des valeurs de χ_n et λ_n , des quantités définies par les problèmes de valeurs propres*

$$(1 - x^2)\psi_n'' - 2x\psi_n' + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0$$

et

$$\lambda_n\psi_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)}\psi_n(y)dy.$$

De plus, quelques approximations de ces quantités sont données et évaluées.

Les fonctions sphéroïdales prolates d'ordre zéro, $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, sont les solutions continues bornées des deux équations l'une différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2\psi_n}{dx^2} - 2x\frac{d\psi_n}{dx} + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0$$

et l'autre intégrale

$$\lambda_n\psi_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)}\psi_n(y)dy.$$

L'importance de ces fonctions et des valeurs propres correspondantes χ_n et λ_n pour une grande variété de problèmes, traitant de sujets si divers que les lasers, la théorie de la communication, l'optique, la théorie du bruit, etc., peuvent être trouvées dans les articles [1] et [2] en bibliographie. Notre but ici, en réponse à de nombreuses requêtes, est de présenter quelques valeurs numériques de ces valeurs propres.

¹Voir D. Slepian et H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I*, Bell Syst. Tech. J. 40, no. 1, pp. 43-63 (1961) lien, H.J. Landau et H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II*, Bell Syst. Tech. J. 40, no. 1, pp. 65-84 (1961) lien, H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, The Dimension of the Space of Essentially Time- and Band-Limited*, Bell Syst. Tech. J. 41, no. 4, pp. 1295-1336 (1962) lien, D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty IV : Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions*, Bell Syst. Tech. J. 43, no. 6, pp. 3009-3057 (1964) lien et *Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty - V : the discrete case*, Bell Syst. Tech. J. vol. 57, no. 5, pp. 1371-1430 (1978) lien.

Les Tables I et II listent les valeurs de χ_n et λ_n pour $n = 0(1)20(5)40$ et $c = 0(1)20(5)40$. Les valeurs données sont, selon nous, précises pour les huit figures listées². Les résultats des calculs sont montrés graphiquement sur les figures Fig. 1-4.

Les valeurs de χ_n ont été obtenues en utilisant la méthode de Bouwkamp comme cela est expliqué par exemple dans le livre de Flammer [1]. Le calcul fournit également les coefficients d'expansion $d_r^{0n}(c)$ dans la notation de Flammer, dont la quantité $R_{0n}^{(1)}(c, 1)$ peut être calculée. Les λ ont été trouvés par la formule

$$\lambda_n = \frac{2c}{\pi} [R_{0n}^{(1)}(c, 1)]^2.$$

Les tables présentées ont nécessité 0.027 heures de calcul sur un IBM 7090.

Les formules suivantes pour λ_n et χ_n sont données dans la référence [2]. Pour de petites valeurs de n et c :

$$(1) \quad \lambda_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2^{2n}(n!)^3}{(2n)!(2n+1)!} \right]^2 c^{2n+1} \cdot \left[1 - \frac{(2n+1)c^2}{(2n-1)^2(2n+3)^2} + O(c^4) \right].$$

Pour n fixé et c grand

$$(2) \quad 1 - \lambda_n = \frac{2^{3n+2} \sqrt{\pi} c^{n+\frac{1}{2}} e^{-2c}}{n!} \left[1 - \frac{6n^2 - 2n + 3}{32c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \right].$$

Certaines valeurs calculées à partir des termes explicitement fournis en (1) et (2) sont représentées par les lignes en pointillés sur les figures Fig. 3 et Fig. 4.

Pour n et c grands tous les deux, on a le résultat suivant. Soit b fixé et posons

$$(3) \quad n = \left[\frac{2}{\pi} (c + b \ln 2\sqrt{c}) \right]$$

où les crochets dénotent la "partie entière de". Alors

$$(4) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \lambda_n = (1 + e^{\pi b})^{-1}.$$

²La notation $E \pm XY$ après une entrée dans les tables indique que l'entrée doit être multipliée par 10 où XY est un entier en notation décimale, par exemple $E + 03$ dénote un facteur de 10^3 .

TABLE I— χ_n

χ_n	1.	2.	3.	4.	5.	6.
0	3.1900006E - 01	1.1277341E + 00	2.1367322E + 00	3.1720674E + 00	4.1951289E + 00	5.2082692E + 00
1	2.5930846E + 00	4.2871285E + 00	6.8208883E + 00	9.8059438E + 00	1.2911703E + 01	1.6000443E + 01
2	6.5334718E + 00	8.2257130E + 00	1.1192939E + 01	1.5306300E + 01	2.0176915E + 01	2.5356479E + 01
3	1.2514462E + 01	1.4100204E + 01	1.6889030E + 01	2.1048961E + 01	2.6587360E + 01	3.3204199E + 01
4	2.0508274E + 01	2.2054830E + 01	2.4708535E + 01	2.8596855E + 01	3.3897096E + 01	4.0720194E + 01
5	3.0505405E + 01	3.2035263E + 01	3.4631281E + 01	3.8367138E + 01	4.3358996E + 01	4.9773712E + 01
6	4.2503818E + 01	4.4024748E + 01	4.6591428E + 01	5.0252698E + 01	5.5080962E + 01	6.1180757E + 01
7	5.6502845E + 01	5.8018371E + 01	6.0567636E + 01	6.4186116E + 01	6.8924773E + 01	7.4852867E + 01
8	7.2502203E + 01	7.4014194E + 01	7.6552100E + 01	8.0143235E + 01	8.4825931E + 01	9.0651159E + 01
9	9.0501757E + 01	9.2011304E + 01	9.4541490E + 01	9.8113806E + 01	1.0275858E + 02	1.0851545E + 02
10	1.1050143E + 02	1.1200922E + 02	1.1453381E + 02	1.1809267E + 02	1.2271039E + 02	1.2841888E + 02
11	1.3250119E + 02	1.3400766E + 02	1.3652809E + 02	1.4007696E + 02	1.4467463E + 02	1.5034744E + 02
12	1.5650101E + 02	1.5800647E + 02	1.6052372E + 02	1.6406496E + 02	1.6864733E + 02	1.7429300E + 02
13	1.8250086E + 02	1.8400554E + 02	1.8652029E + 02	1.9005557E + 02	1.9462601E + 02	2.0025051E + 02
14	2.1050075E + 02	2.1200480E + 02	2.1451756E + 02	2.1804808E + 02	2.2260902E + 02	2.2821669E + 02
15	2.4050065E + 02	2.4200419E + 02	2.4451535E + 02	2.4804202E + 02	2.5259526E + 02	2.5818931E + 02
16	2.7250058E + 02	2.7400370E + 02	2.7651353E + 02	2.8003704E + 02	2.8458396E + 02	2.9016684E + 02
17	3.0650051E + 02	3.0800328E + 02	3.1051202E + 02	3.1403289E + 02	3.1857456E + 02	3.2414815E + 02
18	3.4250046E + 02	3.4400294E + 02	3.4651075E + 02	3.5002941E + 02	3.5456666E + 02	3.6013245E + 02
19	3.8050041E + 02	3.8200264E + 02	3.8450967E + 02	3.8802645E + 02	3.9255996E + 02	3.9811912E + 02
20	4.2050037E + 02	4.2200239E + 02	4.2450874E + 02	4.2802392E + 02	4.3255422E + 02	4.3810771E + 02
25	6.5050024E + 02	6.5200154E + 02	6.5450564E + 02	6.5801543E + 02	6.6253497E + 02	6.6806946E + 02
30	9.3050017E + 02	9.3200108E + 02	9.3450394E + 02	9.3801078E + 02	9.4252442E + 02	9.4804850E + 02
35	1.2605001E + 03	1.2620008E + 03	1.2645029E + 03	1.2680079E + 03	1.2725180E + 03	1.2780358E + 03
40	1.6405001E + 03	1.6420006E + 03	1.6445022E + 03	1.6480061E + 03	1.6525138E + 03	1.6580275E + 03

TABLE I—

χ_n	7.	8.	9.	10.	11.	12.
0	6.2162529E + 00	7.2215789E + 00	8.2254064E + 00	9.2283043E + 00	1.0230581E + 01	1.1232421E + 01
1	1.9056678E + 01	2.2092154E + 01	2.5116120E + 01	2.8133464E + 01	3.1146682E + 01	3.4157135E + 01
2	3.0560201E + 01	3.5706417E + 01	4.0802950E + 01	4.5868953E + 01	5.0916879E + 01	5.5953514E + 01
3	4.0405727E + 01	4.7757099E + 01	5.5051178E + 01	6.2257700E + 01	6.9401323E + 01	7.6505824E + 01
4	4.8910585E + 01	5.8016770E + 01	6.7500818E + 01	7.6993289E + 01	8.6369707E + 01	9.5638659E + 01
5	5.7777751E + 01	6.7364750E + 01	7.8205025E + 01	8.9739267E + 01	1.0144734E + 02	1.1305411E + 02
6	6.8701439E + 01	7.7825223E + 01	8.8658000E + 01	1.0103543E + 02	1.1446976E + 02	1.2835139E + 02
7	8.2064637E + 01	9.0691430E + 01	1.0090790E + 02	1.1288107E + 02	1.2660565E + 02	1.4174147E + 02
8	9.7684571E + 01	1.0601169E + 02	1.1574796E + 02	1.2705083E + 02	1.4010628E + 02	1.5502454E + 02
9	1.1543428E + 02	1.2357716E + 02	1.3302232E + 02	1.4387201E + 02	1.5626473E + 02	1.7038033E + 02
10	1.3525788E + 02	1.4327579E + 02	1.5253134E + 02	1.6309665E + 02	1.7506323E + 02	1.8855245E + 02
11	1.5712799E + 02	1.6505554E + 02	1.7417688E + 02	1.8454762E + 02	1.9623470E + 02	2.0932095E + 02
12	1.8102925E + 02	1.8888879E + 02	1.9791014E + 02	2.0813839E + 02	2.1962634E + 02	2.3243647E + 02
13	2.0695232E + 02	2.1475915E + 02	2.2370349E + 02	2.3382295E + 02	2.4516097E + 02	2.5776775E + 02
14	2.3489114E + 02	2.4265622E + 02	2.5153975E + 02	2.6157378E + 02	2.7279496E + 02	2.8524510E + 02
15	2.6484166E + 02	2.7257305E + 02	2.8140764E + 02	2.9137313E + 02	3.0250101E + 02	3.1482692E + 02
16	2.9680105E + 02	3.0450484E + 02	3.1329940E + 02	3.2320895E + 02	3.3426093E + 02	3.4648622E + 02
17	3.3076730E + 02	3.3844819E + 02	3.4720956E + 02	3.5707281E + 02	3.6806210E + 02	3.8020452E + 02
18	3.6673895E + 02	3.7440061E + 02	3.8313413E + 02	3.9295859E + 02	4.0389544E + 02	4.1596869E + 02
19	4.0471489E + 02	4.1236024E + 02	4.2107018E + 02	4.3086179E + 02	4.4175430E + 02	4.5376914E + 02
20	4.4469430E + 02	4.5232571E + 02	4.6101548E + 02	4.7077902E + 02	4.8163367E + 02	4.9359870E + 02
25	6.7462529E + 02	6.8220999E + 02	6.9083226E + 02	7.0050200E + 02	7.1123026E + 02	7.2302932E + 02
30	9.5458747E + 02	9.6214660E + 02	9.7073194E + 02	9.8035039E + 02	9.9100965E + 02	1.0027182E + 03
35	1.2845645E + 03	1.2921081E + 03	1.3006711E + 03	1.3102584E + 03	1.3208759E + 03	1.3325297E + 03
40	1.6645496E + 03	1.6720830E + 03	1.6806314E + 03	1.6901985E + 03	1.7007886E + 03	1.7124067E + 03

TABLE I—

$\frac{c}{m}$	13.	14.	15.	16.	17.	18.
0	1.2233939E + 01	1.3235214E + 01	1.4236300E + 01	1.5237237E + 01	1.6238054E + 01	1.7238772E + 01
1	3.7165631E + 01	4.0172681E + 01	4.3178630E + 01	4.6183721E + 01	4.9188129E + 01	5.2191983E + 01
2	6.0982596E + 01	6.6006328E + 01	7.1026104E + 01	7.6042858E + 01	8.1057244E + 01	8.6069739E + 01
3	8.3585719E + 01	9.0649230E + 01	9.7701181E + 01	1.0474459E + 02	1.1178148E + 02	1.1881324E + 02
4	1.0483494E + 02	1.1398465E + 02	1.2310348E + 02	1.3220071E + 02	1.4128205E + 02	1.5035127E + 02
5	1.2450713E + 02	1.3584050E + 02	1.4709398E + 02	1.5829441E + 02	1.6945806E + 02	1.8059490E + 02
6	1.4223009E + 02	1.5593166E + 02	1.6945804E + 02	1.8285785E + 02	1.9617229E + 02	2.0942797E + 02
7	1.5768187E + 02	1.7382917E + 02	1.8983663E + 02	2.0562050E + 02	2.2121898E + 02	2.3668721E + 02
8	1.7164637E + 02	1.8946449E + 02	2.0780930E + 02	2.2615098E + 02	2.4425790E + 02	2.6211708E + 02
9	1.8639078E + 02	2.0430123E + 02	2.2377440E + 02	2.4417004E + 02	2.6481922E + 02	2.8529987E + 02
10	2.0372711E + 02	2.2077813E + 02	2.3982549E + 02	2.6072449E + 02	2.8296138E + 02	3.0581686E + 02
11	2.2391335E + 02	2.4015533E + 02	2.5823139E + 02	2.7832097E + 02	3.0044546E + 02	3.2428066E + 02
12	2.4664450E + 02	2.6234574E + 02	2.7966575E + 02	2.9877161E + 02	3.1985976E + 02	3.4306306E + 02
13	2.7170195E + 02	2.8703335E + 02	3.0384785E + 02	3.2225590E + 02	3.4240470E + 02	3.6448308E + 02
14	2.9897207E + 02	3.1403113E + 02	3.3048712E + 02	3.4841822E + 02	3.6792260E + 02	3.8912905E + 02
15	3.2839115E + 02	3.4323943E + 02	3.5942402E + 02	3.7700550E + 02	3.9605573E + 02	4.1666293E + 02
16	3.5991943E + 02	3.7459944E + 02	3.9056997E + 02	4.0788062E + 02	4.2658830E + 02	4.4675957E + 02
17	3.9353027E + 02	4.0807299E + 02	4.2387018E + 02	4.4096376E + 02	4.5940093E + 02	4.7923537E + 02
18	4.2920498E + 02	4.4363385E + 02	4.5928798E + 02	4.7620357E + 02	4.9442089E + 02	5.1398496E + 02
19	4.6693004E + 02	4.8126322E + 02	4.9679753E + 02	5.1356471E + 02	5.3159977E + 02	5.5094143E + 02
20	5.0669542E + 02	5.2094728E + 02	5.3638001E + 02	5.5302178E + 02	5.7090346E + 02	5.9005891E + 02
25	7.3591267E + 02	7.4989504E + 02	7.6499245E + 02	7.8122221E + 02	7.9860305E + 02	8.1715510E + 02
30	1.0154855E + 03	1.0293217E + 03	1.0442378E + 03	1.0602457E + 03	1.0773582E + 03	1.0955890E + 03
35	1.3452267E + 03	1.3589745E + 03	1.3737811E + 03	1.3896552E + 03	1.4066063E + 03	1.4246442E + 03
40	1.7250580E + 03	1.7387482E + 03	1.7534835E + 03	1.7692707E + 03	1.7861168E + 03	1.8040295E + 03

PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS

1749

TABLE I—

$\frac{c}{m}$	19.	20.	25.	30.	35.	40.
0	1.8239408E + 01	1.9239976E + 01	2.4242094E + 01	2.9243472E + 01	3.4244440E + 01	3.9245159E + 01
1	5.5195383E + 01	5.8198404E + 01	7.3209570E + 01	8.8216755E + 01	1.0322177E + 02	1.1822547E + 02
2	9.1080697E + 01	9.6090388E + 01	1.2112584E + 02	1.4614836E + 02	1.7116395E + 02	1.9617538E + 02
3	1.2584090E + 02	1.3286522E + 02	1.6795309E + 02	2.0300813E + 02	2.3804589E + 02	2.7307342E + 02
4	1.5941100E + 02	1.6846310E + 02	2.1364862E + 02	2.5876280E + 02	3.0384036E + 02	3.4889654E + 02
5	1.9171143E + 02	2.0281205E + 02	2.5816358E + 02	3.1337546E + 02	3.6851770E + 02	4.2361994E + 02
6	2.2264133E + 02	2.3582286E + 02	3.0144041E + 02	3.6680477E + 02	4.3204536E + 02	4.9721681E + 02
7	2.5206574E + 02	2.6738042E + 02	3.4341554E + 02	4.1900403E + 02	4.8438749E + 02	5.6965810E + 02
8	2.7978768E + 02	2.9732623E + 02	3.8400598E + 02	4.6991994E + 02	5.5550429E + 02	6.4091212E + 02
9	3.0548786E + 02	3.2541914E + 02	4.2311389E + 02	5.1949088E + 02	6.1535127E + 02	7.1094418E + 02
10	3.2868309E + 02	3.5126388E + 02	4.6061231E + 02	5.6764441E + 02	6.7387820E + 02	7.7971605E + 02
11	3.4916478E + 02	3.7436419E + 02	4.9632769E + 02	6.1429371E + 02	7.3102784E + 02	8.4718535E + 02
12	3.6825795E + 02	3.9493519E + 02	5.2999995E + 02	6.5933191E + 02	7.8673407E + 02	9.1330472E + 02
13	3.867917E + 02	4.1503422E + 02	5.6120901E + 02	7.0262235E + 02	8.4091938E + 02	9.7802077E + 02
14	4.1220822E + 02	4.3736223E + 02	5.8939527E + 02	7.4397983E + 02	8.9349109E + 02	1.0412727E + 03
15	4.3894029E + 02	4.6303801E + 02	6.1457579E + 02	7.8313074E + 02	9.4433551E + 02	1.1029905E + 03
16	4.6847456E + 02	4.9183371E + 02	6.3866220E + 02	8.1963882E + 02	9.9330804E + 02	1.1630922E + 03
17	5.0052914E + 02	5.2335572E + 02	6.6469676E + 02	8.5289508E + 02	1.0402144E + 03	1.2214800E + 03
18	5.3494661E + 02	5.5736402E + 02	6.9431366E + 02	8.8272216E + 02	1.0847715E + 03	1.2780344E + 03
19	5.7163273E + 02	5.9372195E + 02	7.2743245E + 02	9.1079959E + 02	1.1265337E + 03	1.3326043E + 03
20	6.1052541E + 02	6.3234422E + 02	7.6357631E + 02	9.4039863E + 02	1.1648560E + 03	1.3849884E + 03
25	8.3690003E + 02	8.5786114E + 02	9.8185790E + 02	1.1410460E + 03	1.3423987E + 03	1.6007929E + 03
30	1.1149527E + 03	1.1354649E + 03	1.2558699E + 03	1.4079656E + 03	1.5952330E + 03	1.8229611E + 03
35	1.4437796E + 03	1.4640237E + 03	1.5823180E + 03	1.7304322E + 03	1.9106676E + 03	2.1260735E + 03
40	1.8230168E + 03	1.8430874E + 03	1.9600239E + 03	2.1056213E + 03	2.2815621E + 03	2.4899642E + 03

1750 THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, OCTOBER 1965

TABLE II— λ_n

$\frac{c}{\lambda}$ n	1.	2.	3.	4.	5.	6.
0	5.7258178E - 01	8.8055992E - 01	9.7582863E - 01	9.9588549E - 01	9.9935241E - 01	9.9990188E - 01
1	6.2791274E - 02	3.5564063E - 01	7.0996324E - 01	9.1210742E - 01	9.7986456E - 01	9.9606164E - 01
2	1.2374793E - 03	3.5867688E - 02	2.0513868E - 01	5.1905484E - 01	7.9992193E - 01	9.4017339E - 01
3	9.2009770E - 06	1.1522328E - 03	1.8203800E - 02	1.1021099E - 01	3.4356219E - 01	6.4679195E - 01
4	3.7179286E - 08	1.8881549E - 05	7.0814710E - 04	8.8278764E - 03	5.6015851E - 02	2.0734922E - 01
5	9.4914367E - 11	1.9358522E - 07	1.6551244E - 05	3.8129172E - 04	4.1820948E - 03	2.7387166E - 02
6	1.6715716E - 13	1.3660608E - 09	2.6410165E - 07	1.0950871E - 05	1.9330846E - 04	1.9550007E - 03
7	2.1544491E - 16	7.0488855E - 12	3.0737365E - 09	2.2786389E - 07	6.3591502E - 06	9.4848766E - 05
8	2.1207239E - 19	2.7767898E - 14	2.7281307E - 11	3.6065493E - 09	1.5822998E - 07	3.4367833E - 06
9	1.6466214E - 22	8.6266788E - 17	1.9085689E - 13	4.4938297E - 11	3.0917257E - 09	9.7321160E - 08
10	1.0343492E - 25	2.1680119E - 19	1.0797906E - 15	4.5252285E - 13	4.8757393E - 11	2.2189805E - 09
11	5.3650197E - 29	4.4986573E - 22	5.0431156E - 18	3.7603029E - 15	6.3402794E - 13	4.1662263E - 11
12	2.3367231E - 32	7.8382450E - 25	1.9775436E - 20	2.6228187E - 17	6.9173022E - 15	6.5574786E - 13
13	8.6674831E - 36	1.1630367E - 27	6.6033063E - 23	1.5575942E - 19	6.4235507E - 17	8.7803771E - 15
14	2.7709612E - 39	1.4873466E - 30	1.9002929E - 25	7.9711081E - 22	5.1393068E - 19	1.0125783E - 16
15	0.	1.6563614E - 33	4.7620029E - 28	3.5519080E - 24	3.5797463E - 21	1.0163838E - 18
16	0.	1.6207613E - 36	1.0485031E - 30	1.3905716E - 26	2.1905130E - 23	8.9610464E - 21
17	0.	0.	2.0444867E - 33	4.8210691E - 29	1.1869344E - 25	6.9950907E - 23
18	0.	0.	3.5551880E - 36	1.4905449E - 31	5.7350388E - 28	4.8687451E - 25
19	0.	0.	5.5475853E - 39	4.1352414E - 34	2.4864675E - 30	3.0405184E - 27
20	0.	0.	0.	1.0352225E - 36	9.7273155E - 33	1.7132439E - 29
25	0.	0.	0.	0.	0.	0.
30	0.	0.	0.	0.	0.	0.
35	0.	0.	0.	0.	0.	0.
40	0.	0.	0.	0.	0.	0.

PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS

1751

TABLE II—

$\frac{c}{\lambda}$ n	7.	8.	9.	10.	11.	12.
0	9.9998546E - 01	9.9999787E - 01	9.9999969E - 01	9.9999996E - 01	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00
1	9.9929217E - 01	9.9987898E - 01	9.9997999E - 01	9.9999677E - 01	9.9999949E - 01	9.9999992E - 01
2	9.8570806E - 01	9.9700462E - 01	9.9941873E - 01	9.9989273E - 01	9.9998091E - 01	9.9999670E - 01
3	8.6456615E - 01	9.6054568E - 01	9.9039622E - 01	9.9790124E - 01	9.9957158E - 01	9.9991663E - 01
4	4.7705272E - 01	7.4790284E - 01	9.1013316E - 01	9.7445778E - 01	9.9371700E - 01	9.9858732E - 01
5	1.1572386E - 01	3.2027663E - 01	5.9909617E - 01	8.2514635E - 01	9.4136927E - 01	9.8366430E - 01
6	1.3055972E - 02	6.0784427E - 02	1.9693935E - 01	4.4015011E - 01	7.0394130E - 01	8.8175663E - 01
7	9.0657300E - 04	6.1262894E - 03	3.0565075E - 02	1.1232482E - 01	2.9607849E - 01	5.5736081E - 01
8	4.5623948E - 05	4.1825206E - 04	2.8466070E - 03	1.4920175E - 02	6.0370339E - 02	1.8342927E - 01
9	1.7774751E - 06	2.1663088E - 05	1.9230822E - 04	1.3145890E - 03	7.1417030E - 03	3.1054179E - 02
10	5.5526131E - 08	8.9304272E - 07	1.0194316E - 05	8.8213430E - 05	6.0469421E - 04	3.3745471E - 03
11	1.4251398E - 09	3.0137350E - 08	4.3973999E - 07	4.7664454E - 06	4.0395675E - 05	2.7741888E - 04
12	3.0622379E - 11	8.4965846E - 10	1.5795600E - 08	2.1339628E - 07	2.2179166E - 06	1.8475085E - 05
13	5.5928434E - 13	2.0334083E - 11	4.8068821E - 10	8.0707164E - 09	1.0243298E - 07	1.0282524E - 06
14	8.7926605E - 15	4.1852675E - 13	1.2564804E - 11	2.6170188E - 10	4.0455355E - 09	4.8758791E - 08
15	1.2026890E - 16	7.4905020E - 15	2.8533973E - 13	7.3634903E - 12	1.3840557E - 10	1.9981456E - 09
16	1.4445726E - 18	1.1767148E - 16	5.6843266E - 15	1.8159383E - 13	4.1453619E - 12	7.1571886E - 11
17	1.5359357E - 20	1.6358709E - 18	1.0016699E - 16	3.9589753E - 15	1.0966649E - 13	2.2619074E - 12
18	1.4559023E - 22	2.0270123E - 20	1.5727550E - 18	7.6870812E - 17	2.5823710E - 15	6.3575326E - 14
19	1.2380854E - 24	2.2529462E - 22	2.2145250E - 20	1.3380681E - 18	5.4488496E - 17	1.6002320E - 15
20	9.4989023E - 27	2.2588880E - 24	2.8123556E - 22	2.1001719E - 20	1.0363386E - 18	3.6290304E - 17
25	6.3410693E - 38	5.7412040E - 35	2.3265268E - 32	4.9987005E - 30	6.4253487E - 28	5.4015219E - 26
30	0.	0.	0.	0.	5.4863023E - 38	1.1037482E - 35
35	0.	0.	0.	0.	0.	0.
40	0.	0.	0.	0.	0.	0.

1752 THE BELT SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, OCTOBER 1965

TABLE II—

$c =$ n	13.	14.	15.	16.	17.	18.
0	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
1	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
2	9.9999944E - 01	9.9999991E - 01	9.9999998E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
3	9.9998436E - 01	9.9999715E - 01	9.9999949E - 01	9.9999991E - 01	9.9999998E - 01	1.0000000E + 00
4	9.9970100E - 01	9.9993948E - 01	9.9998818E - 01	9.9999776E - 01	9.9999958E - 01	9.9999992E - 01
5	9.9595266E - 01	9.9907074E - 01	9.9979787E - 01	9.9995783E - 01	9.9999149E - 01	9.9999833E - 01
6	9.6225505E - 01	9.8963945E - 01	9.9741834E - 01	9.9939756E - 01	9.9986611E - 01	9.9997138E - 01
7	7.8874478E - 01	9.2170099E - 01	9.7594492E - 01	9.9346756E - 01	9.9836416E - 01	9.9961326E - 01
8	4.0633176E - 01	6.6365081E - 01	8.5371077E - 01	9.4900699E - 01	9.8478345E - 01	9.9589845E - 01
9	1.0588399E - 01	2.7254759E - 01	5.1899118E - 01	7.5367260E - 01	9.0120813E - 01	9.6721066E - 01
10	1.5487268E - 02	5.7772021E - 02	1.6922485E - 01	3.7484512E - 01	6.2548476E - 01	8.2543081E - 01
11	1.5807741E - 03	7.5604029E - 03	3.0214721E - 02	9.8343344E - 02	2.5013211E - 01	4.8298471E - 01
12	1.2703997E - 04	7.3609236E - 04	3.6365712E - 03	1.5325905E - 02	5.4203716E - 02	1.5521339E - 01
13	8.4414630E - 06	5.8099164E - 05	3.4130591E - 04	1.7310585E - 03	7.6061834E - 03	2.8698205E - 02
14	4.7534082E - 07	3.8540665E - 06	2.6544166E - 05	1.5775571E - 04	8.1779798E - 04	3.7164510E - 03
15	2.3057257E - 08	2.1923715E - 07	1.7585578E - 06	1.2118149E - 05	7.2740820E - 05	3.8416435E - 04
16	9.7549162E - 10	1.0846150E - 08	1.0092888E - 07	8.0200884E - 07	5.5289258E - 06	3.3476998E - 05
17	3.6359074E - 11	4.7180556E - 10	5.0802489E - 09	4.6393027E - 08	3.6561510E - 07	2.5213492E - 06
18	1.2039857E - 12	1.8208273E - 11	2.2646216E - 10	2.3711707E - 09	2.1297926E - 08	1.6661751E - 07
19	3.5675475E - 14	6.2816688E - 13	9.0124935E - 12	1.0801803E - 10	1.1034773E - 09	9.7669046E - 09
20	9.5186419E - 16	1.9498859E - 14	3.2240722E - 13	4.4178809E - 12	5.1252279E - 11	5.1225654E - 10
25	3.1773164E - 24	1.3781710E - 22	4.5947254E - 21	1.2173462E - 19	2.6337453E - 18	4.7585812E - 17
30	1.4501905E - 33	1.3251429E - 31	8.8515118E - 30	4.4989186E - 28	1.7978779E - 26	5.8040997E - 25
35	0.	0.	0.	3.1590168E - 37	2.3233738E - 35	1.3343537E - 33
40	0.	0.	0.	0.	0.	0.

PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS

1753

TABLE II—

$c =$ n	19.	20.	25.	30.	35.	40.
0	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
1	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
2	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
3	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
4	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
5	9.9999968E - 01	9.9999994E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
6	9.9999408E - 01	9.9999881E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
7	9.9991254E - 01	9.9980993E - 01	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
8	9.9896831E - 01	9.9975345E - 01	9.9999888E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
9	9.9042654E - 01	9.9743251E - 01	9.9999821E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
10	9.3461880E - 01	9.7911569E - 01	9.9997682E - 01	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
11	7.1923718E - 01	8.7971361E - 01	9.9974565E - 01	9.9999983E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
12	3.4534703E - 01	5.8879338E - 01	9.9766185E - 01	9.9999783E - 01	1.0000000E + 00	1.0000000E + 00
13	9.0528307E - 02	2.2898871E - 01	9.8251216E - 01	9.9997547E - 01	9.9999998E - 01	1.0000000E + 00
14	1.4751648E - 02	5.0245996E - 02	9.0214476E - 01	9.9975907E - 01	9.9999980E - 01	1.0000000E + 00
15	1.7952937E - 03	7.4212338E - 03	6.5129574E - 01	9.9796698E - 01	9.9999766E - 01	1.0000000E + 00
16	1.7967267E - 04	8.5983868E - 04	2.9167771E - 01	9.8564508E - 01	9.9997604E - 01	9.9999998E - 01
17	1.5383334E - 05	8.3739541E - 05	7.5468799E - 02	9.2101083E - 01	9.9978298E - 01	9.999978E - 01
18	1.1493460E - 06	7.0600702E - 06	1.3031043E - 02	7.0692287E - 01	9.9828070E - 01	9.9999766E - 01
19	7.5908731E - 08	5.2374892E - 07	1.7588754E - 03	3.5647890E - 01	9.8836235E - 01	9.9997777E - 01
20	4.4748828E - 09	3.4574493E - 08	2.0082884E - 04	1.0627740E - 01	9.3662832E - 01	9.9981076E - 01
25	7.3154280E - 16	9.7203030E - 15	6.7594641E - 10	4.7379571E - 06	5.3273087E - 03	4.8731168E - 01
30	1.5483211E - 23	3.4788064E - 22	2.4882077E - 16	1.3177338E - 11	1.0489720E - 07	1.7876070E - 04
35	6.1447670E - 32	2.3202540E - 30	1.6231560E - 23	5.8407336E - 18	2.5646331E - 13	2.2391506E - 09
40	0.	0.	2.4836333E - 31	5.8205690E - 25	1.3022033E - 19	4.9862021E - 15

THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, OCTOBER 1965

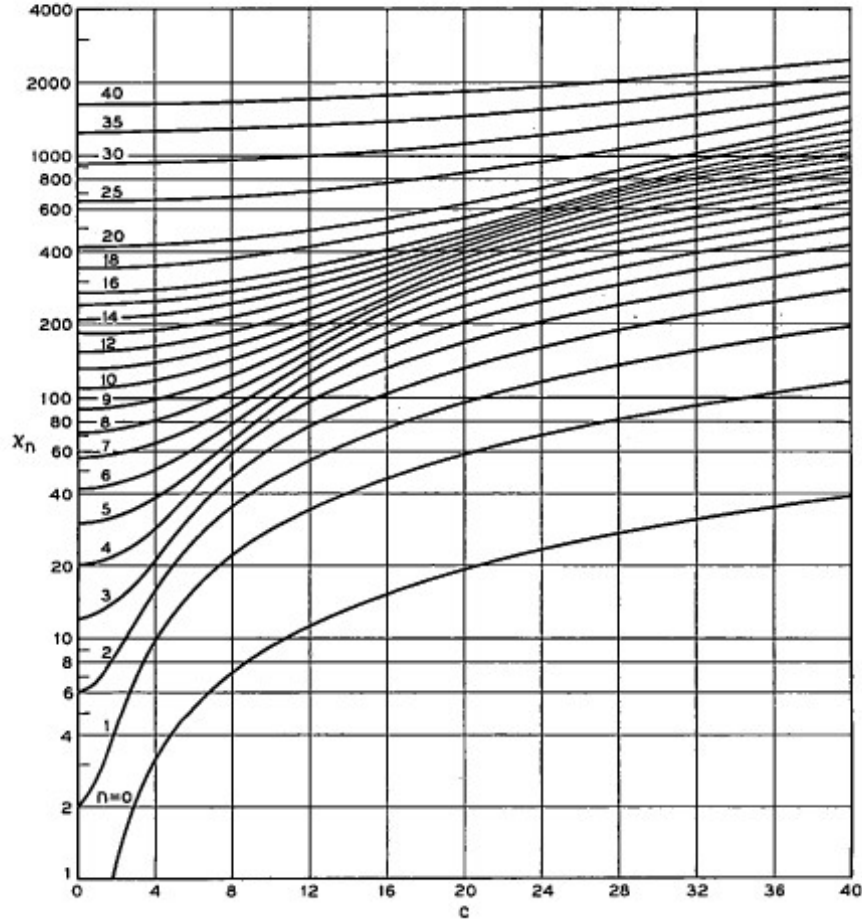


FIG. 1 : valeurs propres, χ_n , de $(1 - x^2)\psi'' - 2x\psi' + (\chi - c^2x^2)\psi = 0$.

Les déductions de (3) et (4) fournies dans [2] suggèrent la formule d'approximation suivante

$$(5) \quad \lambda_n \approx \hat{\lambda}_n = (1 + e^{\pi \hat{b}})^{-1}$$

$$(6) \quad \hat{b} = \frac{n \frac{\pi}{2} - c + \frac{\pi}{4}}{(\gamma/2) + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln c}$$

pour les portions proches de la verticale des courbes de λ_n montrées sur la figure Fig. 2. Ici $\gamma = 0.5772156649$ est la constante d'Euler-Mascheroni. La précision remarquable de cette approximation est montrée sur la Fig. 5. Ici, pour des valeurs fixées de n et b , on a déterminé les valeurs de c à partir de (6) et pour ces valeurs de n et c , on a visualisé $|(\hat{\lambda}/\lambda) - 1|$ par rapport à n . On voit que pour $0.2 \leq \hat{\lambda}_n \leq 0.9$, (5) et (6) fournissent une excellente approximation même pour de petites valeurs de n .

Les formules correspondantes pour les χ_n sont les suivantes. Pour n fixé et c petit :

$$\chi_n = n(n+1) + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right] c^2 + O(c^4)$$

et pour n fixé et c grand :

$$\chi_n = (2n+1)c - \frac{2n^2+2n+3}{4} - \frac{(2n+1)(n^2+n+3)}{16c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Si n et c deviennent grands selon (3) avec b fixé,

$$\chi_n = c^2 + 2bc + \frac{b^2-1}{2} - \frac{b^2-b}{8c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

1756 THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, OCTOBER 1965

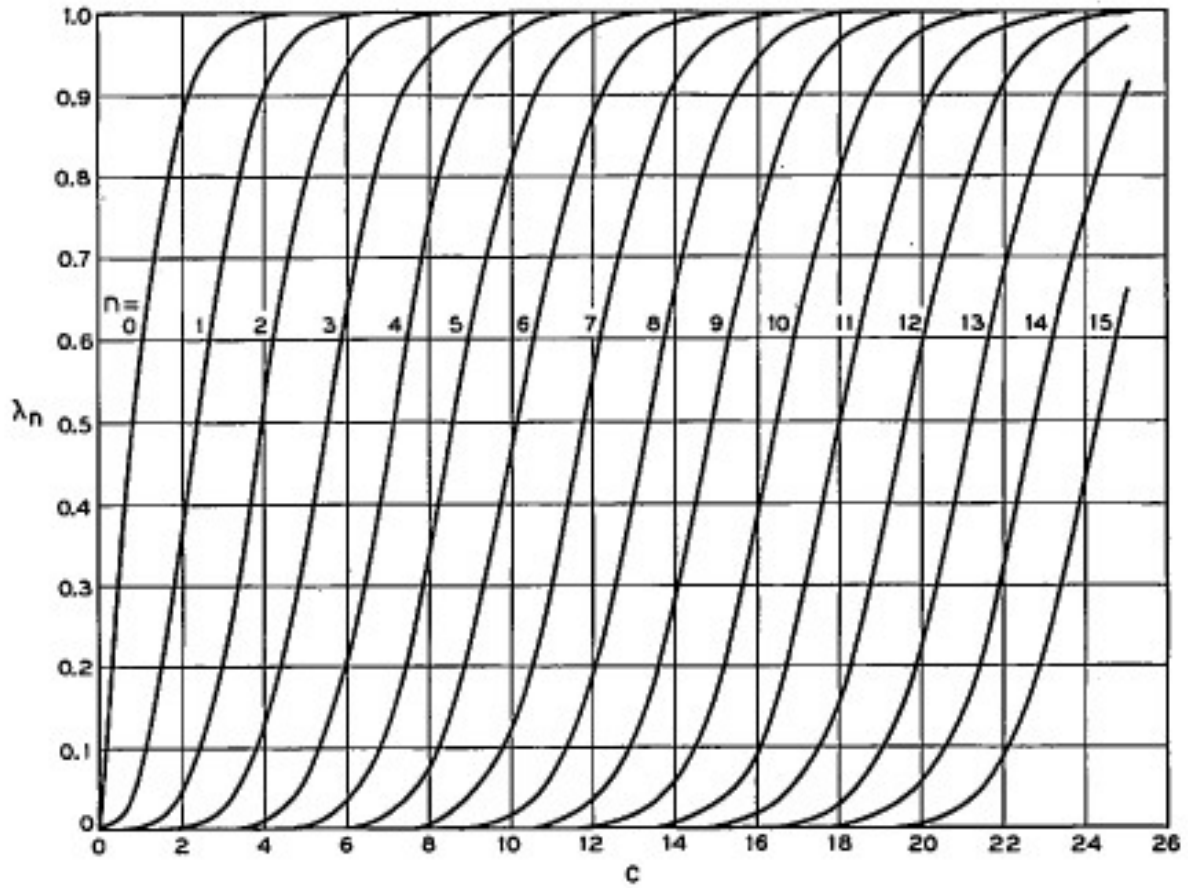


FIG. 2 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale. Échelle linéaire.

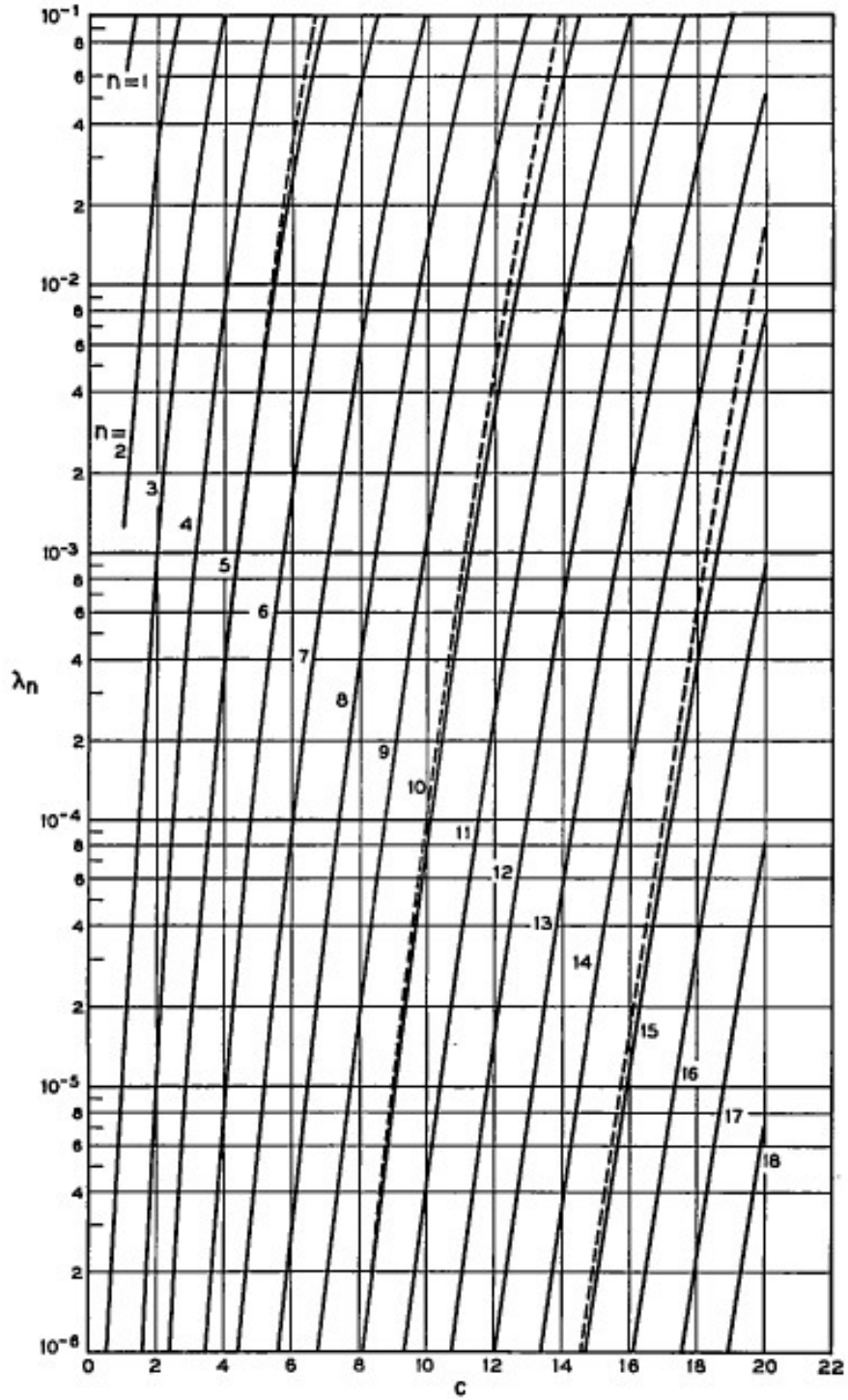


FIG. 3 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale pour $c < n\pi/2$.
Les lignes pointillées sont l'approximation (1).

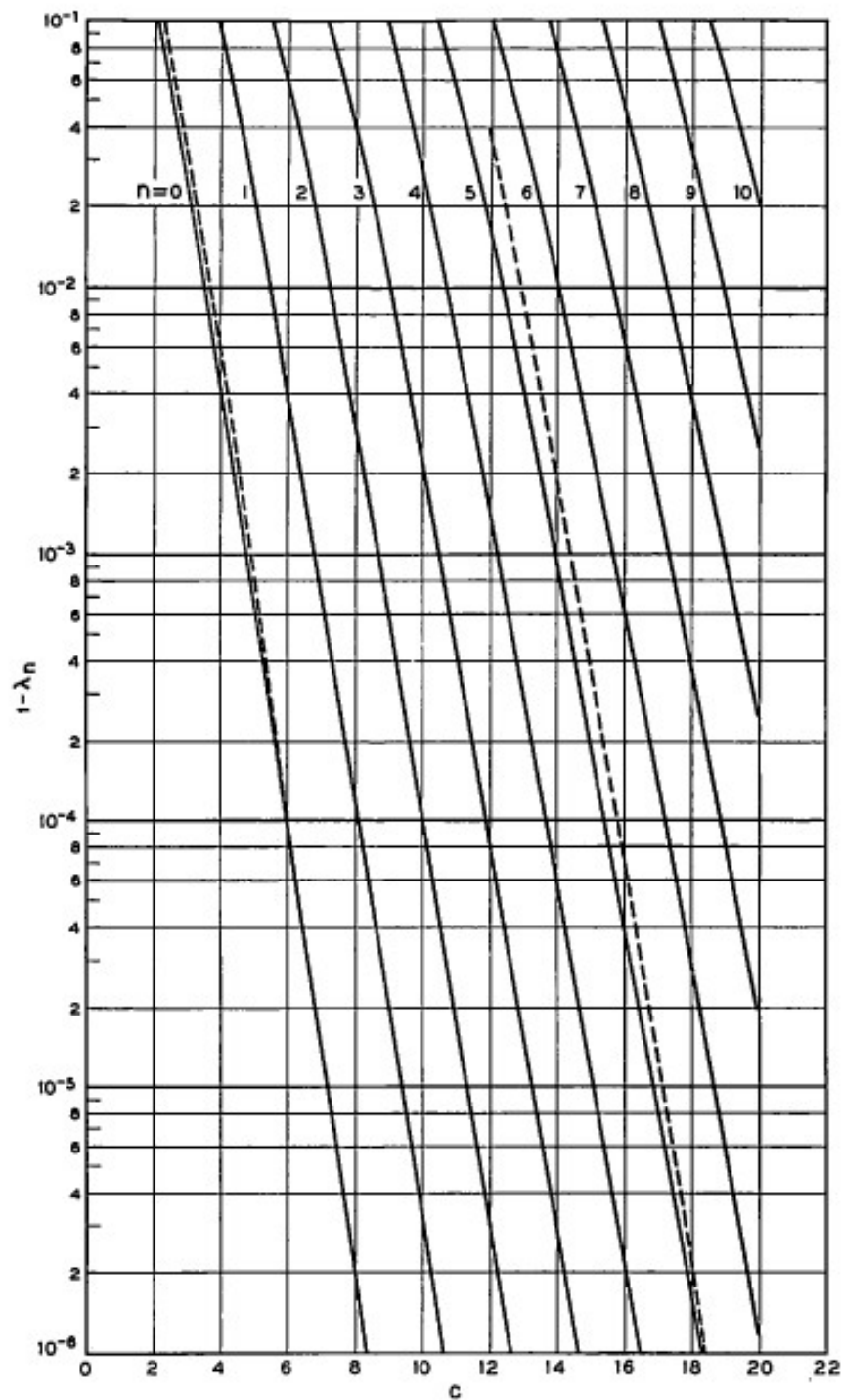


FIG. 4 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale pour $c > n\pi/2$.
Les lignes pointillées sont l'approximation (2).

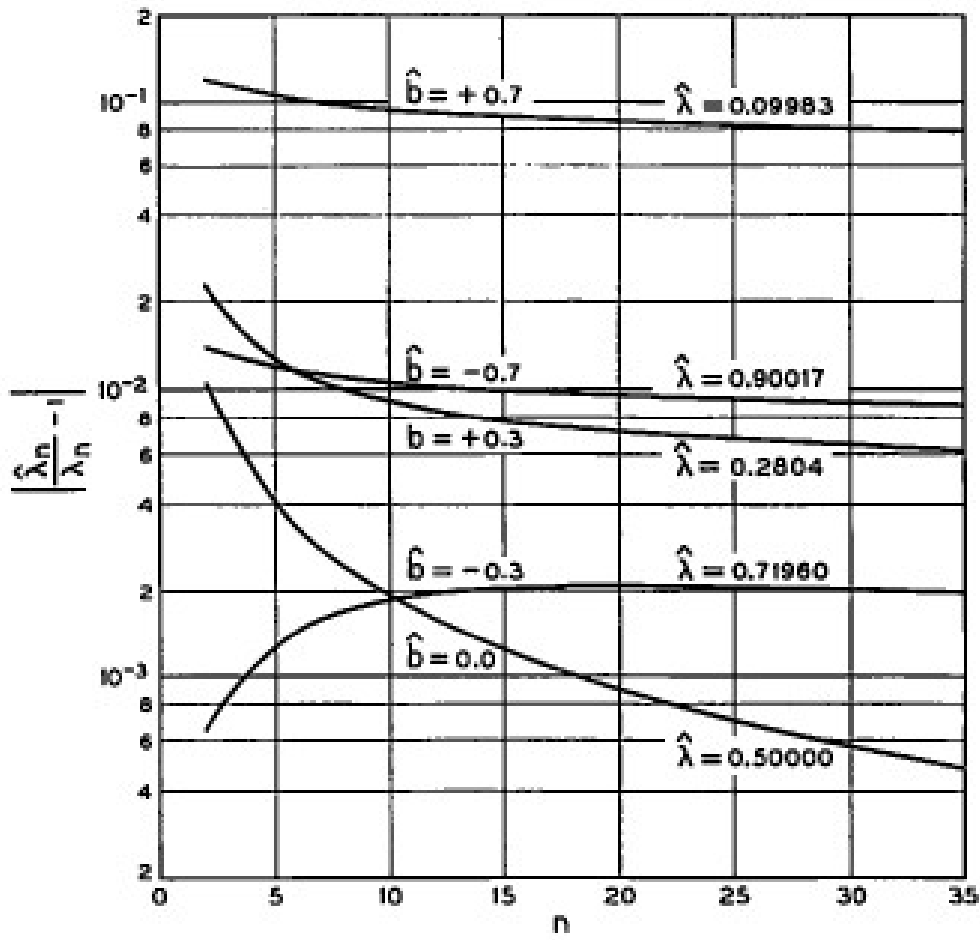


FIG. 5 : précision de l'approximation (5) - (6) pour les valeurs propres λ_n .

Références

- [1] Flammer, C., *Spheroidal Wave Functions*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1957.
- [2] Slepian, D., *Some Asymptotic Expansions for Prolate Spheroidal Wave Functions*, J. Math. and Phys., 44, n° 2, June, 1965, pp. 99-140.

Les χ_n

1.	2.	3.	4.	5.	6.
3.1900006 e - 01	1.1277341 e + 00	2.1367322 e + 00	3.1720674 e + 00	4.1951289 e + 00	5.2082692 e + 00
2.5930846 e + 00	4.2871285 e + 00	6.8208883 e + 00	9.8059438 e + 00	1.2911703 e + 01	1.6000443 e + 01
6.5334718 e + 00	8.2257130 e + 00	1.1192939 e + 01	1.5306300 e + 01	2.0176915 e + 01	2.5356479 e + 01
1.2514462 e + 01	1.4100204 e + 01	1.6889030 e + 01	2.1048961 e + 01	2.6587360 e + 01	3.3204199 e + 01
2.0508274 e + 01	2.2054830 e + 01	2.4708535 e + 01	2.8596855 e + 01	3.3897096 e + 01	4.0720194 e + 01
3.0505405 e + 01	3.2035263 e + 01	3.4631281 e + 01	3.8367138 e + 01	4.3358996 e + 01	4.9773712 e + 01
4.2503818 e + 01	4.4024748 e + 01	4.6591428 e + 01	5.0252698 e + 01	5.5080962 e + 01	6.1180757 e + 01
5.6502845 e + 01	5.8018371 e + 01	6.0567636 e + 01	6.4186116 e + 01	6.8924773 e + 01	7.4852867 e + 01
7.2502203 e + 01	7.4014194 e + 01	7.6552160 e + 01	8.0143235 e + 01	8.4825931 e + 01	9.0651159 e + 01
9.0501757 e + 01	9.2011304 e + 01	9.4541490 e + 01	9.8113806 e + 01	1.0275858 e + 02	1.0851545 e + 02
1.1050143 e + 02	1.1200922 e + 02	1.1453381 e + 02	1.1809267 e + 02	1.2271039 e + 02	1.2841888 e + 02
1.3250119 e + 02	1.3400766 e + 02	1.3652809 e + 02	1.4007696 e + 02	1.4467463 e + 02	1.5034744 e + 02
1.5650101 e + 02	1.5800647 e + 02	1.6052372 e + 02	1.6406496 e + 02	1.6864733 e + 02	1.7429300 e + 02
1.8250086 e + 02	1.8400554 e + 02	1.8652029 e + 02	1.9005557 e + 02	1.9462601 e + 02	2.0025051 e + 02
2.1050075 e + 02	2.1200480 e + 02	2.1451756 e + 02	2.1804808 e + 02	2.2260902 e + 02	2.2821669 e + 02
2.4050065 e + 02	2.4200419 e + 02	2.4451535 e + 02	2.4804202 e + 02	2.5259526 e + 02	2.5818931 e + 02
2.7250058 e + 02	2.7400370 e + 02	2.7651353 e + 02	2.8003704 e + 02	2.8458396 e + 02	2.9016684 e + 02
3.0650051 e + 02	3.0800328 e + 02	3.1051202 e + 02	3.1403289 e + 02	3.1857456 e + 02	3.2414815 e + 02
3.4250046 e + 02	3.4400294 e + 02	3.4651075 e + 02	3.5002941 e + 02	3.5456666 e + 02	3.6013245 e + 02
3.8050041 e + 02	3.8200264 e + 02	3.8450967 e + 02	3.8802645 e + 02	3.9255996 e + 02	3.9811912 e + 02
4.2050037 e + 02	4.2200239 e + 02	4.2450874 e + 02	4.2802392 e + 02	4.3255422 e + 02	4.3810771 e + 02
6.5050024 e + 02	6.5200154 e + 02	6.5450564 e + 02	6.5801543 e + 02	6.6253497 e + 02	6.6806946 e + 02
9.3050017 e + 02	9.3200108 e + 02	9.3450394 e + 02	9.3801078 e + 02	9.4252442 e + 02	9.4804850 e + 02
1.2605001 e + 03	1.2620008 e + 03	1.2645029 e + 03	1.2680079 e + 03	1.2725180 e + 03	1.2780358 e + 03
1.6405001 e + 03	1.6420006 e + 03	1.6445022 e + 03	1.6480061 e + 03	1.6525138 e + 03	1.6580275 e + 03

7.	8.	9.	10.	11.	12.
6.2162529 e + 00	7.2215789 e + 00	8.2254064 e + 00	9.2283043 e + 00	1.0230581 e + 01	1.1232421 e + 01
1.9056678 e + 01	2.2092154 e + 01	2.5116120 e + 01	2.8133464 e + 01	3.1146682 e + 01	3.4157135 e + 01
3.0560201 e + 01	3.5706417 e + 01	4.0802950 e + 01	4.5868953 e + 01	5.0916879 e + 01	5.5953514 e + 01
4.0405727 e + 01	4.7757099 e + 01	5.5051178 e + 01	6.2257700 e + 01	6.9401323 e + 01	7.6505824 e + 01
4.8910585 e + 01	5.8016770 e + 01	6.7500818 e + 01	7.6993289 e + 01	8.6369707 e + 01	9.5638659 e + 01
5.7777751 e + 01	6.7364750 e + 01	7.8205025 e + 01	8.9739267 e + 01	1.0144734 e + 02	1.1305411 e + 02
6.8701439 e + 01	7.7825223 e + 01	8.8658000 e + 01	1.0103543 e + 02	1.1446976 e + 02	1.2835139 e + 02
8.2064637 e + 01	9.0691430 e + 01	1.0090790 e + 02	1.1288107 e + 02	1.2660565 e + 02	1.4174147 e + 02
9.7684571 e + 01	1.0601169 e + 02	1.1574796 e + 02	1.2705083 e + 02	1.4010628 e + 02	1.5502454 e + 02
1.1543428 e + 02	1.2357716 e + 02	1.3302232 e + 02	1.4387201 e + 02	1.5626473 e + 02	1.7038033 e + 02
1.3525788 e + 02	1.4327579 e + 02	1.5253134 e + 02	1.6309665 e + 02	1.7506323 e + 02	1.8855245 e + 02
1.5712799 e + 02	1.6505554 e + 02	1.7417688 e + 02	1.8454762 e + 02	1.9623470 e + 02	2.0932095 e + 02
1.8102925 e + 02	1.8888879 e + 02	1.9791014 e + 02	2.0813839 e + 02	2.1962634 e + 02	2.3243647 e + 02
2.0695232 e + 02	2.1475915 e + 02	2.2370349 e + 02	2.3382295 e + 02	2.4516097 e + 02	2.5776775 e + 02
2.3489114 e + 02	2.4265622 e + 02	2.5153975 e + 02	2.6157378 e + 02	2.7279496 e + 02	2.8524510 e + 02
2.6484166 e + 02	2.7257305 e + 02	2.8140764 e + 02	2.9137313 e + 02	3.0250101 e + 02	3.1482692 e + 02
2.9680105 e + 02	3.0450484 e + 02	3.1329940 e + 02	3.2320895 e + 02	3.3426093 e + 02	3.4648622 e + 02
3.3076730 e + 02	3.3844819 e + 02	3.4720956 e + 02	3.5707281 e + 02	3.6806210 e + 02	3.8020452 e + 02
3.6673895 e + 02	3.7440061 e + 02	3.8313413 e + 02	3.9295859 e + 02	4.0389544 e + 02	4.1596869 e + 02
4.0471489 e + 02	4.1236024 e + 02	4.2107018 e + 02	4.3086179 e + 02	4.4175430 e + 02	4.5376914 e + 02
4.4469430 e + 02	4.5232571 e + 02	4.6101548 e + 02	4.7077902 e + 02	4.8163367 e + 02	4.9359870 e + 02
6.7462529 e + 02	6.8220999 e + 02	6.9083226 e + 02	7.0050200 e + 02	7.1123026 e + 02	7.2302932 e + 02
9.5458747 e + 02	9.6214660 e + 02	9.7073194 e + 02	9.8035039 e + 02	9.9100965 e + 02	1.0027182 e + 03
1.2845645 e + 03	1.2921081 e + 03	1.3006711 e + 03	1.3102584 e + 03	1.3208759 e + 03	1.3325297 e + 03
1.6645496 e + 03	1.6720830 e + 03	1.6806314 e + 03	1.6901985 e + 03	1.7007886 e + 03	1.7124067 e + 03

13.	14.	15.	16.	17.	18.
1.2233939 e + 01	1.3235214 e + 01	1.4236300 e + 01	1.5237237 e + 01	1.6238054 e + 01	1.7238772 e + 01
3.7165631 e + 01	4.0172681 e + 01	4.3178630 e + 01	4.6183721 e + 01	4.9188129 e + 01	5.2191983 e + 01
6.0982596 e + 01	6.6006328 e + 01	7.1026104 e + 01	7.6042858 e + 01	8.1057244 e + 01	8.6069739 e + 01
8.3585719 e + 01	9.0649230 e + 01	9.7701181 e + 01	1.0474459 e + 02	1.1178148 e + 02	1.1881324 e + 02
1.0483494 e + 02	1.1398465 e + 02	1.2310348 e + 02	1.3220071 e + 02	1.4128205 e + 02	1.5035127 e + 02
1.2450713 e + 02	1.3584050 e + 02	1.4709398 e + 02	1.5829441 e + 02	1.6945806 e + 02	1.8059490 e + 02
1.4223009 e + 02	1.5593166 e + 02	1.6945804 e + 02	1.8285785 e + 02	1.9617229 e + 02	2.0942797 e + 02
1.5768187 e + 02	1.7382917 e + 02	1.8983663 e + 02	2.0562050 e + 02	2.2121898 e + 02	2.3668721 e + 02
1.7164637 e + 02	1.8946449 e + 02	2.0780930 e + 02	2.2615098 e + 02	2.4425790 e + 02	2.6211708 e + 02
1.8639078 e + 02	2.0430123 e + 02	2.2377440 e + 02	2.4417004 e + 02	2.6481922 e + 02	2.8529987 e + 02
2.0372711 e + 02	2.2077813 e + 02	2.3982549 e + 02	2.6072449 e + 02	2.8296138 e + 02	3.0581686 e + 02
2.2391335 e + 02	2.4015533 e + 02	2.5823139 e + 02	2.7832097 e + 02	3.0044546 e + 02	3.2428066 e + 02
2.4664450 e + 02	2.6234574 e + 02	2.7966575 e + 02	2.9877161 e + 02	3.1985976 e + 02	3.4306306 e + 02
2.7170195 e + 02	2.8703335 e + 02	3.0384785 e + 02	3.2225590 e + 02	3.4240470 e + 02	3.6448308 e + 02
2.9897207 e + 02	3.1403113 e + 02	3.3048712 e + 02	3.4841822 e + 02	3.6792260 e + 02	3.8912905 e + 02
3.2839115 e + 02	3.4323943 e + 02	3.5942402 e + 02	3.7700550 e + 02	3.9605573 e + 02	4.1666293 e + 02
3.5991943 e + 02	3.7459944 e + 02	3.9056997 e + 02	4.0788062 e + 02	4.2658830 e + 02	4.4675957 e + 02
3.9353027 e + 02	4.0807299 e + 02	4.2387018 e + 02	4.4096376 e + 02	4.5940093 e + 02	4.7923537 e + 02
4.2920498 e + 02	4.4363385 e + 02	4.5928798 e + 02	4.7620357 e + 02	4.9442089 e + 02	5.1398496 e + 02
4.6693004 e + 02	4.8126322 e + 02	4.9679753 e + 02	5.1356471 e + 02	5.3159977 e + 02	5.5094143 e + 02
5.0669542 e + 02	5.2094728 e + 02	5.3638001 e + 02	5.5302178 e + 02	5.7090346 e + 02	5.9005891 e + 02
7.3591267 e + 02	7.4989504 e + 02	7.6499245 e + 02	7.8122221 e + 02	7.9860305 e + 02	8.1715510 e + 02
1.0154855 e + 03	1.0293217 e + 03	1.0442378 e + 03	1.0602457 e + 03	1.0773582 e + 03	1.0955890 e + 03
1.3452267 e + 03	1.3589745 e + 03	1.3737811 e + 03	1.3896552 e + 03	1.4066063 e + 03	1.4246442 e + 03
1.7250580 e + 03	1.7387482 e + 03	1.7534835 e + 03	1.7692707 e + 03	1.7861168 e + 03	1.8040295 e + 03

19.	20.	25.	30.	35.	40.
1.8239408 e + 01	1.9239976 e + 01	2.4242094 e + 01	2.9243472 e + 01	3.4244440 e + 01	3.9245159 e + 01
5.5195383 e + 01	5.8198404 e + 01	7.3209570 e + 01	8.8216755 e + 01	1.0322177 e + 02	1.1822547 e + 02
9.1080697 e + 01	9.6090388 e + 01	1.2112584 e + 02	1.4614836 e + 02	1.7116395 e + 02	1.9617538 e + 02
1.2584090 e + 02	1.3286522 e + 02	1.6795309 e + 02	2.0300813 e + 02	2.3804589 e + 02	2.7307342 e + 02
1.5941100 e + 02	1.6846310 e + 02	2.1364862 e + 02	2.5876280 e + 02	3.0384036 e + 02	3.4889654 e + 02
1.9171143 e + 02	2.0281205 e + 02	2.5816358 e + 02	3.1337546 e + 02	3.6851770 e + 02	4.2361994 e + 02
2.2264133 e + 02	2.3582286 e + 02	3.0144041 e + 02	3.6680477 e + 02	4.3204536 e + 02	4.9721681 e + 02
2.5206574 e + 02	2.6738042 e + 02	3.4341554 e + 02	4.1900403 e + 02	4.9438749 e + 02	5.6965810 e + 02
2.7978768 e + 02	2.9732623 e + 02	3.8400598 e + 02	4.6991994 e + 02	5.5550429 e + 02	6.4091212 e + 02
3.0548786 e + 02	3.2541914 e + 02	4.2311389 e + 02	5.1949088 e + 02	6.1535127 e + 02	7.1094418 e + 02
3.2868309 e + 02	3.5126388 e + 02	4.6061231 e + 02	5.6764441 e + 02	6.7387820 e + 02	7.7971605 e + 02
3.4916478 e + 02	3.7436419 e + 02	4.9632769 e + 02	6.1429371 e + 02	7.3102784 e + 02	8.4718535 e + 02
3.6825795 e + 02	3.9493519 e + 02	5.2999995 e + 02	6.5933191 e + 02	7.8673407 e + 02	9.1330472 e + 02
3.8867917 e + 02	4.1503422 e + 02	5.6120901 e + 02	7.0262235 e + 02	8.4091938 e + 02	9.7802077 e + 02
4.1220822 e + 02	4.3736223 e + 02	5.8939527 e + 02	7.4397983 e + 02	8.9349109 e + 02	1.0412727 e + 03
4.3894029 e + 02	4.6303801 e + 02	6.1457579 e + 02	7.8313074 e + 02	9.4433551 e + 02	1.1029905 e + 03
4.6847456 e + 02	4.9183371 e + 02	6.3866220 e + 02	8.1963882 e + 02	9.9330804 e + 02	1.1630922 e + 03
5.0052914 e + 02	5.2335572 e + 02	6.6469676 e + 02	8.5289508 e + 02	1.0402144 e + 03	1.2214800 e + 03
5.3494661 e + 02	5.5736402 e + 02	6.9431366 e + 02	8.8272216 e + 02	1.0847715 e + 03	1.2780344 e + 03
5.7163273 e + 02	5.9372195 e + 02	7.2743245 e + 02	9.1079959 e + 02	1.1265337 e + 03	1.3326043 e + 03
6.1052541 e + 02	6.3234422 e + 02	7.6357631 e + 02	9.4039863 e + 02	1.1648560 e + 03	1.3849884 e + 03
8.3690003 e + 02	8.5786114 e + 02	9.8185790 e + 02	1.1410460 e + 03	1.3423987 e + 03	1.6007929 e + 03
1.1149527 e + 03	1.1354649 e + 03	1.2558699 e + 03	1.4079656 e + 03	1.5952330 e + 03	1.8229611 e + 03
1.4437796 e + 03	1.4640237 e + 03	1.5823180 e + 03	1.7304322 e + 03	1.9106676 e + 03	2.1260735 e + 03
1.8230168 e + 03	1.8430874 e + 03	1.9600239 e + 03	2.1056213 e + 03	2.2815621 e + 03	2.4899642 e + 03

Les λ_n

1.	2.	3.	4.	5.	6.
5.7258178 e - 01	8.8055992 e - 01	9.7582863 e - 01	9.9588549 e - 01	9.9935241 e - 01	9.9990188 e - 01
6.2791274 e - 02	3.5564063 e - 01	7.0996324 e - 01	9.1210742 e - 01	9.7986456 e - 01	9.9606164 e - 01
1.2374793 e - 03	3.5867688 e - 02	2.0513868 e - 01	5.1905484 e - 01	7.9992193 e - 01	9.4017339 e - 01
9.2009770 e - 06	1.1522328 e - 03	1.8203800 e - 02	1.1021099 e - 01	3.4356219 e - 01	6.4679195 e - 01
3.7179286 e - 08	1.8881549 e - 05	7.0814710 e - 04	8.8278764 e - 03	5.6015851 e - 02	2.0734922 e - 01
9.4914367 e - 11	1.9358522 e - 07	1.6551244 e - 05	3.8129172 e - 04	4.1820948 e - 03	2.7387166 e - 02
1.6715716 e - 13	1.3660608 e - 09	2.6410165 e - 07	1.0950871 e - 05	1.9330846 e - 04	1.9550007 e - 03
2.1544491 e - 16	7.0488855 e - 12	3.0737365 e - 09	2.2786389 e - 07	6.3591502 e - 06	9.4848766 e - 05
2.1207239 e - 19	2.7767898 e - 14	2.7281307 e - 11	3.6065493 e - 09	1.5822998 e - 07	3.4367833 e - 06
1.6466214 e - 22	8.6266788 e - 17	1.9085689 e - 13	4.4938297 e - 11	3.0917257 e - 09	9.7321160 e - 08
1.0343492 e - 25	2.1680119 e - 19	1.0797906 e - 15	4.5252285 e - 13	4.8757393 e - 11	2.2189805 e - 09
5.3650197 e - 29	4.4986573 e - 22	5.0431156 e - 18	3.7603029 e - 15	6.3402794 e - 13	4.1662263 e - 11
2.3367231 e - 32	7.8382450 e - 25	1.9775436 e - 20	2.6228187 e - 17	6.9173022 e - 15	6.5574786 e - 13
8.6674831 e - 36	1.1630367 e - 27	6.6033063 e - 23	1.5575942 e - 19	6.4235507 e - 17	8.7803771 e - 15
2.7709612 e - 39	1.4873466 e - 30	1.9002929 e - 25	7.9711081 e - 22	5.1393068 e - 19	1.0125783 e - 16
0.	1.6563614 e - 33	4.7620029 e - 28	3.5519080 e - 24	3.5797463 e - 21	1.0163838 e - 18
0.	1.6207613 e - 36	1.0485031 e - 30	1.3905716 e - 26	2.1905130 e - 23	8.9610464 e - 21
0.	0.	2.0444867 e - 33	4.8210691 e - 29	1.1869344 e - 25	6.9950907 e - 23
0.	0.	3.5551880 e - 36	1.4905449 e - 31	5.7350388 e - 28	4.8687451 e - 25
0.	0.	5.5475853 e - 39	4.1352414 e - 34	2.4864675 e - 30	3.0405184 e - 27
0.	0.	0.	1.0352225 e - 36	9.7273155 e - 33	1.7132439 e - 29
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

7.	8.	9.	10.	11.	12.
9.9998546 e - 01	9.9999787 e - 01	9.9999969 e - 01	9.9999996 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00
9.9929217 e - 01	9.9987898 e - 01	9.9997999 e - 01	9.9999677 e - 01	9.9999949 e - 01	9.9999992 e - 01
9.8570806 e - 01	9.9700462 e - 01	9.9941873 e - 01	9.9989273 e - 01	9.9998091 e - 01	9.9999670 e - 01
8.6456615 e - 01	9.6054568 e - 01	9.9039622 e - 01	9.9790124 e - 01	9.9957158 e - 01	9.9991663 e - 01
4.7705272 e - 01	7.4790284 e - 01	9.1013316 e - 01	9.7445778 e - 01	9.9371700 e - 01	9.9858732 e - 01
1.1572386 e - 01	3.2027663 e - 01	5.9909617 e - 01	8.2514635 e - 01	9.4136927 e - 01	9.8366430 e - 01
1.3055972 e - 02	6.0784427 e - 02	1.9693935 e - 01	4.4015011 e - 01	7.0394130 e - 01	8.8175663 e - 01
9.0657300 e - 04	6.1262894 e - 03	3.0565075 e - 02	1.1232482 e - 01	2.9607849 e - 01	5.5736081 e - 01
4.5623948 e - 05	4.1825206 e - 04	2.8466070 e - 03	1.4920175 e - 02	6.0370339 e - 02	1.8342927 e - 01
1.7774751 e - 06	2.1663088 e - 05	1.9230822 e - 04	1.3145890 e - 03	7.1417030 e - 03	3.1054179 e - 02
5.5526131 e - 08	8.9304272 e - 07	1.0194316 e - 05	8.8213430 e - 05	6.0469421 e - 04	3.3745471 e - 03
1.4251398 e - 09	3.0137350 e - 08	4.3973999 e - 07	4.7664454 e - 06	4.0395675 e - 05	2.7741888 e - 04
3.0622379 e - 11	8.4965846 e - 10	1.5795600 e - 08	2.1339628 e - 07	2.2179166 e - 06	1.8475085 e - 05
5.5928434 e - 13	2.0334083 e - 11	4.8068821 e - 10	8.0707164 e - 09	1.0243298 e - 07	1.0282524 e - 06
8.7926605 e - 15	4.1852675 e - 13	1.2564804 e - 11	2.6170188 e - 10	4.0455355 e - 09	4.8758791 e - 08
1.2026890 e - 16	7.4905020 e - 15	2.8533973 e - 13	7.3634903 e - 12	1.3840557 e - 10	1.9981456 e - 09
1.4445726 e - 18	1.1767148 e - 16	5.6843266 e - 15	1.8159383 e - 13	4.1453619 e - 12	7.1571886 e - 11
1.5359357 e - 20	1.6358709 e - 18	1.0016699 e - 16	3.9589753 e - 15	1.0966649 e - 13	2.2619074 e - 12
1.4559023 e - 22	2.0270123 e - 20	1.5727550 e - 18	7.6870812 e - 17	2.5823710 e - 15	6.3575326 e - 14
1.2380854 e - 24	2.2529462 e - 22	2.2145250 e - 20	1.3380681 e - 18	5.4488496 e - 17	1.6002320 e - 15
9.4989023 e - 27	2.2588880 e - 24	2.8123556 e - 22	2.1001719 e - 20	1.0363386 e - 18	3.6290304 e - 17
6.3410693 e - 38	5.7412040 e - 35	2.3265268 e - 32	4.9987005 e - 30	6.4253487 e - 28	5.4015219 e - 26
0.	0.	0.	0.	5.4863023 e - 38	1.1037482 e - 35
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

13.	14.	15.	16.	17.	18.
1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9999944 e - 01	9.9999991 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9998436 e - 01	9.9999715 e - 01	9.9999949 e - 01	9.9999991 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00
9.9970100 e - 01	9.9993948 e - 01	9.9998818 e - 01	9.9999776 e - 01	9.9999958 e - 01	9.9999992 e - 01
9.9595266 e - 01	9.9907074 e - 01	9.9979787 e - 01	9.9995783 e - 01	9.9999149 e - 01	9.9999833 e - 01
9.6225505 e - 01	9.8963945 e - 01	9.9741834 e - 01	9.9939756 e - 01	9.9986611 e - 01	9.9997138 e - 01
7.8874478 e - 01	9.2170099 e - 01	9.7594492 e - 01	9.9346756 e - 01	9.9836416 e - 01	9.9961326 e - 01
4.0633176 e - 01	6.6365081 e - 01	8.5371077 e - 01	9.4900699 e - 01	9.8478345 e - 01	9.9589845 e - 01
1.0588399 e - 01	7.254759 e - 01	5.1899118 e - 01	7.5367260 e - 01	9.0120813 e - 01	9.6721066 e - 01
1.5487268 e - 02	5.7772021 e - 02	1.6922485 e - 01	3.7484512 e - 01	6.2548476 e - 01	8.2543081 e - 01
1.5807741 e - 03	7.5604029 e - 03	3.0214721 e - 02	9.8343344 e - 02	2.5013211 e - 01	4.8298471 e - 01
1.2703997 e - 04	7.3609236 e - 04	3.6365712 e - 03	1.5325905 e - 02	5.4203716 e - 02	1.5521339 e - 01
8.4414630 e - 06	5.8099164 e - 05	3.4130591 e - 04	1.7310585 e - 03	7.6061834 e - 03	2.8698205 e - 02
4.7534082 e - 07	3.8540665 e - 06	2.6544166 e - 05	1.5775571 e - 04	8.1779798 e - 04	3.7164510 e - 03
2.3057257 e - 08	2.1923715 e - 07	1.7585578 e - 06	1.2118149 e - 05	7.2740820 e - 05	3.8416435 e - 04
9.7549162 e - 10	1.0846150 e - 08	1.0092888 e - 07	8.0200884 e - 07	5.5289258 e - 06	3.3476998 e - 05
3.6359074 e - 11	4.7180556 e - 10	5.0802489 e - 09	4.6393027 e - 08	3.6561510 e - 07	2.5213492 e - 06
1.2039857 e - 12	1.8208273 e - 11	2.2646216 e - 10	2.3711707 e - 09	2.1297926 e - 08	1.6661751 e - 07
3.5675475 e - 14	6.2816688 e - 13	9.0124935 e - 12	1.0801803 e - 10	1.1034773 e - 09	9.7669046 e - 09
9.5186419 e - 16	1.9498859 e - 14	3.2240722 e - 13	4.4178809 e - 12	5.1252279 e - 11	5.1225654 e - 10
3.1773164 e - 24	1.3781710 e - 22	4.5947254 e - 21	1.2173462 e - 19	2.6337453 e - 18	4.7585812 e - 17
1.4501905 e - 33	1.3251429 e - 31	8.8515118 e - 30	4.4989186 e - 28	1.7978779 e - 26	5.8040997 e - 25
0.	0.	0.	3.1590168 e - 37	2.3233738 e - 35	1.3343537 e - 33
0.	0.	0.	0.	0.	0.

19.	20.	25.	30.	35.	40.
1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9999968 e - 01	9.9999994 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9999408 e - 01	9.9999881 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9991254 e - 01	9.9998093 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9896831 e - 01	9.9975345 e - 01	9.9999988 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9042654 e - 01	9.9743251 e - 01	9.9999821 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.3461880 e - 01	9.7911569 e - 01	9.9997682 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
7.1923718 e - 01	8.7971361 e - 01	9.9974565 e - 01	9.9999983 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
3.4534703 e - 01	5.8879338 e - 01	9.9766185 e - 01	9.9999783 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.0528307 e - 02	2.2898871 e - 01	9.8251216 e - 01	9.9997547 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00
1.4751648 e - 02	5.0245996 e - 02	9.0214476 e - 01	9.9975907 e - 01	9.9999980 e - 01	1.0000000 e + 00
1.7952937 e - 03	7.4212338 e - 03	6.5129574 e - 01	9.9796698 e - 01	9.9999766 e - 01	1.0000000 e + 00
1.7967267 e - 04	8.5983868 e - 04	2.9167771 e - 01	9.8564508 e - 01	9.9997604 e - 01	9.9999998 e - 01
1.5383334 e - 05	8.3739541 e - 05	7.5468799 e - 02	9.2101083 e - 01	9.9978298 e - 01	9.9999978 e - 01
1.1493460 e - 06	7.0600702 e - 06	1.3031043 e - 02	7.0692287 e - 01	9.9828070 e - 01	9.9999766 e - 01
7.5908731 e - 08	5.2374892 e - 07	1.7588754 e - 03	3.5647890 e - 01	9.8836235 e - 01	9.9997777 e - 01
4.4748828 e - 09	3.4574493 e - 08	2.0082884 e - 04	1.0627740 e - 01	9.3662832 e - 01	9.9981076 e - 01
7.3154280 e - 16	9.7203030 e - 15	6.7594641 e - 10	4.7379571 e - 06	5.3273087 e - 03	4.8731168 e - 01
1.5483211 e - 23	3.4788064 e - 22	2.4882077 e - 16	1.3177338 e - 11	1.0489720 e - 07	1.7876070 e - 04
6.1447670 e - 32	2.3202540 e - 30	1.6231560 e - 23	5.8407336 e - 18	2.5646331 e - 13	2.2391506 e - 09
0.	0.	2.4836333 e - 31	5.8205690 e - 25	1.3022033 e - 19	2.2391506 e - 09