

S'inscrire dans le temps très long, ou petites traductions latines des Correspondances EULER-BERNOULLI-GOLDBACH¹

[7 mars 1739 : JEAN BERNOULLI PÈRE à EULER]

[p. 15 Fuss Communic. savants vol. 1]

Je suis en train de revoir certaines des dissertations de Jurin, dont la dernière s'en prend maladroitement aux Défenseurs du Vivant et, en effet, à moi-même, mais à laquelle ma *Dissertatio De vera notione virium vivarumque earum usu in Dynamicis* a été immédiatement soumise, comme si j'avais écrit un ouvrage dédié à la réfutation de la dissertation précédente de Jurin, alors même que je n'ai pas encore appris de Jurin que quoi que ce soit ait été écrit sur le sujet.

J'ai en outre perçu que vous avez trouvé un moyen de sommer une série de fractions $\sum \frac{1}{n^2}$ etc. dont les dénominateurs se procèdent comme les carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., ce qui était autrefois insondable pour mon frère Jacques, comme il l'admet lui-même dans son *Tractatus de seriebus infinitis* p. 254 ; car vous avez trouvé la somme de cette série $\frac{\pi^2}{6}$, à savoir en nommant le diamètre du cercle = 1, et sa circonférence c ; Mon cher Daniel voulait en rechercher la source, mais sans succès. Pourtant, dans vos dernières lettres, vous lui avez révélé quelque chose à ce sujet, si je ne m'abuse, lorsqu'il m'a parlé pour la première fois de la somme que vous aviez trouvée, et de rien d'autre. J'en ai déduit que la somme de la série se réduisait à la quadrature du cercle. Curieux de savoir où chercher l'analyse, bientôt, moi-même, par mon propre Mars², j'ai découvert tout le mystère, en m'appuyant sur un théorème très élégant de Newton, qui figure sans démonstration dans son ouvrage "*Algèbre*", p. 251, édition de Londres, 1707, mais dont j'ai également trouvé la démonstration. On y trouve la méthode qui permet, à partir des coefficients des termes d'une équation donnée, de déterminer non seulement la somme des racines, mais aussi la somme des carrés, des cubes, des quadrato-carrés, etc. Afin que vous puissiez juger si j'ai abordé le sujet, je vais l'exprimer...

[p. 33]

LETTRE VI.

Sommaire : Plainte sur la nécessité dans laquelle se trouve l'auteur de copier lui-même ses travaux. Continuation sur la sommation des séries et l'intégration des équations différentielles. Continuation sur les oscillations horizontales des corps flottants, Problème d'hydrodynamique. P. S. Promesse d'envoyer sous peu la seconde partie des Recherches hydrauliques. L'équation $yxxdx + addy = 0$

1. Il s'agit de traductions de courts extraits des deux volumes des correspondances éditées par P. H. Fuss *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle*, Saint-Petersbourg, 1843, consultables sur le site Gallica, et téléchargés ici à des fins d'accélération de la consultation <https://denisevellachemla.eu/Fuss-vol-1.pdf> et <https://denisevellachemla.eu/Fuss-vol-2.pdf> avec Google traduction, mes cours de latin sont trop loin dans le temps, mais ils aident un peu.

2. Note de la traductrice : expression surprenante dont on imagine qu'elle signifie "par ma propre puissance, par mon seul pouvoir", i.e. tout seul.

peut-elle être réduite aux différences premières, dx étant supposée constante.

À l'homme le plus célèbre et le plus excellent, LEONHARD EULER,

S. P. D.³ JON BERNOULLI.

Je n'ai pas facilement supporté le rude hiver et ai dû le passer une grande partie alité, souffrant d'une forte toux, d'asthme et de goutte. N'étant pas encore complètement guéri, je n'ai pu examiner avec toute l'attention que je souhaitais lire dans votre lettre du 19 janvier, d'une élégance et d'une profondeur remarquables, sans doute écrites dans le style ancien, où j'avais trouvé d'autres lettres adressées à mon fils, que je lui ai aussitôt envoyées. Le jeune homme à qui mon fils avait confié sa thèse est maintenant décédé d'une forte fièvre.

[p. 34]

Même s'il était encore vivant, je ne pourrais utiliser ni ses œuvres, ni celles de quiconque, pour décrire mes méditations, car j'ai l'habitude de les coucher sur le papier en des termes très confus et abrupts, puis de les corriger et de les mettre en ordre au fur et à mesure que je les décris ; ce qui vous montre que personne d'autre que moi ne peut entreprendre et mener à bien ce travail.

Passons maintenant à vos analyses : ce que vous dites à propos de séries de ce genre : $\sum \frac{1}{k^n}$ etc. témoigne assurément d'une sagacité de génie singulière ; en effet, j'ai conçu en mon esprit certaines méthodes permettant d'en obtenir la somme dans toutes les extensions, mais comme je prévois que leur mise en œuvre exigera beaucoup de travail et de calculs, je n'ose m'y atteler, étant déjà très occupé par d'autres occupations ; c'est pourquoi je préfère apprendre ces choses de vous, lorsque vous les publierez en temps voulu, plutôt que de peiner longtemps à celles-ci et peut-être sans succès.

Cependant, je tiens à vous avertir : il n'est pas difficile de démontrer que la somme de cette série :

où tous les termes sont affirmatifs, soit la somme donnée par ce qui suit, mais avec les signes des termes pris alternativement : $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$ etc., ... de 2^n à $2^n - 2$.

[p. 88]

LETTRE XIII.

Sommaire : Plainte contre les infirmités croissantes de l'âge.

Remerciements de l'envoi de l'Artillerie de Robins et de la Théorie du mouvement des planètes et

3. S.P.D. = Salutem Plurimam Dicit = Souhaits de bonne santé au destinataire de la part de l'expéditeur, suivi du nom de l'expéditeur.

des comètes. Expectoration contre les Anglais à l'occasion de la lecture du premier de ces ouvrages et surtout du problème ballistique. Traité des Isopérimètres d'EULER et Commerce littéraire, entre Leibniz

À l'homme incomparable LEONARD EULER, prince des mathématiciens

S. P. D. JEAN BERNOULLI.

Je devrais maintenant vous parler aussi de nos mathématiques, mais vous auriez peine à me croire si je vous disais combien les désagréments de la vieillesse m'accablent, émoussant ma force d'esprit et de corps à un degré étonnant ; car ma mémoire est si instable que j'ai du mal à me rappeler ce que je pensais il y a un instant, et mon attention m'est si difficile que je préfère ne pas commencer de méditations plutôt que de ne pouvoir les poursuivre ; de plus,

C'est la seule lettre, écrite d'une main étrangère, revue et corrigée cependant par l'auteur.

[p. 89]

Ma vue est ternie, mes membres peinent à fonctionner, mes mains tremblent tellement que j'ai du mal à tenir mon stylo, et pire encore, la toux incessante et l'oppression thoracique me tuent et m'empêchent de respirer. Mais la patience triomphe toujours.

J'ai récemment reçu de votre générosité deux traités, l'un traitant des armes de guerre et de la puissance de la poudre à canon, et l'autre de la théorie des mouvements des planètes et des comètes, pour lesquels je vous remercie par un double présent. J'ai déjà lu le premier presque en entier, présumant de la justesse de vos calculs, sans toutefois les vérifier moi-même, car la plupart me paraissaient trop complexes et mon état de santé ne me permettait pas de les entreprendre. Croyez-vous que Robinson, en tant qu'Anglais, ait pu comprendre vos annotations en allemand à propos de son traité sur ce sujet ? Je m'étonne de votre douceur et de votre courtoisie envers Robinson, qui pourtant parle de vous, de moi et de tous les non-Anglais avec condescendance, vous qualifiant, si j'ai bien compris, de "machine à calculer", comme si vous n'agissiez pas différemment d'une machine actionnée par un compas. Il m'a en effet réprimandé avec mépris, alors que j'avais développé la notion de forces vives dans ma dissertation française *Sur le mouvement*. Je vous remercie, Monsieur Clarisse, des éloges que vous avez tenus à me prodiguer à plusieurs reprises dans votre ouvrage. Par ailleurs, concernant le problème de la détermination de la courbe décrite par un corps lourd projeté dans un milieu résistant à un rapport de vitesse doublé, problème que Keilly m'avait proposé, bien qu'il n'ait pu être résolu ni par Keilly lui-même, ni par aucun autre Anglais, ni même par le grand Newton lui-même : mais vous vous trompez lorsque, à la page 64...

[p. 435, traduction depuis l'allemand.]

Vous donnez le théorème de sommation des séries **série 1** $= \frac{\pi^2}{6}$ et **série 2** $= \frac{\pi^4}{90}$ qui est très étrange. Vous y êtes sans doute arrivé a posteriori. J'aimerais voir votre solution. Quant au problème *De invenienda curva in qua $\int rds$ habeat inter omnes lineas inter eosdem terminos sitas minimum valorem*, il me semble qu'il a quelque chose de particulier. À vrai dire, le problème n'a pas de solution et il n'y a pas de minimum ; car je ne peux que remplir ou relier les points A et B (Fig. 33) par des cycloïdes infiniment petites, qui constituent néanmoins une ligne continue, et alors $\int rds = 0$. Il peut aussi s'agir de $\int rds_0$, comme le montre la figure 34, où les valeurs positives et négatives de $\int rds = 0$ peuvent être annulées. Mais si l'on demandait une courbe dont le rayon de courbure n'est ni égal à 0 ni à ∞ , il semble que le problème ait une vraie solution, et pour trouver la même j'ai voulu chercher la méthode à développer peut-être isopérimétrique, avec quelques circonstances modifiées.

[Fuss Vol. 2, p. 681]

LETTRE I.

Sommaire : Sommation des puissances réciproques des nombres naturels.

Au plus célèbre et perspicace mathématicien LEONARD EULER

S. P. D. NIC. BERNOULLI.

Le I. V. D. Hagnauer d'Arov est passé ici vers la fin février, et comme j'étais absent, il a remis à ma femme vos lettres si humaines, qui m'ont profondément touché, et il n'est jamais revenu. Votre recommandation, qui m'était si précieuse, est donc restée sans effet. J'ai été fort heureux d'apprendre que je compte toujours parmi vos amis, mais je voudrais aussi que vous me confirmiez que je ne prétends pas être le dernier des admirateurs de votre génie exceptionnel. Je regrette profondément que, contrairement à mon penchant pour d'autres choses, je sois resté fidèle à mes convictions.

Ici, les sommes de séries où les dénominateurs progressent comme des puissances quatrièmes, puis comme des puissances sixièmes des nombres naturels 2, 3, 4, 5, etc. J'ai trouvé (en établissant un nouveau calcul pour chaque) ... et aussi ... etc. = À partir de là, la somme ... etc. sera ensuite déduite. Il sera ainsi possible de procéder successivement à des dimensions supérieures. Cependant, le calcul devient progressivement plus laborieux et ne s'étend qu'aux exposants de dimensions paires ; quant aux dimensions impaires, j'avoue ne pas encore maîtriser la méthode recherchée. Si vous possédez une méthode pour les dimensions impaires, par exemple pour additionner la série ..., etc., je vous serais reconnaissant de me l'enseigner. Toutefois, une certaine réserve subsiste, car on suppose que la détermination des racines dépend des coefficients des termes d'une équation, même infinie, ce qui est généralement vrai. Or, il arrive très souvent que l'équation proposée contienne des

racines cachées, outre les racines utiles (qui résolvent le problème) également inutiles ou étranges, voire impossibles ou imaginaires : Ainsi, dans cette équation à laquelle nous arrivons ..., où désigne l'arc inconnu du cercle correspondant au sinus donné e , il faudrait démontrer qu'elle ne contient aucune racine impossible, et aucune autre que celle qui correspond réellement à l'un des arcs infinis correspondant au sinus e ; j'ai en effet, dans ce cas, une sorte de démonstration qui rend la chose au moins probable à mes yeux : autrement, je pourrais donner d'innombrables exemples dans lesquels, en raisonnant de cette manière, nous tomberions dans une absurdité manifeste, comme si, en posant le rayon du cercle = 1, un certain arc donné a , tangent à l'inconnu, vous savez bien sûr...

[p. 586 vol. 1]

LETTRE CXLIX. (du 28 octobre 1752)

EULER à GOLDBACH.

Sommaire : Recherches sur les nombres premiers. Réponse à la précédente,

Berlin, le 28 octobre 1753.

La Méthode de conversion de toute série $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} + \text{etc.}$ en une autre, comme $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b} + \text{etc.}$, je m'en souviens très bien, et cependant, de telles conversions peuvent être trouvées à l'aide de la même méthode qui ne peut pas être dérivée de la méthode que j'ai utilisée, car elle est limitée à un certain type de nombres. D'autre part, ma méthode donne également de telles séries qui n'ont rien en commun avec la précédente. Puisque ma méthode n'inclut qu'un certain type de variation dans les signes, il s'ensuit que la somme de toutes les séries qui en découlent est soit nulle, soit dépend de la quadrature du cercle. Mais si je pouvais introduire d'autres variations de signes, je ne doute pas qu'on ne trouverait aucune quantité permettant d'obtenir cette somme.

Comme les nombres premiers, par rapport à leur forme doublée de $4n + 1$ et $4n - 1$, sont très différents l'un de l'autre, et que la quantité des deux genres est infinie, j'ai examiné la somme des séries suivantes :

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} \text{etc.}$$

où les nombres premiers de la forme $4n - 1$ ont le signe +, et où ceux de la forme $4n + 1$ ont le signe -, dans l'espoir que la somme ne soit pas rationnelle. J'ai trouvé cette somme = 0,334980 et donc légèrement supérieure à $\frac{1}{3}$.

Si elle s'était avérée exacte, la question aurait certainement mérité un examen plus approfondi.

Puisque le nombre de tous les nombres premiers est infini mais aussi un infini du plus bas ordre⁴, car j'ai montré que si le nombre de tous les nombres = n , le nombre de nombres premiers devait

4. infinitum intimi ordinis : on dit dorénavant un infini dénombrable.

être $= l n^5$, mais $l n$ est inférieur à $n^{\frac{1}{m}}$, aussi grand que soit le nombre m :

alors La question serait alors de savoir si le nombre de nombres premiers, par exemple de la forme $a^2 + 1$, est également infini, car il est certainement infiniment plus petit que le nombre de tous les nombres premiers.

Par conséquent, si ce nombre était également infini, on pourrait étudier cette question précise des nombres premiers de la forme $a^4 + 1$ ou $a^2 + 1$, etc. J'ai examiné les nombres premiers de la forme $a^2 + 1$ et constaté que $aa + 1$ devient un nombre premier dans les cas suivants :

$a =$	1.	2.	4.	6.	10.	14.	16.	20.	24.
26.	36.	40.	54.	56.	66.	74.	84.	90.	94.
110.	116.	120.	124.	126.	130.	134.	146.	150.	156.
160.	170.	176.	180.	184.	204.	206.	210.	224.	230.
236.	240.	250.	256.	260.	264.	270.	280.	284.	300.
306.	314.	326.	340.	350.	384.	386.	396.	400.	406.
420.	430.	436.	440.	444.	464.	466.	470.	474.	490.
496.	536.	544.	556.	570.	576.	584.	594.	634.	636.
644.	646.	654.	674.	680.	686.	690.	696.	700.	704.
714.	716.	740.	750.	760.	764.	780.	784.	816.	826.
844.	860.	864.	890.	906.	910.	920.	930.	936.	946.
950.	960.	966.	986.	1004.	1010.	1036.	1054.	1060.	1066.
1070.	1094.	1096.	1106.	1124.	1140.	1144.	1146.	1150.	1156.
1174.	1176.	1184.	1210.	1234.	1244.	1246.	1274.	1276.	1290.
1294.	1306.	1314.	1316.	1320.	1324.	1340.	1350.	1354.	1366.
1374.	1376.	1394.	1406.	1410.	1416.	1420.	1430.	1434.	1440.
1456.	1460.	1494.							

J'ai pratiqué cet examen jusqu'à 1500, et grâce à cela, je suis capable d'identifier de nombreux nombres premiers qui sont non seulement supérieurs à 100 000, selon les tables de nombres premiers, mais aussi supérieurs à 1 000 000. Autrement, il serait certainement très difficile d'identifier un nombre premier $> 1\,000\,000$.

Mais si $a^4 + 1$ doit être un nombre premier, alors les valeurs de a seront les suivantes :

$$1, 2, 4, 6, 16, 20, 24, 34.$$

Pourtant, je suis encore loin de résoudre le problème de Fermat : trouver un nombre premier, étant donné un nombre plus grand que lui. Si l'on pouvait trouver une série régulière dont tous les termes seraient contenus dans ces valeurs de a , alors le problème serait résolu. Cependant, il n'existe certainement aucune série algébrique dont tous les termes soient des nombres premiers. Car soit X le terme indicé et donc A le terme indicé correspondant à a , si l'on prend $x = nA + a$, le terme X devient divisible par A et n'est donc pas premier.

Mon équation d'intégration $\frac{dx}{\sqrt{a+bx^n}} = \frac{dy}{\sqrt{a+by^n}}$ présuppose non seulement que n est un entier, mais je ne peux également donner les intégrales que dans ces cas : $n = 2, n = 3, n = 4$ et $n = 6$. Si

5. notation de l'époque pour $\ln n$ ou $\log n$.

$n = 5$, alors je n'ai pas encore été en mesure de trouver l'intégrale. Mais si $n = \frac{1}{m+1}$, les formules seraient en effet absolument intégrables, donc elles ne donneraient rien de remarquable. Car cela m'a paru particulièrement étrange, que puisque les formules dans les cas $n = 3$, ou $n = 4$, ou $n = 6$ ne puissent être ramenées à une quadrature circulaire ou hyperbolique de quelque manière que ce soit, l'équation elle-même puisse être algébrique et l'équation générale intégrée.

Je me souviens encore de la note ci-jointe de Votre Excellence. à avoir écrite afin de montrer qu'on ne peut pas toujours trouver le cas par intégration, qui satisfait une équation différentielle, dont j'ai relevé quelques cas importants dans mon ouvrage de Mécanique. Je peux simplifier encore le cas et présenter cette équation différentielle $adx = (a - x)dy$, qui semble satisfaire si $x = a$, un cas qui, cependant, ne peut être obtenu par intégration. Donc, si j'ai $\frac{Pdz}{Z} = dy$, ou $Pdz = Zdy$, il existe Z une fonction de z , et P une quantité composée de y et z , alors $Z = 0$ est satisfait, car donc certae constanti et donc $dz = 0$. Si l'on pose maintenant une formule magis compositam pour z , comme $x^2 + y^2 - a^2$, on obtient de $Z = 0$ de tels cas d'intégrales qui ne peuvent jamais être obtenus par intégration. Donc, si $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = Vdy$, il existe V une fonction de x et y alors $x^2 + y^2 + a^2 = 0$ est certainement.

Je n'ai pas encore reçu le tome II du Commentaire de novembre. Je ne peux affirmer avec certitude que $2^{30}(2^{31} - 1)$ est un nombre parfait, car j'ignore si $2^{31} - 1$ est un nombre premier. Cependant, je ne comprends pas pourquoi il n'existerait pas une infinité de nombres parfaits. Or, comme les trouver nécessite de montrer tous les cas où $2^n - 1$ est le nombre premier, je ne vois pas comment on pourrait en énumérer plus de sept, à savoir : $2^1(2^2 - 1)$, $2^2(2^3 - 1)$, $2^4(2^5 - 1)$, $2^6(2^7 - 1)$, $2^{12}(2^{13} - 1)$, $2^{16}(2^{17} - 1)$, $2^{18}(2^{19} - 1)$, et donc pas huit, ni même dix. Une chose est sûre : si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n doit aussi l'être. Or, de nombreux nombres de la forme $2^n - 1$ ne sont pas des nombres premiers, comme $n = 11, n = 23, n = 29, n = 37$, etc. Par conséquent, ce que dit Mersennus ou untel, comme si le nombre de nombres parfaits était fini, me paraît infondé, bien que je pense qu'on puisse démontrer avec certitude qu'il y en a plus de sept. Je me souviens avoir vu le traité de untel chez vous ; cependant, je ne trouve aucune information sur cet auteur dans aucun dictionnaire, c'est pourquoi je me permets de vous demander quelques précisions sur son traité et, si possible, sur lui-même.

EULER