

Traduction d'un extrait du livre *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications*, 3ème édition, de Kenneth Falconer, éd. Wiley, 2014, pages 158 et suivantes.

9.6 Fonctions zêta et dimensions complexes

Toutes les définitions de dimension rencontrées jusqu'à présent étaient naturellement des nombres réels non négatifs ; néanmoins, il est possible d'interpréter les nombres complexes comme des dimensions de manière significative et utile, et nous donnons un bref aperçu de cette approche.

Soit F un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$ de longueur (mesure de Lebesgue) nulle ; nous supposons pour simplifier que $F \subset [0, 1]$ avec $0, 1 \in F$. Alors le complémentaire de F est constitué d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts. Ces ensembles sont souvent appelés *chaînes fractales* : une corde tendue à travers un ensemble de type Cantor et fixée aux points de l'ensemble pourrait être pincée dans l'un des intervalles pour produire des notes de fréquences variées. Mis à part les deux intervalles non bornés à chaque extrémité de F , les longueurs de ces intervalles complémentaires seront toujours listées par ordre décroissant $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots$. Pour chaque $\delta > 0$, soit $M(\delta)$ le nombre de i tels que $l_i \geq \delta$.

Nous avons montré dans la Proposition 2.4 que les dimensions de comptage par boîtes d'un ensemble pouvaient être obtenues en termes du comportement limite de la mesure de Lebesgue du δ -voisinage F_δ de F . Pour les chaînes fractales, F_δ est constitué de tous les intervalles complémentaires de longueurs inférieures à 2δ , de deux intervalles de longueur δ à l'intérieur de chaque intervalle complémentaire de longueur supérieure à 2δ , et d'un intervalle de longueur δ à chaque extrémité. En sommant les longueurs de ces parties, avec $\mathcal{L}$ désignant la mesure de Lebesgue,

$$\mathcal{L}(F_\delta) = \sum_{j: l_j < 2\delta} l_j + 2\delta M(2\delta) + 2\delta. \quad (9.27)$$

Le lemme suivant relie le comportement asymptotique de $\mathcal{L}(F_\delta)$, $M(\delta)$ et des l_j . Rappelons que nous écrivons $f(x) = O(g(x))$ pour signifier qu'il existe une constante c telle que $|f(x)| \leq cg(x)$ pour les valeurs appropriées de x .

Lemme 1 (Lemme 9.15). *Soit $0 < s \leq 1$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \quad l_j = O(j^{-1/s}) \text{ lorsque } j \rightarrow \infty; \quad (1)$$

$$(ii) \quad M(\delta) = O(\delta^{-s}) \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$(iii) \quad \mathcal{L}(F_\delta) = O(\delta^{1-s}) \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0. \quad (3)$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : En supposant (i), il existe une constante c telle que $l_j \leq cj^{-1/s}$ pour tout j , donc si $\delta > 0$, alors $l_j < \delta$ dès que $cj^{-1/s} < \delta$, c'est-à-dire dès que $j > c^s \delta^{-s}$. Ainsi, $M(\delta) \leq c^s \delta^{-s}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Si $M(\delta) \leq c\delta^{-s}$, alors en particulier $M(l_j) \leq cl_j^{-s}$ pour chaque j , donc $j \leq cl_j^{-s}$ ou $l_j \leq c^{1/s} j^{-1/s}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Si $\mathcal{L}(F_\delta) \leq c\delta^{1-s}$ pour tout δ petit, alors $2\delta M(2\delta) \leq c\delta^{1-s}$ d'après (9.27), donc $M(\delta') \leq c2^{s-1}\delta'^{-s}$ pour $\delta' = 2\delta$ suffisamment petit.

(i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) : D'après (i), $l_j \leq cj^{-1/s}$ pour un certain c . Pour δ petit, nous divisons la somme des longueurs complémentaires dans (9.27) selon que $j < \delta^{-s}$ ou $j \geq \delta^{-s}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j:l_j < 2\delta} l_j &\leq \sum_{j < \delta^{-s}} l_j + \sum_{j \geq \delta^{-s}} l_j \\
&\leq \delta^{-s}(2\delta) + \sum_{j \geq \delta^{-s}} cj^{-1/s} \\
&\leq 2\delta^{1-s} + c \int_{\delta^{-s}}^{\infty} t^{-1/s} dt \\
&\leq 2\delta^{1-s} + c_1\delta^{1-s},
\end{aligned} \tag{3}$$

où c_1 est indépendant de δ , en utilisant une estimation par intégrale. En utilisant ceci avec (ii) dans (9.27), nous concluons que $\mathcal{L}(F_\delta) = O(\delta^{1-s})$. □

Nous pouvons maintenant obtenir la dimension de boîte d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$ uniquement en termes des longueurs des intervalles complémentaires.

Proposition 9.16 *Avec les notations ci-dessus,*

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log l_j}{\log j} \tag{9.28}$$

et

$$\underline{\dim}_B F \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log l_j}{\log j}, \tag{9.29}$$

donc en particulier

$$\dim_B F = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log l_j}{\log j}$$

chaque fois que la limite existe.

Démonstration. L'identité (9.28) découle directement de la Proposition 2.4 en utilisant l'équivalence de (i) et (iii) dans le Lemme 9.15.

Si $\liminf_{j \rightarrow \infty} \log l_j / \log j > -1/s$, alors $l_j \geq cj^{-1/s}$ pour tout j pour un certain $c > 0$. D'après (9.27),

$$\mathcal{L}(F_\delta) \geq \sum_{j:l_j < 2\delta} l_j \geq \sum_{j \geq c^s(2\delta)^{-s}} cj^{-1/s} \geq c \int_{c^s(2\delta)^{-s}+1}^{\infty} t^{-1/s} dt \geq c_1\delta^{1-s},$$

en approximant la somme par une intégrale. D'après la Proposition 2.4, $\underline{\dim}_B F \geq s$, ce qui donne (9.29). □

Notons que cette caractérisation de $\dim_{\mathbb{B}} F$ ne dépend que des longueurs des intervalles complémentaires, pas de leur position ou de leur arrangement. Ainsi, permuter les intervalles complémentaires d'un sous-ensemble fractal de $\mathbb{R}$ ne change pas ses dimensions de boîte. Il existe des variantes plus fines de la Proposition 9.16 qui relient les longueurs de ces intervalles au contenu de Minkowski de F .

Ensuite, nous introduisons une fonction zêta donnée en termes des longueurs des intervalles complémentaires par

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s. \quad (9.30)$$

Puisque $\sum_{j=1}^{\infty} l_j = 1$, la série (9.30) converge absolument pour les nombres complexes s avec partie réelle $\Re(s) \geq 1$. L'infimum des nombres réels s pour lesquels la série converge est appelé l'abscisse de convergence σ ; il s'avère que celle-ci est égale à la dimension de boîte supérieure de F .

Proposition 2 (Proposition 9.17). *Avec les notations ci-dessus,*

$$\sigma = \overline{\dim}_{\mathbb{B}} F.$$

De plus, la série (9.30) converge absolument si $s \in \mathbb{C}$ et $\Re(s) > \sigma$.

Démonstration. Si $\sum_{j=1}^{\infty} l_j^s \leq a < \infty$, alors en considérant la j -ième somme partielle de la série, $j l_j^s \leq a$ donc $l_j \leq a^{1/s} j^{-1/s}$ ce qui donne $\overline{\dim}_{\mathbb{B}} F \leq s$ d'après (9.28).

D'un autre côté, si $\overline{\dim}_{\mathbb{B}} F < s$, alors $l_j \leq c j^{-1/t}$ pour un certain $t < s$ et $c > 0$ d'après (9.28). Alors $\sum_{j=1}^{\infty} l_j^s \leq c^s \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s/t} < \infty$. Si $z \in \mathbb{C}$ et $s = \Re(z) > \sigma$, alors $\sum_{j=1}^{\infty} |l_j^z| = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s < \infty$, donc $\sum_{j=1}^{\infty} l_j^z$ est absolument convergente. $\square$

La fonction zêta (9.30) peut souvent être prolongée par continuation analytique en une fonction méromorphe. Rappelons qu'une fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ si elle est analytique sauf en un ensemble de singularités isolées qui sont des pôles. Le point $\omega \in \mathbb{C}$ est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{Z}^+$ si, dans un voisinage U de ω ,

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - \omega)^p} \quad (s \in U),$$

où g est analytique sur U et $g(\omega) \neq 0$. Si $p = 1$, le pôle est simple et $g(\omega)$ est le résidu de f en ω , noté $\text{Res}(f, \omega)$.

Le comportement d'une fonction zêta dans le plan complexe fournit souvent un aperçu des asymptotiques de suites ou de fonctions, l'exemple classique étant la fonction zêta de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ qui est intimement liée aux nombres premiers. Une grande partie de ce que l'on sait sur la distribution des nombres premiers résulte de l'étude de la fonction zêta de Riemann, et des techniques apparentées peuvent être utilisées pour étudier les chaînes fractales.

En supposant que la fonction zêta (9.30) admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{\omega \in \mathbb{C} : \zeta \text{ a un pôle en } \omega\}$$

est appelé l'ensemble des dimensions complexes de la chaîne fractale F .

Pour l'exemple le plus simple, soit $F \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de Cantor du tiers médian (voir Figure 0.1). Alors le complémentaire de F contient 2^{k-1} intervalles de longueur 3^{-k} pour chaque $k \geq 1$. Ainsi,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} 3^{-ks} = \frac{3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}} \quad (9.31)$$

en sommant la série géométrique qui converge si $\Re(s) > \log 2 / \log 3$, la dimension de F . Mais cette forme fermée donne le prolongement analytique de $\zeta(s)$ à $\mathbb{C}$. C'est une fonction méromorphe avec des pôles aux points s pour lesquels $1 - 2 \cdot 3^{-s} = 0$, ce qui est précisément l'équation (9.10) pour la dimension de similarité de F . L'ensemble des pôles est

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{2\pi i k}{\log 3} : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

qui se trouvent tous sur la droite $\Re(s) = \log 2 / \log 3$; ce n'est pas une coïncidence si c'est la dimension de l'ensemble de Cantor F .

Plus généralement, soit $F \subset [0, 1]$ l'attracteur auto-similaire d'un IFS de similitudes $S_1, \dots, S_m$ avec rapports $r_1, \dots, r_m$, avec $0, 1 \in F$ et avec $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ une union disjointe. Si les intervalles au premier niveau de la construction, c'est-à-dire les intervalles bornés entre les intervalles $S_i([0, 1])$, ont des longueurs $b_1, \dots, b_{m-1}$, alors les intervalles qui apparaissent au k -ième stade de la construction de F , c'est-à-dire les intervalles qui apparaissent pour la première fois dans $S^k([0, 1]) = \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}([0, 1])$, sont de longueurs $r_{i_1} \cdots r_{i_{k-1}} b_j$ pour $i_1, \dots, i_{k-1} \in I_{k-1}$ et $j = 1, \dots, m-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in I_{k-1}} \sum_{j=1}^{m-1} r_{i_1}^s \cdots r_{i_{k-1}}^s b_j^s \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m-1} b_j^s}{1 - \sum_{i=1}^m r_i^s}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

en sommant la série géométrique qui converge absolument pourvu que $s \in \mathbb{C}$ soit tel que $\left| \sum_{i=1}^m r_i^s \right| < 1$.

Notant que $|x^s| = |x|^{\Re(s)}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{i=1}^m r_i^s \right| \leq \sum_{i=1}^m |r_i^s| = \sum_{i=1}^m r_i^{\Re(s)} < 1,$$

donc la série (9.33) converge si $\Re(s) > s_+$, où $\sum_{i=1}^m r_i^{s_+} = 1$. Lorsque $s = s_+$ la série diverge, donc l'abscisse de convergence est $\sigma = s_+$, qui par la Proposition 9.17 est égale à $\dim_B F = \dim_H F$.

La fonction (9.33) est méromorphe et fournit donc le prolongement analytique de ζ à $\mathbb{C}$. La proposition suivante résume quelques-unes des principales propriétés des pôles et des résidus de (9.33) qui sont essentielles pour le comportement de la fonction zêta.

Proposition 3 (Proposition 9.18). *Les singularités de la fonction zêta (9.33) d'une chaîne fractale auto-similaire $F \subset [0, 1]$ sont toutes des pôles ou des singularités apparentes situées aux points $s \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1. \quad (9.34)$$

Toutes les singularités se trouvent dans la bande

$$\{s \in \mathbb{C} : s_- \leq \Re(s) \leq s_+\}, \quad (9.35)$$

où s_+ et s_- sont les nombres réels uniques satisfaisant

$$\sum_{i=1}^m r_i^{s_+} = 1 \quad \text{et} \quad 1 + \sum_{i=1}^{m-p} r_i^{s_-} = pr_m^{s_-},$$

où le plus petit rapport de contraction r_m de l'IFS définissant F apparaît p fois parmi les r_i . Si $\omega \in \mathbb{C}$ satisfait (9.34), alors c'est un pôle simple de ζ avec résidu

$$\text{Res}(\zeta, \omega) = \frac{-\sum_{j=1}^{m-1} b_j^\omega}{\sum_{i=1}^m r_i^\omega \log r_i}, \quad (9.36)$$

pourvu que le numérateur et le dénominateur de ce quotient soient non nuls. C'est toujours le cas pour l'unique solution réelle de (9.34), à savoir $s_+ = \sigma = \dim_B F$ et aussi lorsque $m = 2$, le cas d'un "intervalle unique".

Démonstration. Les singularités de (9.33) nécessitent que le dénominateur soit nul, c'est-à-dire qu'elles doivent satisfaire (9.34). Nous avons vu qu'il n'y a pas de solutions à cette équation si $\Re(s) > s_+$. D'autre part, si s satisfait (9.34), alors avec p la multiplicité du plus petit rapport de contraction r_m ,

$$pr_m^{\Re(s)} = p|r_m^s| = \left| 1 - \sum_{i=1}^{m-p} r_i^s \right| \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-p} |r_i^s| = 1 + \sum_{i=1}^{m-p} r_i^{\Re(s)}$$

et cette inégalité ne peut être satisfaite si $\Re(s) < s_-$.

Une expression de la forme $\sum_{j=1}^m c_j^s$ où les c_j sont des nombres réels positifs est analytique dans tout $\mathbb{C}$ et tous ses zéros sont de multiplicité finie (puisque son développement en série entière autour de tout point a un terme initial non nul). Ainsi, si $\omega \in \mathbb{C}$ est une solution de (9.34), alors ω est un

pôle de (9.33) d'ordre fini ou, si le numérateur est nul en ω , peut-être une singularité apparente. Écrivant $s = \omega + z$ pour z petit,

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{i=1}^m r_i^s &= 1 - \sum_{i=1}^m r_i^\omega r_i^z = 1 - \sum_{i=1}^m r_i^\omega \exp(z \log r_i) \\ &\sim 1 - \sum_{i=1}^m r_i^\omega (1 + z \log r_i) = -z \sum_{i=1}^m r_i^\omega \log r_i. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (9.33), pour s proche de ω ,

$$\zeta(s) = \zeta(\omega + z) \sim \frac{-\sum_{j=1}^{m-1} b_j^\omega}{\sum_{i=1}^m r_i^\omega \log r_i} \frac{1}{z} = \frac{-\sum_{j=1}^{m-1} b_j^\omega}{\sum_{i=1}^m r_i^\omega \log r_i} \frac{1}{(s - \omega)},$$

□

pourvu que le numérateur et le dénominateur de ce coefficient soient non nuls, auquel cas ω est un pôle simple avec résidu (9.36). C'est certainement le cas lorsque ω est le nombre réel s_+ et aussi lorsque $m = 2$ et qu'il y a un seul terme au numérateur.

Dans un sens générique, toutes les solutions complexes de (9.34) seront des pôles simples, puisque l'ensemble des rapports et des intervalles $(r_1, \dots, r_m, b_1, \dots, b_{m-1})$ pour lesquels le numérateur et le dénominateur de (9.33) ont un zéro commun est de mesure de Lebesgue nulle dans l'espace des paramètres de dimension $2m - 2$ (contraint par $\sum_{i=1}^m r_i + \sum_{j=1}^{m-1} b_j = 1$).

On peut dire beaucoup plus sur la localisation des pôles de la fonction zêta d'un ensemble auto-similaire et sur les solutions complexes de (9.34). Par exemple, puisque les r_i et b_i sont réels, s est un pôle de (9.33) si et seulement si son conjugué $\bar{s}$ est un pôle, donc l'ensemble des pôles a une symétrie de réflexion par rapport à l'axe réel.

Il y a deux cas fondamentalement différents. Étant donné un sous-ensemble auto-similaire de $[0,1]$ avec des rapports $r_1, \dots, r_m$, les nombres

$$G = \{r_1^{k_1} \cdots r_m^{k_m} : k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}\}$$

forment un sous-groupe de $\mathbb{R}^+$ pour la multiplication. On peut montrer que soit G est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire contient des points dans tout intervalle), cas dit *non-réseau*, soit G est discret et de la forme $G = \{r^k : k \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $r > 0$, cas *réseau*.

Dans le cas réseau, les pôles se trouvent tous sur un nombre fini de droites verticales, les pôles sur chacune de ces droites apparaissant (normalement) périodiquement avec une période $2\pi/(-\log r)$ (voir Figure 9.14a). Cela découle du fait que $r_j = r^{k_j}$ pour un certain $k_j \in \mathbb{Z}$ pour chaque j , donc

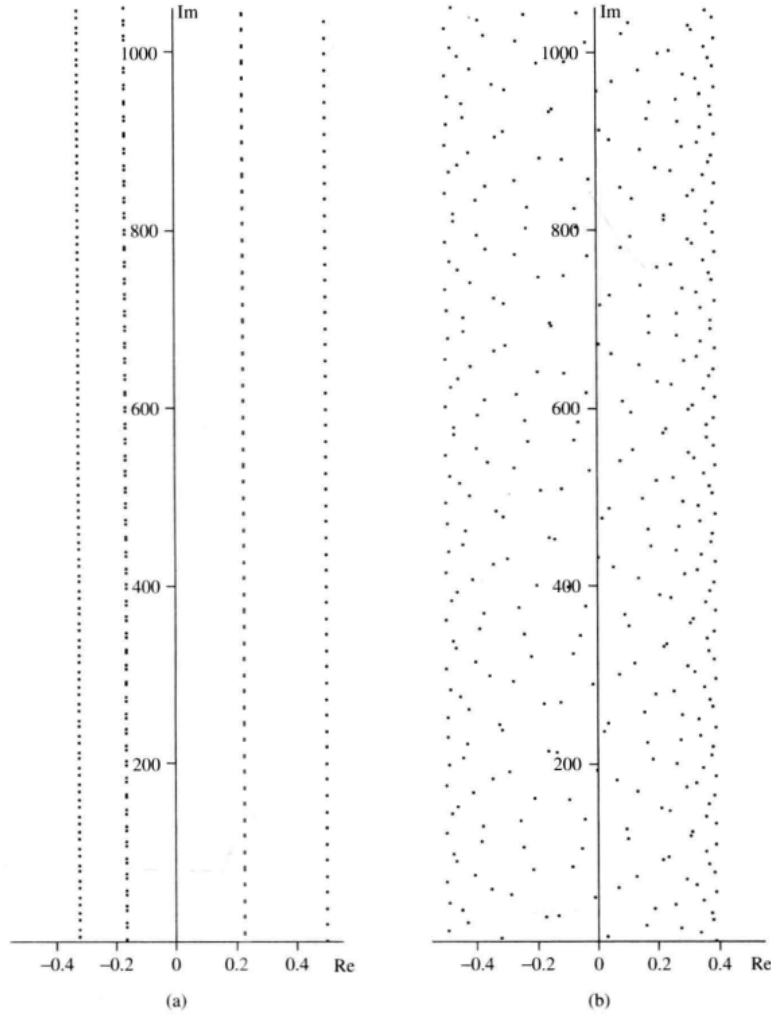
$$\sum_{j=1}^m r_j^{s+2\pi i k / \log r} = \sum_{j=1}^m r_j^s r_j^{k_j 2\pi i k / \log r} = \sum_{j=1}^m r_j^s e^{k_j 2\pi i k} = \sum_{j=1}^m r_j^s.$$

Ainsi, si s est un pôle de ζ , alors $s + 2\pi ik / \log r$ l'est aussi pour chaque entier k , en supposant que le numérateur de (9.33) reste non nul.

Dans le cas non-réseau, tous les pôles sauf σ satisfont $\Re(\omega) < \sigma$, et à première vue, les pôles semblent répartis de manière aléatoire dans la bande (9.35) (Figure 9.14b). Néanmoins, il y a une quasi-périodicité, dans le sens où les pôles peuvent être approchés par les pôles d'une suite de fractales auto-similaires en réseau. En effet, les pôles semblent se trouver sur certaines courbes naturelles dans le plan complexe, une conséquence des propriétés arithmétiques des rapports de contraction.

Pour un F auto-similaire, il existe de bonnes estimations pour la densité des dimensions complexes situées dans la bande (9.35). Pourvu que le numérateur et le dénominateur de (9.33) ne s'annulent jamais simultanément,

$$\#\{\text{pôles } \omega \text{ de } \zeta \text{ avec } |\Im \omega| \leq T\} = \frac{-\log r_m}{\pi} T + O(1),$$



Dimensions complexes des IFS (a) $S_1(x) = 2^{-7/2}x, S_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, dans le cas réseau,
(b) $S_1(x) = \frac{1}{9}x, S_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$, le cas non-réseau.

où r_m est le plus petit rapport de contraction de l'IFS définissant F , les pôles étant comptés avec leur multiplicité.

Il est naturel de se demander pourquoi il vaut la peine d'introduire une fonction zêta et de considérer les dimensions complexes en plus des dimensions (réelles) habituelles. Un grand nombre de quantités associées aux chaînes fractales peuvent être exprimées en termes de la fonction zêta, par exemple,

$$\zeta(s) = s \int_0^\infty M(t) t^{s-1} dt, \quad (9.37)$$

où, comme précédemment, $M(\delta)$ est le nombre de longueurs d'intervalles complémentaires d'au moins δ . De plus, l'étude des pôles et des résidus de la fonction zêta peut fournir des informations beaucoup plus détaillées sur la structure des fractales. L'exemple suivant illustre ce qui peut être accompli.

Rappelons que si $F \subset \mathbb{R}$ est de dimension de boîte s , son contenu de Minkowski s -dimensionnel est donné par

$$\mathcal{C}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(F_\delta)}{\delta^{1-s}}$$

pourvu que cette limite existe. Supposons que F soit une chaîne fractale avec une fonction zêta satisfaisant certaines conditions de croissance modérées (il est certainement suffisant que F soit auto-similaire). Alors on peut montrer que le contenu de Minkowski de F existe si et seulement si l'abscisse de convergence σ est un pôle simple de ζ et est la seule dimension complexe de F avec une partie réelle égale à σ . Si c'est le cas, ce qui se produit pour F auto-similaire dans le cas non-réseau, alors

$$\mathcal{C}(F) = 2^{1-\sigma} \frac{\text{Res}(\zeta, \sigma)}{\sigma(1-\sigma)}. \quad (9.38)$$

De plus, indépendamment de l'existence ou non du contenu de Minkowski, il existe un développement de la mesure du δ -voisinage de F en termes des résidus de ζ à ses pôles. Pourvu que les pôles soient tous simples et que 0 ne soit pas un pôle,

$$\mathcal{L}(F_\delta) = \sum_{\omega \text{ un pôle de } \zeta} \text{Res}(\zeta, \omega) \frac{(2\delta)^{1-\omega}}{\omega(1-\omega)} + 2\delta\zeta(0). \quad (9.39)$$

(Des formules de ce type sont appelées *formules de tube* puisque le δ -voisinage d'une courbe prend la forme d'un 'tube'.) Le développement (9.39), qui est obtenu en utilisant des techniques d'analyse complexe, donne une grande quantité d'informations sur $\mathcal{L}(F_\delta)$. Écrivant $\delta^z = \delta^{\Re(z)} \exp(i\Im(z) \log \delta)$, les termes dominants de (9.39) sont ceux en $\delta^{1-\sigma}$ correspondant aux pôles avec $\Re(\omega) = \sigma$. Si F est auto-similaire et non-réseau, cette contribution dominante provient entièrement du pôle réel σ donnant le contenu de Minkowski (9.38). Cependant, si F est auto-similaire et en réseau, alors il y a une infinité de pôles avec $\Re(\omega) = \sigma$ et les contributions de ceux-ci sont modulées par les termes oscillatoires $\exp(i\Im(1-\omega) \log \delta)$, de sorte que lorsque δ tend vers 0, $\mathcal{L}(F_\delta)/\delta^{1-s}$ ne tend pas vers une limite mais oscille d'une manière qui est précisément caractérisée par (9.39).

Les fonctions zêta et les dimensions complexes sont liées à de nombreux autres domaines de la

géométrie fractale et fournissent des méthodes puissantes pour étudier les propriétés fractales. Par exemple, il existe des moyens de les introduire pour des ensembles dans des espaces de dimension supérieure.