

Une nouvelle démonstration de la formule de Lefschetz sur les points invariants

H. Hopf

Département de mathématiques, Université de Princeton

Communiqué le 9 janvier 1928

1. La somme des indices des points fixes d'une transformation donnée, qui, depuis les premières démonstrations de théorèmes de point fixe par Brouwer [1], a fait l'objet de nombreuses recherches particulières, a été entièrement déterminée pour des transformations arbitraires de variétés arbitraires par Lefschetz [2]. Sa théorie inclut la formule du point fixe comme un cas particulier de théorèmes plus généraux sur les coïncidences et les transformations multivaluées, et il fait également remarquer qu'il est possible d'appliquer les mêmes méthodes à certaines transformations d'un complexe arbitraire [3].

Dans ce qui suit, nous esquisserons une nouvelle démonstration de la formule du point fixe. Cette démonstration est valable pour tous les complexes, sous l'hypothèse que la transformation est univoque; la question de savoir si elle est également valable pour les transformations multivoques ne sera pas traitée ici. Un article contenant tous les détails sera publié dans le *Mathematische Zeitschrift*.

2. *La formule de Lefschetz.* Soit f une transformation continue univoque d'un n -complexe C^n dans lui-même et $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{p^i}^i$ un ensemble fondamental de i -cycles sur C^n . Alors il existe un système d'homologies

$$f(\gamma_j^i) \sim \sum_{k=1}^{p^i} a_{jk}^i \gamma_k^i + \nu^i \quad (j = 1, 2, \dots, p^i), \quad (1)$$

où ν^i est un diviseur de zéro. On voit sans difficulté [4] que la trace $\sum_{j=1}^{p^i} a_{jj}^i$ de cette substitution ne dépend pas du choix de l'ensemble γ_j^i , mais est une constante de f , que l'on appelle $S^i f$. Ainsi, à la transformation donnée f appartiennent $n + 1$ constantes $S^0 f, S^1 f, \dots, S^n f$. Or, la formule des points fixes démontrée par Lefschetz pour le cas où C^n est une variété [5] dit que, si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sont les points invariants de f et j_1, j_2, \dots, j_m , leurs indices, alors

$$\sum_{g=1}^m j_g = (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i S^i f. \quad (2)$$

3. *Une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré.* Afin de prouver (2), nous considérons d'abord une "transformation élémentaire" φ [6] de C^n en elle-même, qui transforme les sommets d'une subdivision C_1^n de C^n en les sommets de C^n . Par φ , chaque i -simplexe T_j^i de C_1^n est transformé en un i -simplexe $\varphi(T_j^i)$ de C^n , qui peut également dégénérer à moins de i dimensions. Cependant, comme chaque i -simplexe de C^n est décomposé en i -simplexes de C_1^n , nous avons un système d'équations

$$\varphi(T_j^i) = \sum_{k=1}^{a^i} c_{jk}^i T_k^i \quad (j = 1, 2, \dots, a^i), \quad (3)$$

où a^i est le nombre de i -simplexes de C_1^n et où les c_{jk}^i sont égaux à 1 ou à 0.

Nous disons qu'entre les traces de ces matrices carrées $\|c_{jk}^i\|$ et les constantes $S^i\varphi$, il existe la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=1}^{a^i} c_{jj}^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i S^i\varphi. \quad (4)$$

Lorsque φ est l'identité, alors la matrice $\|c_{jk}^i\|$ dans (3), ainsi que la matrice $\|a_{jk}^i\|$ dans (1), est la matrice unité. Par conséquent, dans ce cas, (4) se réduit à la formule d'Euler-Poincaré [7].

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i p^i \quad (4^*)$$

(4) peut être prouvée par récurrence. C'est évidemment correct pour $n = 0$. Supposons que ce soit prouvé pour tout complexe $(n - 1)$. Alors c'est valable pour la transformation élémentaire φ^1 du complexe C^{n-1} , formée par les simplexes $(n - 1)$ de C^n , où φ^1 est identique à φ sur C^{n-1} . Donc nous avons

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=1}^{a^i} c_{jj}^i = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S^i\varphi^1. \quad (4_{n-1})$$

Mais nous avons aussi

$$S^i\varphi^1 = S^i\varphi \quad (i = 0, 1, \dots, n - 2) \quad (5a)$$

$$S^{n-1}\varphi^1 = S^{n-1}\varphi - S^n\varphi + \sum_{j=1}^{a^n} c_{jj}^n \quad (5b)$$

dont (5a) est évident, tandis que (5b) peut être démontré sans grande difficulté. En remplaçant $S^i\varphi^1$ dans (4_{n-1}) à l'aide de (5a), (5b), la formule (4) s'ensuit.

4. *Formule du point fixe pour les transformations sans point fixe.* Soit f une transformation continue univoque de C^n dans elle-même, ne possédant aucun point fixe, et une transformation élémentaire de C^n qui approche suffisamment f [8]. Alors

$$S^i\varphi^1 = S^i f \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (6)$$

et

$$c_{jj}^i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, a^i) \quad (7)$$

de ces équations avec (4), il s'ensuit

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i S^i f = 0. \quad (8)$$

Ceci est la formule de Lefschetz pour une fonction f sans point fixe.

5. *Modification d'une transformation au voisinage de ses points fixes.* Si f possède des points invariants, nous nous limiterons au cas où leur nombre est fini et où chacun possède un voisinage euclidien, de sorte que nous pouvons supposer qu'il se situe à l'intérieur d'un n -simplexe de C^n . Soit ξ un point invariant, T^n un n -simplexe contenant ξ , et t^n un autre simplexe contenant ξ , suffisamment petit pour que son image $f(t^n)$ soit également à l'intérieur de T^n . Considérons alors une $(n-1)$ -sphère H^{n-1} dans T^n et faisons correspondre à tout point x de la sphère bordante r^{n-1} de t^n le point d'intersection x' de H^{n-1} avec la demi-droite passant par le centre de H^{n-1} , parallèle au vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$. Le "degré" de Brouwer de cette représentation de la sphère r^{n-1} sur la sphère H^{n-1} est, par définition, l'"indice" j de ξ .

Qualifions ξ de point invariant "normal" s'il existe un t^n qui n'a aucun point en commun avec l'image $f(r^{n-1})$ de sa frontière. Il découle alors facilement des propriétés fondamentales du degré que j est le degré de la représentation $f(t^n)$ en chaque point de l'intérieur de t^n , c'est-à-dire que j pour chaque tel point est le nombre algébrique de recouvrements par une approximation simpliciale de $f(t^n)$.

On peut facilement montrer qu'en modifiant légèrement f , ξ devient un point fixe normal. La modification laisse invariants le nombre de points fixes, leurs positions et leurs indices, ainsi que les nombres $S^i f$. Par conséquent, nous pouvons supposer à juste titre désormais que tous les points fixes sont normaux.

6. *Réduction d'une transformation avec points invariants à une transformation sans points invariants.* Par la construction suivante qui remplace chaque point invariant par un n -cycle, transformé en lui-même, nous réduisons la preuve de (2) à la formule (8), démontrée ci-dessus.

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ les points fixes, t_g^n ($g = 1, 2, \dots, m$) le simplexe, contenant ξ_m et ayant la propriété décrite au n° 5, qui définit la "normalité" de ξ_g , de plus r_g^{n-1} la frontière de t_g^n . Ensuite, pour chaque g , ajoutons au complexe C^n une nouvelle n -cellule \overline{t}_g^n , qui a la même frontière r_g^{n-1} , mais, à l'exception des points de r_g^{n-1} , n'a aucun autre point en commun avec C^n . Ainsi, C^n a été agrandi en un n -complexe \overline{C}^n , sur lequel un ensemble fondamental de n -cycles est constitué d'un ensemble fondamental sur C^n ainsi que de m nouvelles n -sphères $\pi_g^n = t_g^n + \overline{t}_g^n$. Les ensembles fondamentaux des autres dimensions n'ont pas été modifiés.

Soit G la transformation bijective de \overline{C}^n , qui est l'identité en tous les points n'appartenant pas à un π_g^n et qui, sur chaque sphère π_g^n , est la réflexion par rapport à la $(n-1)$ -sphère équatoriale r_g^{n-1} . Soit de plus \overline{f} la transformation univoque et continue de \overline{C}^n dans lui-même définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \overline{f}(x) &= Gf(x), & \text{si } x \subset C^n \\ \overline{f}(x) &= fG(x), & \text{si } x \not\subset C^n \end{aligned}$$

\bar{f} n'a pas de point invariant, donc (8) donne ici :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i S^i \bar{f} = 0. \quad (\bar{8})$$

Maintenant, de la propriété définissant des points fixes “normaux” et du fait que G est de degré -1 en chaque point de π_g^n , il s'ensuit que la part de π_g^n dans la trace $S^n \bar{f}$ est égale à $-j_g$, où j_g est l'indice de ξ_g . La part de n'importe quel i -cycle de C^n dans $S^i f$ reste inchangée lorsqu'on remplace f par \bar{f} . Par conséquent, on a

$$S^i \bar{f} = S^i f \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (9)$$

et

$$S^n \bar{f} = S^n f - \sum_{g=1}^m j_g. \quad (10)$$

De (8), (9), (10) découle la formule (2).

$$\sum_{g=1}^m j_g = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i S^i f. \quad (2)$$

Références

- [1] L. E. I. Brouwer, *Mathem. Ann.*, 71 (1911), pages 97 à 115.
- [2] S. Lefschetz (a) *Trans. Am. Math. Soc.*, 28 (1926), p. 1-49; (b) 29 (1927), p. 429-462.
- [3] S. Lefschetz, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 13 (1927), p. 621-622.
- [4] Voir Lefschetz (a) n° 71.
- [5] Lefschetz (a), formule 71.1; (b) formules (10.5), (36.2). La raison pour laquelle ces formules diffèrent de notre formule (2) par le facteur $(-1)^n$ est une différence sans importance dans la définition de l'“indice”.
- [6] J. W. Alexander, *Trans. Amer. Soc.*, 28 (1926), p. 305-306.
- [7] Voir, par exemple, Alexander, 1.c., p. 316, formule 10.6.
- [8] Alexander, 1.c., p. 306-307.

Relations de dualité en topologie

S. Lefschetz

Département de mathématiques, Université de Princeton

Communiqué le 15 mars 1929

Dans certains articles récents¹, j'ai introduit les cycles relatifs pour les ensembles de points et les relations de bord relatives et les homologies associées, qui peuvent être de quatre types : absolues, modulaires, relatives et relatives modulaires. Diverses considérations conduisent également à introduire quelques invariants analogues aux nombres de Betti, et pour tous ceux-ci, j'ai donné des preuves loc. cit. de certaines relations très générales, en particulier de dualité, qui incluent toutes celles connues précédemment.

En reprenant l'ensemble de la question, j'ai récemment eu l'occasion de réviser les démonstrations et d'étendre quelque peu les résultats. Les extensions concernent de nombreuses informations au sujet des coefficients de torsion relatifs qui n'apparaissent cependant que lorsque le sous-ensemble G du complexe porteur est polyédrique. Je ne souhaite pas m'attarder sur ces points ici. Les démonstrations modifiées sont remarquables et les changements seront maintenant indiqués dans leurs grandes lignes. Leur objectif était d'étendre autant que possible la démonstration de Poincaré pour les relations de dualité d'un M_n sans bord, et d'éviter autant que possible les indices de Kronecker comme dans les preuves originales. Les deux éléments fondamentaux de la preuve de Poincaré sont les matrices d'incidence des cellules et la construction d'un complexe dual.

Soit C_n un complexe de type Veblen qui définit un M_n et soit C_n^* son dual. Les cellules de C_n^* peuvent être orientées par rapport à celles de C_n , de telle sorte que la matrice d'incidence des h - et $(h - 1)$ -cellules de C_n soit la transversale de la matrice similaire pour les dimensions $n - h + 1$ et $n - h$ de C_n^* . De là découlent les théorèmes de dualité de Poincaré, ainsi que les extensions de Veblen et d'Alexander aux cas modulaires. Il s'agit manifestement d'une procédure aussi simple et directe que possible, et voici maintenant sa généralisation.

Qualifions de régulière une cellule de C_n qui remplit les mêmes conditions que si C_n définissait une M_n sans bord. Soit G un sous-ensemble de C_n . Si chaque cellule de C_n n'appartenant pas à G est régulière, nous dirons que C_n est une variété relativement à G , ou plus brièvement, que $C_n - G$ est une variété.

Prenons d'abord le cas où G est un sous-complexe de C_n . Soit C'_n le premier complexe dérivé de C_n (subdivision régulière de C_n). La somme des cellules de C'_n qui ont un sommet sur la cellule régulière E_h de C_n , mais qui ne rencontrent pas E_h , est une $(n - h)$ -cellule E_{n-h}^* , la transversale de E_h . La somme de ces transversales est un complexe C^* , le dual de C_n , relativement à G . Parmi ses propriétés, les suivantes sont particulièrement intéressantes : (a) $C - C^* = N$ voisinage de G sur C somme des cellules de C'_n ayant un sommet sur G . (b) Les cellules de C^* dont la somme est

1. Voir les présents Proceedings, 13 (1927), 614-622, 805-807; *Ann. of Math.*, (2) 29, (1928), 232-254.

le bord de N sont les transversales de celles de $C_n - G$ ayant un sommet sur G .

La comparaison entre les matrices d'incidence de $C_n - G$ et C^* donne toutes les relations de dualité correspondant à G , un sous-complexe de C_n . Plus généralement, on peut supposer que G est simplement un complexe polyédrique sur C_n .

Supposons maintenant que G soit un ensemble fermé arbitraire sur C_n , avec $C_n - G$ une variété. Considérons une subdivision C'_n de C_n , et soit N la somme de toutes ses cellules dont l'adhérence rencontre G . C'est un voisinage de G du même type que ci-dessus. Subdivisons davantage les cellules de N seules autant que souhaité et soit N' le voisinage analogue construit au moyen de la nouvelle subdivision, et ainsi de suite. La totalité de toutes les cellules de $C_n - N$, $N - N'$, etc., est un ensemble dénombrable de cellules régulières qui constitue ce qui peut être décrit comme un complexe infini K_n , définissant une variété infinie. Les transversales des cellules de K_n constituent un autre complexe infini K^* , le dual du premier. Les matrices d'incidence de ces complexes sont exactement comme pour les complexes ordinaires (finis) avec un nombre fini d'éléments non nuls dans chaque ligne ou colonne, mais le nombre de lignes ou de colonnes est infini (dénombrable).

L'appareil est donc disponible pour étendre l'ensemble des résultats de Poincaré avec peu de modifications relatives. En particulier, nous pouvons éviter les cycles de Vietoris complexes et artificiels, désormais remplacés par les cycles infinis (éventuellement fractionnaires) composés de cellules de K ou K^* . Les complexes infinis sont susceptibles d'autres applications. Ils sont notamment utiles pour démontrer l'invariance des nombres de Betti et de torsion relatifs. Ils ont déjà été étudiés pour $n = 2$ par Kerekjarto², mais son travail ne fait aucune mention des applications ci-dessus.



2. *Vorlesungen über Topologie.*

Sur la formule du point fixe

S. Lefschetz

(Reçu le 10 juin 1937)

L'objet de la présente note est de donner une démonstration nouvelle et définitive de la formule du point fixe pour les espaces LC (rétractions du voisinage absolu). Par souci de simplicité, nous ne considérons que les transformations continues univoques (c.s.v.t.). Une comparaison avec notre démonstration précédente³ montrera que pratiquement tout le poids de la démonstration peut maintenant être reporté sur le complexe abstrait, l'extension aux espaces abstraits étant réduite au strict minimum.

1. Notre point de départ est la formule de l'élément fixe pour les complexes abstraits⁴. Soit K un complexe fini et soient E_p^i ses éléments. Nous ne considérerons que les chaînes rationnelles et leurs transformations. Une transformation T du type envisagé a la forme

$$(1.1) \quad TE_p^i = x_{p,j}^i E_p^j; \quad x_{p,j}^i \text{ rationnelle.}$$

Pour que T possède un élément fixe, c'est-à-dire que certains E_p^i soient membres de la chaîne TE_p^i , il est nécessaire et suffisant qu'un certain nombre $x_{p,i}^i \neq 0$ (i non sommé). Une condition suffisante est alors que

$$(1.2) \quad \theta = \sum (-1)^p \text{trace } x_p \neq 0, \quad x_p = \|x_{p,j}^i\|.$$

Les transformations qui importent vraiment sont celles qui permutent avec F , l'opérateur de frontière : $TF = FT$. Cette propriété signifie que T transforme une chaîne et sa frontière en une chaîne et sa frontière, et en particulier un cycle en un cycle. On peut alors montrer que si $\{\gamma_p^i\}$ est une base pour les p -cycles et si

$$T\gamma_p^i = y_{p,j}^i \gamma_p^j, \quad \|y_{p,j}^i\| = y_p,$$

nous avons $\text{trace } x_p = \text{trace } y_p$ et donc

$$(1.3) \quad \theta = \sum (-1)^p \text{trace } y_p.$$

Le résultat précis dont nous avons besoin peut maintenant être formulé explicitement ainsi :

Théorème 1. *Si une transformation de chaîne T permutable avec F n'a pas d'éléments fixes, son invariant θ calculé à partir de (1.3) est nul. Par conséquent, une condition suffisante pour la présence d'éléments fixes est que $\theta \neq 0$.*

3. Voir nos conférences de colloque, *Topologie*, New York (1930), chapitre VII, pp. 347, 359.

4. Les détails et les références concernant la preuve de l'auteur pour les variétés, l'extension de Hopf aux complexes géométriques et la preuve de l'auteur de cette même extension se trouveront dans *Topologie*, chapitre VI. La preuve pour les complexes abstraits est due à A. W. Tucker : *Annals of Math.*, vol. 34 (1933), p. 238. Il a également introduit les transformations permutables avec F . Voir à propos du complexe abstrait : S. Lefschetz, *Bull. American Math. Soc.*, vol. 43 (1937).

C'est ce théorème que nous proposons d'étendre aux espaces LC.

2. Nous rappelons brièvement certaines définitions nécessaires, notamment celles des éléments singuliers et des espaces LC⁵. Nous considérons tout au long de ce texte un espace métrique compact de base R . Les éléments singuliers de R peuvent être introduits de deux manières distinctes. Selon une première définition, les cellules singulières sont les éléments de base et les chaînes, cycles et complexes sont définis en fonction de ces cellules⁶. Selon l'autre définition, que nous adopterons ici, chaque élément est considéré comme le c.s.v.t. d'un antécédent polyédrique simplicial déterminé à un homéomorphisme simplicial près⁷. On peut montrer que tout élément du premier type admet une subdivision du second type, de sorte que, pour ce qui est des groupes d'homologie, la différence entre les deux types n'est pas très grande.

Un complexe semi-singulier K est une image singulière d'un sous-complexe fermé L d'un complexe simplicial donné K^* qui inclut tous les sommets de K^* . La maille d'un complexe singulier est le diamètre maximal de ses cellules. La maille d'un complexe semi-singulier K associé comme ci-dessus à K^* est le maximum des diamètres des cellules réalisées et de la somme des faces réalisées des cellules non réalisées.

L'espace R est dit LC (= localement connexe) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta(\epsilon) > 0$ tel que tout complexe semi-singulier K de maille $< \eta$ peut être complété en un complexe singulier complet de maille $< \epsilon$.

Supposons que R soit un espace LC et que $\epsilon > 0$ soit donné. Choisissons $\delta = \eta(\epsilon)/4$, $\mu = \eta(\delta)$ et $\nu = \min(\mu/3, \delta)$. Choisissons ensuite un ensemble fini de points $\{A^i\}$ dans R tel que chaque point soit à une distance ν de cet ensemble. Soit Φ' le complexe ayant les A pour sommets, étant convenu que tout ensemble de sommets forme un simplexe si son diamètre est $< \mu$. On peut regarder Φ' comme un complexe semi-singulier sur R , dans ce cas le sous-complexe fermé est l'ensemble des sommets. Comme sa maille est $< \mu$, il peut être complété en un complexe singulier Φ de maille $< \delta$.

Soit τ une transformation de point définie sur tout R et envoyant chaque point sur l'un des points A^i les plus proches de lui. Soit K un complexe singulier sur R de maille $< \nu$. Considérons la transformation τ appliquée seulement aux sommets de K . Pour tout simplexe de K , le diamètre de l'ensemble dans lequel ses sommets sont envoyés est $< 3\nu \leq \mu$. Par conséquent, c'est une application simpliciale de K dans Φ' . Construisons le complexe abstrait \bar{K} composé de K et Φ' ensemble avec des cellules prismatiques joignant tout simplexe de K à son image dans Φ' . \bar{K} peut être subdivisé simplicialement sans toucher K ou Φ' et sans introduire de sommets supplémentaires⁸. Dans R ,

5. Voir S. Lefschetz, *Annals of Math.*, vol. 35 (1934), pp. 118-129 (errata dans notre article : *Duke Journal*, vol. 1 (1935), p. 1.)

6. Voir S. Lefschetz, *Bull. American Math. Soc.*, vol. 39 (1933), p. 124-129.

7. Voir notamment Alexandroff-Hopf : *Topologie*, p. 332. Ils appellent ce deuxième type d'élément singulier "continu".

8. Soient P^l, \dots, P^r les sommets de K , soit $Q^i = \tau P^i$, et soit $\zeta = P^h, \dots, P^k$ un simplexe quelconque de K . Les ensembles de sommets $P^k, \dots, P^i Q^j \dots Q^k$ sont des sommets de certains simplexes dont la dimension est $\zeta + 1$. Leurs faces réalisées sont celles de K ou Φ . La condition LC nous permet de les insérer pour toutes les cellules de K à la fois et les cellules réalisées correspondant à ζ ont pour somme la cellule de déformation $D\zeta$ de ζ au sens de

nous avons l'application partielle de \overline{K} composée de K et Φ . La maille de ce complexe semi-singulier est $< 3\nu + \delta \leq \eta(\epsilon)$; par conséquent, les cellules manquantes de \overline{K} peuvent être insérées de manière à avoir un diamètre $< \epsilon$. Puisque chaque complexe singulier a une subdivision de maille $< \nu$, nous voyons que chaque complexe singulier a une subdivision qui est ϵ -déformable en une chaîne de Φ .

Nous baserons la théorie de l'homologie de R sur les chaînes et les cycles singuliers⁹. Une conséquence immédiate du résultat ci-dessus est que chaque cycle de R est homologue à un cycle de Φ . Par conséquent, les groupes d'homologie de R sont isomorphes aux sous-groupes des groupes d'homologie d'un complexe simplicial fini. Cela implique que tous les groupes d'homologie pour les dimensions supérieures à un certain n s'annulent.

Il s'ensuit que nous pouvons trouver une base pour les p -cycles de Φ constitués de deux ensembles : $\{\Gamma_p^i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, un ensemble indépendant maximal pour R et $\{\Delta_p^i\}$, $i = 1, 2, \dots, s$ qui bornent dans R . En termes de nombres de Betti : $r = R_p(R)$, $r + s = R_p(\Phi')$. Ces ensembles ne doivent être considérés que pour $p \leq n$. Nous avons alors explicitement certaines chaînes C_{p+1}^i telles que $F(C_{p+1}^i) = \Delta_p^i$.

3. Nous sommes maintenant prêts à aborder la preuve de la formule du point fixe pour l'espace LC R . Soit T une c.s.v.t. de R dans lui-même. Son effet sur les cycles de R est décrit par des homologies

$$(3.1) \quad T\Gamma_p^i \sim y_{p,j}^i \Gamma_p^j, \quad y_p = \|y_{p,j}^i\|,$$

et nous pouvons donc introduire le nombre

$$(3.2) \quad \theta = \sum (-1)^p \text{trace } y_p.$$

θ est clairement indépendant du choix des bases et est donc une fonction de la "classe d'homologie" de T . Nous avons alors l'extension suivante du théorème 1 :

Théorème 2. *Si T est une transformation c.s.v.t. de l'espace LC R dans lui-même sans points fixes, l'invariant $\theta(T) = 0$. Par conséquent, une condition suffisante pour la présence de points fixes est $\theta \neq 0$.*

4. Supposons que T soit sans points fixes. Nous pouvons alors choisir ϵ si petit que chaque point soit déplacé d'une distance $> 4\epsilon$ par T , et ν si petit que tout ensemble de diamètre $< \nu$ est à une distance $> \epsilon$ de sa transformée. Ceci s'ajoute aux autres inégalités imposées au n° 2.

Soit maintenant Ψ le complexe singulier fini constitué de Φ et des cellules des chaînes C_{p+1}^i ($p = 0, 1, \dots, n$). Nous pouvons ϵ -déformer une λ -subdivision de $T\Psi$ en Φ (n° 2). Soit \overline{T} la transformation de chaîne induite sur Φ . C'est-à-dire que toute cellule ζ_p^i de Φ devient d'abord $T\zeta_p^i$, puis, après subdivision et ϵ -déformation, entre dans une certaine nouvelle chaîne $\overline{T}\zeta_p^i$ de Φ . Nous avons alors

Topologie p. 78. Pour que $D\zeta$ soit orienté, nous devons prendre la somme alternée des cellules.

9. Pour les espaces LC, ces cycles et leurs relations de délimitation donnent les mêmes groupes d'homologie que les cycles de Vietoris. Voir *Topologie*, p. 333.

$$(4.1) \quad \overline{T} \zeta_p^i = x_{p,j}^i \zeta_p^j.$$

Puisqu'à la fois T et la ϵ -déformation sont permutables avec F , il en va de même pour \overline{T} . Par conséquent, $\overline{T} \Gamma_p^i$ est un cycle de Φ et

$$(4.2) \quad F(\overline{T} C_{p+1}^i) = \overline{T} \Delta_p^i.$$

Puisqu'une déformation transforme un cycle en un cycle homologue, nous avons

$$\overline{T} \Gamma_p^i \sim T \Gamma_p^i \quad \text{sur } R.$$

Il s'ensuit que le cycle de Φ

$$\overline{T} \Gamma_p^i - y_{p,j}^i \Gamma_p^j \sim 0 \quad \text{sur } R.$$

et donc c'est \sim à une combinaison linéaire des Δ sur Φ , ou

$$(4.3) \quad \overline{T} \Gamma_p^i \sim y_{p,j}^i \Gamma_p^j + z_{p,j}^i \Delta_p^j \quad \text{sur } \Phi.$$

De (4.2) découle également

$$(4.4) \quad \overline{T} \Delta_p^i \sim 0 \quad \text{sur } \Phi.$$

Donc

$$\theta(\overline{T}) = \sum (-1)^p \text{trace } y_p = \theta(T).$$

Maintenant, compte tenu du choix de $\epsilon, \lambda, \mu, \nu$, chaque chaîne à droite dans (4.1) est à une distance $> \epsilon > 0$ de ζ_p^i . Par conséquent, \overline{T} n'a pas d'élément fixe, de sorte que par le théorème 1,

$$\theta(\overline{T}) = 0 = \theta(T).$$

Ceci prouve le théorème 2.

UNIVERSITÉ DE PRINCETON

3. Le théorème du point fixe de Lefschetz pour les polyèdres

10. Sous certaines conditions, il est possible de déduire des équations de transformation associées aux groupes d'homologie la présence de points fixes dans une application. Ce résultat, énoncé avec plus de précision, est le théorème du point fixe. Sa grande généralité et sa puissance seront démontrées par des exemples. Nous devons cependant d'abord traiter d'une propriété algébrique analogue pour les complexes.

(10.1) *La formule de l'élément fixe pour les complexes.* Soit $K = \{\sigma_i^p\}$ un complexe et τ une application de chaîne $K \rightarrow K$ donnée par

$$(10.2) \quad \tau \sigma_i^p = \sum a_{ij}^p \sigma_j^p.$$

Il est naturel de considérer l'élément σ_i^p comme fixe s'il entre dans le membre de droite de la relation, puis de lui attribuer le "poids" $(-1)^p a_{ii}^p$ en tant qu'élément fixe. Posons $a^p = \|a_{ij}^p\|$ et de même pour les matrices analogues. Soit également

$$(10.3) \quad \Phi(\tau) = \sum (-1)^p \text{trace } a^p,$$

où comme d'habitude

$$\text{trace } a^p = \sum a_{ii}^p$$

de sorte que $(-1)^p \text{trace } a^p$ soit la somme des poids des p -simplexes fixes. Il est clair que $\Phi(\tau) \neq 0$ implique qu'un certain $a_{ii}^p \neq 0$ et donc que τ a un ou plusieurs éléments fixes. Ceci peut être considéré comme le principe directeur général de toute la question.

Considérons maintenant l'effet de l'adoption de nouvelles bases $\{x_i^p\}$ pour les groupes de chaînes intégrales. Nous aurons

$$\sigma_i^p = \sum \xi_{ij}^p x_j^p.$$

Puisque la transformation a une inverse de même forme, le déterminant $|\xi^p| = \pm 1$, où $\xi^p = \|\xi_{ij}^p\|$. L'effet de τ sur les x_i^p est maintenant donné par

$$\tau x_i^p = \sum b_{ij}^p x_j^p,$$

$$b^p = (\xi^p)^{-1} a^p \xi^p.$$

Comme on le sait, $\text{trace } b^p = \text{trace } a^p$, et donc aussi

$$\Phi(\tau) = \sum (-1)^p \text{trace } b^p.$$

Ainsi, quelles que soient les bases choisies pour les chaînes, la forme de $\Phi(\tau)$ reste la même. Pour cette raison, on peut appeler $\Phi(\tau)$ l'invariant de trace de τ .

Tout ceci est valable bien sûr pour les changements de bases modulo π , ce dont nous aurons besoin dans un instant.

Exemple. τ est l'identité. Alors pour chaque $a^p = 1$, $\text{trace } a^p = \alpha^p$, le nombre de p -simplexes dans K , et

$$\Phi(\tau) = \sum (-1)^p \alpha^p = \xi(K),$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré de K .

Passons maintenant des bases $\{\sigma_i^p\}$ pour les chaînes aux bases rationnelles $\{\beta_i^p, \gamma_j^p, \delta_k^p\}$ de (III, 16) pour les cycles rationnels et écrivons les équations correspondantes de τ . Puisque τ commute avec F , il envoie les cycles sur des cycles et les cycles de bord sur des cycles de bords. Par conséquent, prenons $\tau\beta$ une combinaison linéaire de cycles bordants β , et $\tau\gamma$ une combinaison linéaire de cycles β, γ . Par conséquent,

$$(10.4)_p \quad \tau \beta_i^p = \sum b_{ij}^p \beta_j^p,$$

$$(10.5)_p \quad \tau \gamma_i^p = \sum b'_{ij}{}^p \beta_j^p + \sum c_{ij}^p \gamma_j^p,$$

$$(10.6)_p \quad \tau \delta_i^p = \sum b''_{ij} \beta_j^p + \sum c_{ij}^p \gamma_j^p + \sum d_{ij}^p \delta_j^p,$$

et donc

$$\Phi(\tau) = \sum (-1)^p (\text{trace } b^p + \text{trace } c^p + \text{trace } d^p).$$

Nous rappelons maintenant les relations

En appliquant F aux deux membres de (10.6)_{p+1} et en rappelant que F commute avec τ , nous avons :

$$\tau \beta_i^{p+1} = \sum d_{ij}^{p+1} \beta_j^p.$$

Donc $d_{ij}^{p+1} = b_{ij}^p$ et $\text{trace } d^{p+1} = \text{trace } b^p$. Puisqu'il n'y a pas de matrices d^0, b^n , nous avons la relation fondamentale

$$(10.7) \quad \Phi(\tau) = \sum (-1)^p \text{trace } c^p.$$

Ainsi, $\Phi(\tau)$ dépend uniquement des matrices de transformation des cycles rationnels. Remarquons que puisque les c_{ij}^p dans (10.5)_p sont des entiers, l'expression (10.7) pour $\Phi(\tau)$ montre que c'est un entier.

Puisque les γ_i^p sont, par définition, indépendants par rapport à la borne, leurs classes d'homologie $\{\Gamma_i^p\}$ forment une base pour le p -ième groupe d'homologie rationnelle $\mathfrak{H}^p(K)$. L'homomorphisme simultané τ^* induit par τ dans ces groupes est donné par

$$(10.8) \quad \tau^* \Gamma_i^p = \sum c_{ij}^p \Gamma_j^p.$$

Ainsi, dans (10.7), les c^p sont les matrices de transformation des bases des classes d'homologie des cycles rationnels. En résumé, nous pouvons énoncer :

(10.9) *Soit τ une application en chaîne d'un complexe K dans lui-même. Il existe un entier $\Phi(r)$, dépendant uniquement de l'homomorphisme simultané induit par τ dans les groupes d'homologie rationnels et tel que si $\Phi(\tau) \neq 0$, alors τ a des éléments fixes.*

Tout ce qui a été dit est valable pour les cycles modulo π . La même relation (10.5) est obtenue avec c^p remplacé par c_π^p , la matrice analogue pour les cycles modulo π , et avec Φ remplacé par $\Phi_\pi = \Phi \bmod \pi$.

11. Nous passons maintenant à notre réel problème, la question des points fixes dans les applications de polyèdres. C'est-à-dire que si f applique le polyèdre $|K|$ dans lui-même, alors x est un point fixe de f chaque fois que $fx = x$. Nous trouverons ici un analogue parfait de la propriété (10.7) pour les applications en chaîne.

Soit $\{\Gamma_i^p\}$ une base pour les classes d'homologie rationnelle. L'homomorphisme simultané dans les groupes d'homologie rationnelle donne lieu, comme précédemment, aux relations

$$(11.1) \quad f \Gamma_i^p = \sum c_{ij}^p \Gamma_j^p, \quad c^p = \|c_{ij}^p\|.$$

Le même argument qu'auparavant montre que

$$(11.2) \quad \Phi(f) = \sum (-1)^p \text{trace } c^p$$

est indépendant des bases. Nous allons maintenant démontrer le :

(11.3) **Théorème du point fixe.** *La fonction $\Phi(f)$ de l'application f de K dans lui-même est une fonction à valeurs entières telle que si $\Phi(f) \neq 0$, alors f possède un point fixe.*

Nous supposons que f n'a pas de point fixe et montrerons que cela conduit à une contradiction.

Sous l'hypothèse et puisque $|K|$ est un compact, $\epsilon = \inf d(x, fx) > 0$. En remplaçant K si nécessaire par un dérivé, nous pouvons supposer que la maille $K < \epsilon/3$. D'après (IV, 11), on peut alors choisir une subdivision K_1 de K telle qu'il existe une application barycentrique $g : K_1 \rightarrow K$ où $g \sim f$ et fx, gx peuvent être joints par un segment dans l'adhérence d'un simplexe de K . Ainsi, $d(fx, gx) < \epsilon/3$. Par conséquent, si σ est un simplexe quelconque de K , les adhérences $\bar{\sigma}$ et $g\bar{\sigma}$ sont disjointes. Car si $gx \in \sigma$, alors $d(x, fx) < d(x, gx) + d(gx, fx) < 2\epsilon/3 < \epsilon$, ce qui est exclu.

Soit θ l'application de chaînes $K_1 \rightarrow K$ induite par g , et soit d la subdivision de chaînes $K \rightarrow K_1$. D'après la remarque qui vient d'être faite, si $\sigma \in K$ et si ζ est un simplexe de K_1 contenu dans σ , alors $\theta\zeta$ est un simplexe σ_1 de K dont la fermeture $\bar{\sigma}_1$ ne rencontre pas $\bar{\sigma}$.

Considérons maintenant l'opération $\theta d : K \rightarrow K$. Si $\sigma \in K$, alors $d\sigma$ est une chaîne de K_1 dont tous les éléments sont contenus dans σ . Donc $\theta d\sigma$ est une chaîne de K dont aucun élément ne ren-

contre σ . Par conséquent, θd n'a pas d'éléments fixes. Mais d induit un isomorphisme des groupes d'homologie de K avec ceux de K_1 . Si nous identifions les classes d'homologie de K, K_1 avec celles du polyèdre $|K|$ lui-même, alors d induit l'identité dans les groupes d'homologie. Par conséquent, θd induit le même homomorphisme simultané que g , et donc que f , puisque $f \sim g$, et c'est celui qui est représenté par (11.1) en ce qui concerne les classes d'homologie rationnelles. Par conséquent, $\Phi(\theta d) = \Phi(f) = 0$ puisque θd n'a pas d'éléments fixes. Puisque cela contredit l'hypothèse que $\Phi(f) \neq 0$, notre théorème est démontré.

12. Applications. *Le théorème du point fixe de Brouwer.* Si $K = \text{Cl} \sigma^n$, alors $|K| = \bar{\sigma}^n$, K est cyclique zéro et si A représente la classe d'homologie d'un sommet, alors $fA = A$. Donc $c^0 = \|1\|, c^p = 0$ pour $p > 0$ et $\Phi(f) = 1$. Par conséquent, f a toujours un point fixe. C'est le théorème de Brouwer.

K est un arbre. Alors le polyèdre $|K|$ est contractile et donc cyclique zéro. Par conséquent, comme ci-dessus, $\Phi(f) = 1$ et possède toujours un point fixe.

Plan projectif. Les groupes d'homologie rationnelle étant ceux d'un point, nous avons à nouveau $\Phi(f) = 1$. Par conséquent, toute application d'un plan projectif dans lui-même possède toujours un point fixe.

Sphères. Soit $S^n = |\mathcal{B}\sigma^{n+1}|, n > 0$. On sait que S^n est cyclique dans les dimensions $0, n$. Si Γ^n est sa n -ième classe d'homologie de base intégrale, et A la classe d'un sommet, les seules relations significatives sont

$$fA = A, \quad f\Gamma^n = d\Gamma^n,$$

où d est le degré de f . Par conséquent,

$$\Phi(f) = 1 + (-1)^n d.$$

(12.1) *Toute application préservant [inversant] le sens d'une sphère S^n de dimension paire [impaire] dans elle-même possède un point fixe. Toute application de S^n dans elle-même dont le degré n'est pas ± 1 possède un point fixe.*

L'application aux circonférences et aux sphères ordinaires est immédiate. Ainsi, une rotation d'une circonférence suivie d'une symétrie autour d'un diamètre est une opération avec un point fixe. Une rotation ρ de S^2 a un point fixe, de même que toute application $f \sim \rho$.

Surface de genre p . Soit Φ_p , la surface, C_i, D_i , ses 1-cycles de base, A un sommet, γ^2 le 2-cycle de base (somme des 2-simplexes orientés de façon concordante). Si f envoie Φ_p sur lui-même avec degré d , alors

$$fA \sim A, \quad f\gamma^2 \sim d\gamma^2,$$

$$fC^i \sim \sum a_{ij} C_j + \sum b_{ij} D_j;$$

$$fD^i \sim \sum c_{ij} C_j + \sum d_{ij} D_j.$$

Par conséquent,

$$\Phi(f) = 1 + d - \sum (a_{ii} + d_{ii})$$

et si $\Phi(f) \neq 0$, il y a un point fixe.