

Combien mesure la côte de la Bretagne ?
Autosimilarité statistique et dimension fractionnaire
Benoît Mandelbrot ¹

Résumé

Les courbes géographiques sont si complexes dans leur détail que leurs longueurs sont souvent infinies ou, plutôt, indéfinissables. Cependant, beaucoup sont statistiquement “auto-similaires”, ce qui signifie que chaque portion peut être considérée comme une image à échelle réduite de l'ensemble. Dans ce cas, le degré de complication peut être décrit par une quantité D qui possède de nombreuses propriétés d'une “dimension”, bien qu'elle soit fractionnaire ; c'est-à-dire qu'elle excède la valeur unité associée aux courbes ordinaires, rectifiables.

Les formes des côtes maritimes sont des exemples de courbes tellement complexes que chacune de leurs portions peut - dans un sens statistique - être considérée comme une image à échelle réduite de l'ensemble. Cette propriété sera appelée “autosimilarité statistique”. Parler d'une longueur pour de telles figures est généralement dénué de sens. De même [1],

“la rive gauche de la Vistule, mesurée avec une précision accrue, fournirait des longueurs dix, cent ou même mille fois plus grandes que sa longueur telle qu'on la lit sur la carte scolaire.”

Plus généralement, les courbes géographiques peuvent être considérées comme des superpositions de parties de tailles caractéristiques très dispersées ; à mesure que l'on prend en compte des caractéristiques de plus en plus fines, la longueur totale mesurée augmente, et il n'y a généralement pas de coupure nette entre le domaine de la géographie et les détails dont la géographie n'a pas à se préoccuper.

Des quantités autres que la longueur sont donc nécessaires pour discriminer entre divers degrés de complication d'une courbe géographique. Lorsqu'une courbe est auto-similaire, elle est caractérisée par un exposant de similarité, D , qui possède de nombreuses propriétés d'une dimension, bien qu'il s'agisse généralement d'une fraction supérieure à la dimension 1 communément attribuée aux courbes. Nous réexaminerons sous cet angle certaines observations empiriques de Richardson [2]. Je propose de les interpréter comme impliquant, par exemple, que la dimension de la côte ouest de la Grande-Bretagne est $D = 1,25$. Ainsi, le concept jusqu'ici ésotérique de “figure aléatoire de dimension fractionnaire” se voit attribuer des applications simples et concrètes et une grande utilité.

Les méthodes d'autosimilarité sont un outil puissant dans l'étude des phénomènes aléatoires, y compris la géostatistique, ainsi que l'économie [3] et la physique [4]. En fait, de nombreux bruits

1. International Business Machines,
Thomas J. Watson Research Center,
Yorktown Heights, New York 10598.
Science, Nouvelle Série, Vol. 156, No. 3775. (5 Mai 1967), pp. 636-638.

ont des dimensions D comprises entre 0 et 1, de sorte que le scientifique devrait considérer la dimension comme une quantité continue allant de 0 à l'infini.

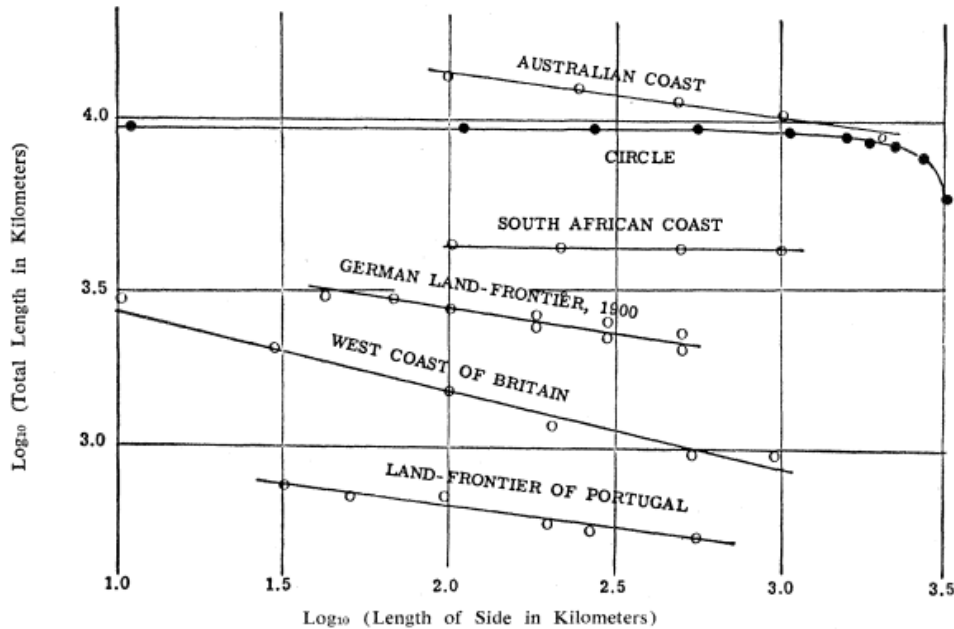


FIG. 1 : Les données de Richardson concernant les mesures de courbes géographiques au moyen de polygones réguliers dont les sommets sont sur la courbe. Pour le cercle, la longueur totale tend vers une limite lorsque la longueur du côté tend vers zéro. Dans d'autres cas, elle augmente lorsque la longueur du côté diminue, la pente du graphique doublement logarithmique étant égal en valeur absolue à $D - 1$.

Revenant à l'affirmation faite au premier paragraphe, examinons les méthodes utilisées pour tenter de mesurer la longueur d'une côte maritime. Puisqu'un géographe ne se soucie pas des détails infimes, il peut choisir une échelle positive G comme limite inférieure à la longueur des caractéristiques géographiquement significatives. Ensuite, pour évaluer la longueur d'une côte entre deux de ses points A et B , il peut tracer la courbe intérieure la plus courte joignant A et B tout en restant à une distance G de la mer. Alternativement, il peut tracer la ligne la plus courte formée de segments droits de longueur au plus G , dont les sommets sont des points de la côte qui incluent A et B . Il existe de nombreuses autres définitions possibles. En pratique, bien sûr, il faut se contenter d'approximations des chemins les plus courts. Nous supposons que les mesures sont effectuées en promenant une paire de compas le long d'une carte de manière à compter le nombre de côtés égaux de longueur G d'un polygone ouvert dont les coins reposent sur la courbe. Si G est suffisamment petit, peu importe que l'on parte de A ou de B . Ainsi, on obtient une estimation de la longueur que l'on appellera $L(G)$.

Malheureusement, les géographes ne seront pas d'accord sur la valeur de G , tandis que $L(G)$ dépend fortement de G . Par conséquent, il est nécessaire de connaître $L(G)$ pour plusieurs valeurs de G . Mieux encore, il serait agréable d'avoir une formule analytique reliant $L(G)$ à G . Une telle formule, de caractère entièrement empirique, a été proposée par Lewis F. Richardson [2] mais elle n'a malheureusement pas attiré l'attention. La formule est $L(G) = MG^{1-D}$, où M est une constante positive et D est une constante au moins égale à l'unité. On peut s'attendre à ce que ce D caractéristique d'une frontière ait une corrélation positive avec la perception visuelle immédiate de l'irrégularité de

la frontière. À une extrémité, $D = 1,00$ pour une frontière qui semble droite sur la carte. À l'autre extrémité, la côte ouest de la Grande-Bretagne a été choisie parce qu'elle semble être l'une des plus irrégulières du monde ; on a trouvé qu'elle donnait $D = 1,25$. Trois autres frontières qui, à en juger par leur aspect sur la carte, étaient plus proches de la moyenne mondiale en matière d'irrégularité, ont donné : $D = 1,15$, pour la frontière terrestre de l'Allemagne vers 1899 après J.-C. ; $D = 1,14$ pour la frontière terrestre entre l'Espagne et le Portugal et $D = 1,13$ pour la côte australienne. Une côte choisie comme étant l'une des plus lisses dans l'atlas, était celle de l'Afrique du Sud et pour elle, $D = 1,02$.

La constatation empirique de Richardson contraste nettement avec le comportement ordinaire des courbes lisses, qui sont dotées d'une longueur bien définie et sont dites "rectifiables". Ainsi, pour citer à nouveau Steinhaus [1],

“une affirmation presque en adéquation avec la réalité serait de dire que la plupart des arcs rencontrés dans la nature ne sont pas rectifiables. Cette affirmation est contraire à la croyance selon laquelle les arcs non rectifiables sont une invention des mathématiciens et que les arcs naturels sont rectifiables : c'est le contraire qui est vrai.”

J'interprète la relation de Richardson comme contraire à la croyance selon laquelle les courbes de dimension supérieure à un sont une invention des mathématiciens. Pour cela, il est nécessaire de passer en revue une caractéristique élémentaire du concept de dimension et de montrer comment elle conduit naturellement à la considération de dimensions fractionnaires.

Pour commencer, une ligne droite a pour dimension un. Par conséquent, pour tout entier positif N , le segment $(0 \leq x < X)$ peut être exactement décomposé en N segments non chevauchants de la forme

$$[(n-1)X/N \leq x < nX/N],$$

où n varie de 1 à N . Chacune de ces parties est déductible du tout par une similitude de rapport $r(N) = 1/N$. De même, un plan a pour dimension deux. Par conséquent, pour tout carré parfait N , le rectangle $(0 \leq x < X; 0 \leq y < Y)$ peut être décomposé exactement en N rectangles non chevauchants de la forme

$$[(k-1)X/\sqrt{N} \leq x < kX/\sqrt{N}, (h-1)Y/\sqrt{N} \leq y < hY/\sqrt{N}],$$

où k et h varient de 1 à $\sqrt{N}$. Chacune de ces parties est déductible du tout par une similitude de rapport $r(N) = 1/\sqrt{N}$. Plus généralement, chaque fois que $N^{1/D}$ est un entier positif, un parallélépipède rectangle de dimension D peut être décomposé en N parallélépipèdes déductibles du tout par une similitude de rapport $r(N) = 1/N^{1/D}$. Ainsi, la dimension D est caractérisée par la relation $D = -\log N / \log r(N)$.

Cette dernière propriété de la quantité D signifie qu'elle peut également être évaluée pour des figures plus générales qui peuvent être exactement décomposées en N parties telles que chacune des parties est déductible du tout par une similitude de rapport $r(N)$, ou peut-être par une similitude suivie d'une rotation et même d'une symétrie. Si de telles figures existent, on peut dire qu'elles ont pour dimension $D = -\log N / \log r(N)$ (voir [5]). Pour montrer que de telles figures existent, il suffit d'exhiber quelques variantes évidentes de la courbe continue non différentiable de von Koch. Chacune de ces courbes est construite comme une limite. L'étape 0 consiste à tracer le segment

$(0, 1)$. L'étape 1 consiste à tracer l'une ou l'autre des courbes brisées de la Fig. 2, chacune composée de N intervalles superposables au segment $(0, 1/4)$. L'étape 2 consiste à remplacer chacun des N segments utilisés à l'étape 1 par une courbe brisée obtenue en réduisant la courbe de l'étape 1 dans le rapport $r(N) = 1/4$. On obtient au total N^2 segments de longueur $1/16$. Chaque répétition du même processus ajoute davantage de détails ; lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini, nos courbes brisées tendent vers des limites continues et il est évident par inspection que ces limites sont auto-similaires, puisqu'elles sont exactement décomposables en N parties déductibles du tout par une similitude de rapport $r(N) = 1/4$ suivie d'une translation. Ainsi, étant donné N , la courbe limite peut être dite avoir pour dimension $D = -\log N / \log r(N) = \log N / \log 4$. Puisque N est supérieur à 4 dans nos exemples, les dimensions correspondantes sont toutes supérieures à l'unité. Considérons maintenant la longueur : à l'étape numéro s , notre approximation est composée de N^s segments de longueur $G = (1/4)^s$ de sorte que $L = (N/4)^s = G^{1-D}$. Ainsi, la longueur de la courbe limite est infinie, bien qu'il s'agisse d'une "ligne". (Notons qu'il n'est pas exclu qu'une courbe plane ait une dimension égale à 2. Un exemple est la courbe de Peano, qui remplit un carré.)

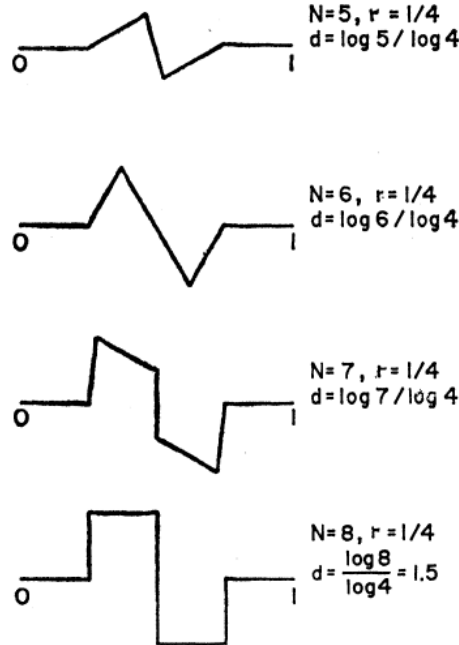


FIG. 2. Des courbes auto-similaires non rectifiables peuvent être obtenues comme suit. *Étape 1* : Choisissez l'un des dessins ci-dessus. *Étape 2* : Remplacez chacune de ses N branches par une courbe déduite du dessin entier par une similitude de rapport $1/4$. On obtient une courbe composée de N^2 branches de longueur $(1/4)^2$. *Étape 3* : Remplacez chaque branche par une courbe obtenue à partir du dessin entier par une similitude de rapport $(1/4)^2$. La courbe auto-similaire désirée est approchée par une suite infinie de ces étapes.

L'application pratique de cette notion de dimension nécessite une considération plus approfondie, car les figures auto-similaires sont rarement rencontrées dans la nature (les cristaux sont une exception). Cependant, une forme statistique d'autosimilarité est souvent rencontrée, et le concept de dimension peut être encore généralisé. Dire qu'une figure plane (fermée) est choisie au hasard implique plusieurs définitions. Premièrement, il faut sélectionner une famille de figures possibles, généralement désignée par Ω . Lorsque cette famille contient un nombre fini de membres, la règle

de choix aléatoire est spécifiée en attribuant à chaque figure possible une probabilité bien définie d'être choisie. Cependant, Ω est en général infini et chaque figure a une probabilité nulle d'être choisie. Mais des probabilités positives peuvent être attachées à des "événements" définis de manière appropriée (tels que l'événement selon lequel la figure choisie diffère peu - dans un sens spécifié - d'une figure spécifiée).

Pour que la famille Ω , ainsi que la définition des événements et de leurs probabilités, soit auto-similaire, deux conditions sont nécessaires. Premièrement, chacune des figures possibles doit être constructible en enchaînant d'une certaine manière N figures, chacune étant déduite d'une figure possible par une similitude de rapport r ; deuxièmement, les probabilités doivent être spécifiées de telle sorte que la même valeur soit obtenue que l'on sélectionne la figure globale d'un seul coup ou comme un enchaînement. (La valeur de N peut être arbitraire, ou choisie dans une séquence spécifique, comme les carrés parfaits relatifs aux rectangles non aléatoires, ou les puissances entières de 4, 5, 6 ou 7 rencontrées dans les courbes construites comme sur la Fig. 2). Dans le cas où la valeur de r est spécifiée en choisissant N , on peut considérer $-\log N/\log r$ comme une dimension de similarité. Plus généralement, cependant, étant donné r , N prendra différentes valeurs pour différentes figures de Ω . Lorsqu'on considère des points "suffisamment éloignés" les uns des autres, les détails à une échelle "suffisamment fine" peuvent devenir asymptotiquement indépendants, de telle sorte que $-\log N/\log r$ tend presque sûrement vers une limite lorsque r tend vers zéro. Dans ce cas, cette limite peut être considérée comme une dimension de similarité. Sous des conditions générales, la longueur des polygones approximaants se comportera asymptotiquement comme $L(G) \sim G^{1-D}$.

Spécifier les conditions mathématiques pour l'existence d'une dimension de similarité n'est pas un problème entièrement résolu. En fait, même l'idée qu'une courbe géographique est aléatoire soulève un certain nombre de problèmes conceptuels familiers dans d'autres applications du caractère aléatoire. Par conséquent, pour revenir à la loi empirique de Richardson, ce que l'on peut dire avec une parfaite sécurité, c'est qu'elle est compatible avec l'idée que les courbes géographiques sont des figures aléatoires auto-similaires de dimension fractionnaire D . Les scientifiques empiriques devant se contenter d'inductions moins que parfaites, je favorise l'interprétation plus positive énoncée au début de ce rapport.

Références et notes

1. H. Steinhaus, *Colloquium Math.* **3**, 1 (1954), où des références antérieures sont listées.
2. L. F. Richardson, in *General Systems Yearbook* **6**, 139 (1961).
3. B. Mandelbrot, *J. Business* **36**, 394 (1963), ou dans *The Random Character of Stock Market Prices*, P. H. Coctner, Ed. (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1964), p. 297.
4. B. Mandelbrot, *IEEE Inst. Elect. Electron. Eng. Trans. Commun. Technol.* **13**, 71 (1965) et *IEEE Inst. Elect. Electron. Eng. Trans. Inform. Theory* **13** (1967). Des considérations très similaires s'appliquent en turbulence, où les tailles caractéristiques des "caractéristiques" (c'est-à-dire les tourbillons) sont également très dispersées, comme l'a souligné Richardson lui-même dans les années 1920.
5. Le concept de "dimension" est insaisissable et très complexe, et est loin d'être épuisé par les considérations simples du type de celles utilisées dans cet article. Différentes définitions donnent fréquemment des résultats différents, et le domaine abonde en paradoxes. Cependant, la dimension de Hausdorff-Besicovitch et la dimension de capacité, lorsqu'elles sont calculées pour des figures aléatoires auto-similaires, ont jusqu'à présent donné la même valeur que la dimension de similarité.

14 novembre 1966 ; 27 mars 1967