

Les travaux de Meissel pour calculer $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x , Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

En fouillant la littérature, on découvre qu'un mathématicien allemand, Ernst Meissel (1826-1895), avait réussi à calculer par sa méthode, un nombre de nombres premiers inférieurs à 10^9 égal à 50 847 478 alors qu'il est en réalité égal à 50 847 534, ce qui correspond à une erreur (différence des deux nombres sur le plus grand des deux) approximativement égale à 0.00000110133, ce qu'on trouve complètement épatant pour la fin du XIXe siècle, uniquement en effectuant de très nombreux calculs à la main. On essaie donc d'étudier sa méthode, en compulsant ses écrits, que l'on fait traduire par google et dont on reproduit les traductions obtenues ci-dessous. Le premier article provient du volume 1, page 636, des *Mathematische Annalen*.

Sur la détermination de l'ensemble des nombres premiers dans des limites données.

Meissel

Iserlohn

La méthode permettant de séparer tous les nombres premiers des nombres naturels en éliminant leurs multiples est connue sous le nom de "crible d'Ératosthène". Burckhardt l'a utilisée pour construire ses tables de facteurs, à partir desquelles il a trouvé, par dénombrement, l'ensemble des nombres premiers inférieurs à trois millions.

La facilité avec laquelle des erreurs peuvent se produire est illustrée par le nombre d'erreurs de dénombrement contenues dans le deuxième volume des œuvres de Gauss, pages 436/437. En voici quelques exemples :

| Chiliades | Gauss | Valeur effective | Chiliades | Gauss | Valeur effective |
|-----------|-------|------------------|-----------|-------|------------------|
| 20 | 102 | 104 | 501 | 78 | 79 |
| 159 | 87 | 77 | 546 | 68 | 69 |
| 199 | 96 | 86 | 601 | 75 | 76 |
| 206 | 85 | 83 | 625 | 68 | 78 |
| 245 | 78 | 88 | 668 | 73 | 74 |
| 289 | 85 | 77 | 675 | 69 | 73 |
| 290 | 84 | 85 | 784 | 74 | 75 |
| 334 | 80 | 81 | 800 | 81 | 71 |
| 352 | 80 | 81 | 879 | 68 | 78 |
| | | | 985 | 74 | 70 |

J'ai trouvé dix-huit de ces erreurs par comptage direct ; cependant, j'ai dû négliger l'erreur dans le 501e nombre car mon résultat de comptage correspondait à celui de Gauss. Je ne l'ai découverte que plus tard en utilisant la méthode suivante pour déterminer l'ensemble des nombres premiers dans des limites numériques données.

Notation.

Soit $p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; \dots p_n$ le n -ième nombre premier ; de plus, $\pi(m)$ est l'ensemble des nombres premiers $\leq m$.

Si l'on développe le produit $m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ et que l'on note chaque terme avec le signe E à l'intérieur de son signe (c'est-à-dire, selon Legendre, que l'on omet sa partie décimale), on obtient une fonction des deux éléments m et n , que l'on peut noter $\Phi(m, n)$ ou plus simplement (m, n) .

1. La fonction $\Phi(m, n)$ exprime l'ensemble des nombres qui, dans l'intervalle $[1, m]$ inclus, ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.
2. Si vous définissez $n = \Phi(m)$, alors $\Phi(m, \pi(n)) = 1$, parce que, dans l'intervalle $[1, m]$, $\Phi(m, a + \pi(m))$ n'est divisible par aucun des $\pi(m)$ premiers nombres premiers.
3. De plus,

$$\begin{aligned} \Phi(m, a + \pi(m)) &= 1 \\ \{a \geq 0\} &\text{ en tout} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (m, a) &= 1 + \pi(m) - a \\ \pi(m) \geq a &\geq \pi(\sqrt{m}) \end{aligned} \quad .$$

Parce que le symbole $\Phi(m, a)$ exprime l'ensemble des nombres de l'intervalle $[1, m]$ qui ne sont pas divisibles par a premiers nombres premiers. Ce sont, outre l'unité, les nombres premiers de p_{a+1} inclus à m inclus, à savoir $p_{a+1}, p_{a+2}, \dots, p_{\varphi m}$ et leurs produits.

Cependant, puisque $p_{a+1} > \sqrt{m}$ par hypothèse, il n'existe aucun produit de nombres premiers dans l'intervalle p_{a+1} à m . L'ensemble des nombres premiers dans cet intervalle est $\varphi(m) - a$, donc :

$$\begin{aligned} \Phi(m, a) &= 1 + \pi(m) - a \\ \{\varphi \geq a \geq \varphi \sqrt{m}\}. \end{aligned}$$

5.

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1) - \Phi\left(E \frac{m}{p_n}, n-1\right).$$

En résolvant les symboles de fonction, les deux membres deviennent identiques.

6. La différence

$$\Phi(m+a, n) - \Phi(m, n)$$

donne l'ensemble des nombres qui, dans l'intervalle m exclu à n inclus, ne sont divisibles par aucun des n premiers nombres premiers, et dans l'intervalle $m+a$ inclus, ne sont divisibles par aucun des n premiers nombres premiers ; elle est donc égale à :

$$\varphi(m+a) - \varphi m$$

+ l'ensemble des nombres composés dans l'intervalle mentionné
dont les plus petits facteurs sont supérieurs à p_n .

7. Démonstration de la formule la plus importante pour nos besoins

$$\Phi(m, \pi(\sqrt{m}) - a) = 1 + \pi(m) - (a+1)\pi(\sqrt{m}) + \frac{a(a+3)}{2} + \sum_{s=1+\pi(\sqrt{m}-a)}^{s=\pi(\sqrt{m})} \pi\left(\frac{m}{p_s}\right) \\ \{\pi(\sqrt{m}) - \pi(\sqrt[3]{m}) \geq a \geq 0\}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \pi(\sqrt{m}) &= n + \mu \\ \pi(\sqrt[3]{m}) &= n \end{aligned}$$

Si l'on inclut s dans les limites

$$\mu \geq s \geq 0$$

alors, dans l'équation dérivée de 5., l'argument $n + s - 1$ se situe dans les limites,

$$\pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1 \geq \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} E \frac{m}{p_{n+s}} \text{ parfois} \\ n + s - 1 \text{ parfois} \end{array} \right\} \text{ lorsque } s \text{ augmente ;}$$

pour $s = 1$ mais en tout cas

$$\frac{m}{p_{n+1}} < \sqrt[3]{m^2}, \quad \sqrt{\frac{m}{p_{n+1}}} < \sqrt[3]{m}.$$

Puisque $n = \pi(\sqrt[3]{m})$, il s'ensuit que pour $s = 1$:

$$n + s - 1 \geq \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

Pour toute valeur suivante de s , on a donc :

$$n + s - 1 > \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

Par conséquent, en général,

$$n + s - 1 \geq \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

De plus, $\left. \begin{array}{l} n + s - 1 \text{ parfois} \\ E \frac{m}{p_{n+s}} \text{ parfois} \end{array} \right\}, \text{ lorsque } s \text{ diminue ;}$
pour $s = \mu$, cependant, $\frac{m}{p_{n+\mu}} \geq \sqrt{m}$

ou bien $\pi\left(\frac{m}{p_{n+\mu}}\right) \geq n + \mu > n + \mu - 1.$

Par conséquent, pour $s \leq \mu$,

$$\pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1$$

La fonction $\Phi\left(E \frac{m}{p_{n+s}}, n + s - 1\right)$ peut être obtenue à partir de l'inclusion des bornes suivante :

$$\pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1 \geq \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

Calculons à partir de 4. On obtient :

$$\Phi\left(E \frac{m}{p_{n+s}}, n + s - 1\right) = 1 + \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) - (n + s - 1)$$

donc à partir de (α) :

$$\Phi(m, n + s) = \Phi(m, n + s - 1) + n + s - 2 - \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right)$$

Ici, définissons les valeurs de a pour s :

$$\mu, \mu - 1, \dots, \mu - (a - 1) \quad \{\mu \geq a \geq 0\}$$

et ajoutons-les, donc il s'ensuit :

$$\Phi(m, \pi(\sqrt{m})) = \Phi(m, \pi(\sqrt{m}) - a) + a\pi(\sqrt{m}) - \frac{a(a+3)}{2} - \sum_{\mu+1-a}^{\mu} \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right)$$

Pour le membre de gauche, il faut maintenant introduire la valeur $1 + \pi(m) - \pi(\sqrt{m})$ résultant de 4, alors on obtient :

$$\Phi(m, \pi(\sqrt{m}) - a) = 1 + \pi(m) - (a+1)\pi(\sqrt{m}) + \frac{a(a+3)}{2} + \sum_{1+\pi(\sqrt{m}-a)}^{\pi(\sqrt{m})} \pi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

8. Si on a configuré comme précédemment

$$\begin{aligned} n + \mu &= \pi(\sqrt{m}) = \pi_2, \\ n &= \pi(\sqrt[3]{m}) = \pi_3, \end{aligned}$$

dans la formule 7, $\sqrt{a} = \mu$, on obtient l'équation principale pour calculer l'ensemble des nombres premiers de 1 à m :

$$\pi(m) = \Phi(m, n) + n(\mu + 1) + \frac{\mu(\mu - 1)}{2} - 1 - \sum_1^{\mu} \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

9. On peut également considérer une formule qui simplifie considérablement les calculs.

Soit :

$$m = g \cdot p_1 p_2 p_3 \dots p_n + r ; \quad \{g, r \text{ suffisamment grands}\}$$

ainsi

$$\Phi(m, n) = g \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1) + \Phi(r, n).$$

Afin de simplifier davantage les calculs, j'ai construit un tableau de

$$(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1)(7 - 1)(11 - 1) = 480 \text{ valeurs.}$$

Ces valeurs permettent de déduire la valeur de $\Phi(m, 5)$ à l'aide de l'étape 9.

De plus, j'ai construit un tableau pour

$$\Phi(100m, 5n) \text{ pour } m \leq 800 \text{ et pour } n \text{ entre 2 et 6.}$$

De plus, j'ai utilisé une liste des 4 500 premiers nombres premiers, ainsi qu'une table que j'ai élaborée (pour n jusqu'à 2000) pour des calculs plus poussés.¹

Les quatre exemples suivants illustreront la méthode.

Expérimentons la méthode pour effectuer les calculs suivants :

- 1) $\varphi(20000)$
- 2) $\varphi(500000)$
- 3) $\varphi(1000000)$
- 4) $\varphi(10000000)$.

1. À cette occasion, j'ai relevé les erreurs suivantes dans la troisième édition de la version stéréotypée du Recueil de tables mathématiques de Hülse :

La page 431 devrait être supprimée, car le nombre premier 173279 se factorise en 241×719 .

La page 432 ne contient pas le nombre premier 177 347.

$$1) \quad m = 20000$$

$$n + \mu = 34$$

$$n = 9; \quad \mu = 25$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, n) - 1 + 9.26 + \frac{25 \cdot 24}{2} - \sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 1547$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 9) - 1014$$

| | | | |
|--------------|--------------------------------|----------------|---------------|
| $\Phi(m, 9)$ | $= \Phi(m, 8) - \Phi(869, 8)$ | $= \Phi(m, 8)$ | -148 |
| $\Phi(m, 8)$ | $= \Phi(m, 7) - \Phi(1052, 7)$ | $= \Phi(m, 7)$ | -189 |
| $\Phi(m, 7)$ | $= \Phi(m, 6) - \Phi(1176, 6)$ | $= \Phi(m, 6)$ | -224 |
| $\Phi(m, 6)$ | $= \Phi(m, 5) - \Phi(1538, 5)$ | $= \Phi(m, 5)$ | -320 |
| $\Phi(m, 9)$ | $= \Phi(m, 5)$ | | -881 |
| | $= 4157$ | | $-881 = 3276$ |
| $\varphi(m)$ | $= 2262.$ | | |

$$\begin{aligned}
& 2) \ m = 500\ 000 \\
& \quad n + \mu = 126 \\
& \quad n = 22 ; \ \mu = 104 \\
& \varphi(m) = \Phi(m, 22) + 7665 - \sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) \\
& \sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 28543 \\
& \Phi(6329, 21) = 805 \\
& \Phi(6849, 20) = 868 \\
& \Phi(7042, 19) = 901 \\
& \Phi(7462, 18) = 958 \\
& \Phi(8196, 17) = 1069 \\
& \Phi(8474, 16) = 1123 \\
& \Phi(9433, 15) = 1281 \\
& \Phi(10638, 14) = 1481 \\
& \Phi(11627, 13) = 1661 \\
& \Phi(12195, 12) = 1798 \\
& \Phi(13513, 11) = 2056 \\
& \Phi(16129, 10) = 2549 \\
& \Phi(17241, 9) = 2822 \\
& \Phi(21739, 8) = 3722 \\
& \Phi(26315, 7) = 4752 \\
& \Phi(29411, 6) = 5642 \\
& \Phi(38461, 5) = 7994 \\
& \text{Summa} = 41482 \\
& \Phi(m, 22) = \Phi(m, 5) - \text{Summa} \\
& \Phi(m, 5) = 103898 \\
& \text{Summa} = 41482 \\
& \Phi(m, 22) = 62416 \\
& \Phi(m) = 41538
\end{aligned}$$

$$3)m = 1\,000\,000$$

$$n + \mu = 168$$

$$n = 25 ; \mu = 143.$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 25) + 13752 - \sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 56014$$

$$\Phi(10309, 24) = 1245$$

$$\Phi(11235, 23) = 1355$$

$$\Phi(12048, 22) = 1461$$

$$\Phi(12658, 21) = 1554$$

$$\Phi(13698, 20) = 1701$$

$$\Phi(14084, 19) = 1776$$

$$\Phi(14925, 18) = 1911$$

$$\Phi(16393, 17) = 2144$$

$$\Phi(16949, 16) = 2262$$

$$\Phi(18867, 15) = 2576$$

$$\Phi(21276, 14) = 2983$$

$$\Phi(23255, 13) = 3357$$

$$\Phi(24390, 12) = 3618$$

$$\Phi(27027, 11) = 4137$$

$$\Phi(32258, 10) = 5099$$

$$\Phi(34482, 9) = 5647$$

$$\Phi(43478, 8) = 7435$$

$$\Phi(52631, 7) = 9503$$

$$\Phi(58823, 6) = 11284$$

$$\Phi(76923, 5) = 15984$$

$$\text{Summa} = 87032$$

$$\Phi(m, 5) = 207792$$

$$\Phi(m, 25) = 120760$$

$$\Phi(m) = 78498$$

$$4)m = 10000000$$

$$n + \mu = 446$$

$$n = 473 ; \mu = 399$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 47) + 98200 - \sum_{48}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\Phi(47393, 46) = 4844$$

$$\Phi(50251, 45) = 5128$$

$$\Phi(50761, 44) = 5185$$

$$\Phi(51813, 43) = 5304$$

$$\Phi(52356, 42) = 5375$$

$$\Phi(55248, 41) = 5685$$

$$\Phi(55865, 40) = 5772$$

$$\Phi(57803, 39) = 6007$$

$$\Phi(59880, 38) = 6249$$

$$\Phi(61349, 37) = 6433$$

$$\Phi(63694, 36) = 6725$$

$$\Phi(66225, 35) = 7035$$

$$\Phi(67114, 34) = 7182$$

$$\Phi(71942, 33) = 7769$$

$$\Phi(72992, 32) = 7957$$

$$\Phi(76335, 31) = 8399$$

$$\Phi(78740, 30) = 8749$$

$$\Phi(88495, 29) = 9956$$

$$\Phi(91743, 28) = 10452$$

$$\Phi(93457, 27) = 10780$$

$$\Phi(97087, 26) = 11345$$

$$S_1 = 152331$$

$$\begin{aligned}
\Phi(99009, 25) &= 11711 \\
\Phi(103092, 24) &= 12359 \\
\Phi(112359, 23) &= 13669 \\
\Phi(120481, 22) &= 14877 \\
\Phi(126582, 21) &= 15872 \\
\Phi(136986, 20) &= 17468 \\
\Phi(140845, 19) &= 18250 \\
\Phi(149253, 18) &= 19656 \\
\Phi(163934, 17) &= 21976 \\
\Phi(169491, 16) &= 23124 \\
\Phi(188679, 15) &= 26229 \\
\Phi(212765, 14) &= 30206 \\
\Phi(232558, 13) &= 33781 \\
\Phi(243902, 12) &= 36294 \\
\Phi(270270, 11) &= 41318 \\
\Phi(322580, 10) &= 50950 \\
\Phi(344827, 9) &= 56406 \\
\Phi(434782, 8) &= 74357 \\
\Phi(526315, 7) &= 95017 \\
\Phi(588235, 6) &= 112830 \\
\Phi(769230, 5) &= 159840 \\
S_2 &= 886190 \\
\Phi(m, 47) &= \Phi(m, 5) - (S_1 + S_2) = 2077921 - (S_1 + S_2) = 1039400 \\
\sum_{\substack{130 \\ 48 \\ 400}} &= 220747 ; \sum_{\substack{220 \\ 131 \\ 446}} &= 108791 ; \sum_{\substack{310 \\ 221 \\ 446}} &= 69826 \\
\sum_{\substack{48 \\ 311}} &= 51635 ; \sum_{\substack{401 \\ 401}} &= 22021 ; \sum_{\substack{48 \\ 48}} &= 473021 \\
\varphi(m) &= 664579.
\end{aligned}$$

Les résultats du recueil suivant ont été obtenus par comptage direct à partir des tables de Burckhardt et par calcul selon la méthode ci-dessus, et sont cohérents.

| Chiliades | Nombre de nombres premiers |
|-----------|----------------------------|
| 100 | 9592 |
| 200 | 17984 |
| 300 | 25997 |
| 400 | 33860 |
| 500 | 41538 |
| 600 | 49098 |
| 700 | 56543 |
| 800 | 63951 |
| 900 | 71274 |
| 1000 | 78498 |

Par conséquent, les tables de Burckhardt sont correctes pour les nombres premiers jusqu'à un million.

Une fois le calcul du nombre de nombres premiers des cent premiers millions de nombres terminé, je publierai le résultat.

ISERLOHN, LE 27 MARS 1869.

Calcul de l'ensemble des nombres premiers qui figurent parmi les 500 000 premiers nombres entiers naturels

Meissel

Iserlohn

Le calcul suivant fait suite à celui du cardinal de l'ensemble des nombres premiers présenté dans le volume 1 de cette revue, page 636. Si les notations utilisées conservent leur signification, alors les résultats suivants s'appliquent.

$$\begin{aligned} m &= 100\,000\,000 \\ n + \mu &= q\sqrt{m} = 1229 \\ n &= \varphi\sqrt{m} = 90 \\ \mu &= 1139 \\ \varphi(m) &= \Phi(m, 90) + 750690 - \sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_0}\right). \end{aligned}$$

Calcul de $\Phi(m, 90)$

a) calcul de $\Phi(m, 90)$ par $\Phi(m, 80)$

$$\Phi(215\,982, 89) = 19\,199$$

$$\Phi(216\,919, 88) = 19\,277$$

$$\Phi(218\,818, 87) = 19\,434$$

$$\Phi(222\,717, 86) = 19\,770$$

$$\Phi(225\,733, 85) = 20\,037$$

$$\Phi(227\,790, 84) = 20\,222$$

$$\Phi(230\,946, 83) = 20\,516$$

$$\Phi(232\,018, 82) = 20\,622$$

$$\Phi(237\,529, 81) = 21\,079$$

$$\Phi(238\,663, 80) = 21\,199$$

$$\text{Summa} = 201\,355$$

$$\text{a) } \Phi(m, 90) = \Phi(m, 80) - 201\,355$$

Transcription en L^AT_EX et traduction depuis l'allemand par Google trad. : Denise Vella-Chemla, novembre 2025.

b) calcul de $\Phi(m, 80)$ par $\Phi(m, 70)$

$$\Phi(244\,498, 79) = 21\,733$$

$$\Phi(249\,376, 78) = 22\,191$$

$$\Phi(251\,889, 77) = 22\,448$$

$$\Phi(257\,069, 76) = 22\,937$$

$$\Phi(261\,096, 75) = 23\,338$$

$$\Phi(263\,852, 74) = 23\,625$$

$$\Phi(268\,096, 73) = 24\,070$$

$$\Phi(272\,479, 72) = 24\,520$$

$$\Phi(278\,551, 71) = 25\,121$$

$$\Phi(283\,286, 70) = 25\,615$$

$$\text{Summa} = 235\,598$$

$$\text{b) } \Phi(m, 80) = \Phi(m, 70) - 235\,598$$

c) calcul de $\Phi(m, 70)$ par $\Phi(m, 60)$

$$(286\,532, 69) = 25\,979$$

$$(288\,184, 68) = 26\,190$$

$$(296\,735, 67) = 27\,047$$

$$(302\,114, 66) = 37\,625$$

$$(315\,457, 65) = 28\,955$$

$$(319\,488, 64) = 29\,451$$

$$(321\,543, 63) = 29\,757$$

$$(325\,732, 62) = 30\,273$$

$$(341\,296, 61) = 31\,866$$

$$(353\,356, 60) = 33\,159$$

$$\text{Summa} = 290\,302$$

$$\text{c) } \Phi(m, 70) = \Phi(m, 60) - 290\,302$$

d) calcul de $\Phi(m, 60)$ par $\Phi(m, 50)$

$$\Phi(355\,871, 59) = 33\,552$$

$$\Phi(361\,010, 58) = 34\,182$$

$$\Phi(369\,003, 57) = 35\,117$$

$$\Phi(371\,747, 56) = 35\,539$$

$$\Phi(380\,228, 55) = 36\,533$$

$$\Phi(389\,105, 54) = 37\,581$$

$$\Phi(398\,406, 53) = 38\,708$$

$$\Phi(414\,937, 52) = 40\,559$$

$$\Phi(418\,410, 51) = 41\,129$$

$$\Phi(429\,184, 50) = 42\,4328$$

$$\text{Summa} = 375\,328$$

$$\text{d) } \Phi(m, 60) = \Phi(m, 50) - 375\,328$$

e) Calcul de $\Phi(m, 50)$ par $\Phi(m, 40)$

$$\Phi(436\ 681, 49) = 43\ 464$$

$$\Phi(440\ 528, 48) = 44\ 092$$

$$\Phi(448\ 430, 47) = 45\ 150$$

$$\Phi(473\ 933, 46) = 48\ 056$$

$$\Phi(502\ 512, 45) = 51\ 344$$

$$\Phi(507\ 614, 44) = 52\ 209$$

$$\Phi(518\ 134, 43) = 53\ 658$$

$$\Phi(523\ 560, 42) = 54\ 593$$

$$\Phi(532\ 486, 41) = 58\ 061$$

$$\Phi(538\ 659, 40) = 59\ 115$$

$$\text{Summa} = 509\ 742$$

$$\text{e) } \Phi(m, 50) = \Phi(m, 40) - 509\ 742$$

f) Calcul de $\Phi(m, 40)$ par $\Phi(m, 30)$

$$\Phi(578\ 034, 39) = 61\ 636$$

$$\Phi(598\ 802, 38) = 64\ 348$$

$$\Phi(613\ 496, 37) = 66\ 451$$

$$\Phi(636\ 942, 36) = 69\ 539$$

$$\Phi(662\ 251, 35) = 72\ 899$$

$$\Phi(671\ 140, 34) = 74\ 466$$

$$\Phi(719\ 424, 33) = 80\ 548$$

$$\Phi(729\ 927, 32) = 82\ 414$$

$$\Phi(763\ 358, 31) = 86\ 955$$

$$\Phi(787\ 401, 30) = 90\ 486$$

$$\text{Summa} = 749\ 742$$

$$\text{f) } \Phi(m, 40) = \Phi(m, 30) - 749\ 742$$

g) Calcul de $\Phi(m, 30)$ par $\Phi(m, 20)$

$$\Phi(884\ 955, 29) = 102\ 740$$

$$\Phi(917\ 431, 28) = 107\ 565$$

$$\Phi(934\ 579, 27) = 110\ 631$$

$$\Phi(970\ 873, 26) = 116\ 076$$

$$\Phi(990\ 099, 25) = 119\ 553$$

$$\Phi(1\ 030\ 927, 24) = 125\ 779$$

$$\Phi(1\ 123\ 595, 23) = 138\ 582$$

$$\Phi(1\ 204\ 819, 22) = 150\ 352$$

$$\Phi(1\ 265\ 822, 21) = 159\ 911$$

$$\Phi(1\ 369\ 863, 20) = 175\ 352$$

$$\text{Summa} = 1\ 306\ 541$$

$$\text{g) } \Phi(m, 30) = \Phi(m, 20) - 1\ 306\ 541$$

h) Calcul de $\Phi(m, 20)$ par $\Phi(m, 10)$

$$\Phi(1\,408\,450, 19) = 182\,783$$

$$\Phi(1\,492\,537, 18) = 196\,553$$

$$\Phi(1\,639\,344, 17) = 219\,394$$

$$\Phi(1\,694\,915, 16) = 230\,684$$

$$\Phi(1\,886\,792, 15) = 261\,685$$

$$\Phi(2\,127\,659, 14) = 301\,485$$

$$\Phi(2\,325\,581, 13) = 337\,383$$

$$\Phi(2\,439\,024, 12) = 362\,710$$

$$\Phi(2\,702\,702, 11) = 413\,104$$

$$\Phi(3\,225\,806, 10) = 509\,509$$

$$\text{Summa} = 3\,015\,290$$

h) $\Phi(m, 20) = \Phi(m, 10) - 3\,015\,290$

i) Calcul de $\Phi(m, 10)$ par $\Phi(m, 5)$

$$\Phi(3448275, 9) = 564100$$

$$\Phi(4347826, 8) = 743582$$

$$\Phi(5263157, 7) = 950134$$

$$\Phi(5882352, 6) = 1128285$$

$$\Phi(7692307, 5) = 1598401$$

$$\text{Summa} = 4984502$$

i) $\Phi(m, 10) = \Phi(m, 5) - 4984502$

Soit $\Phi(m, 5) = 20\,779\,221$. Dans ce cas, on peut déduire, à l'aide des points a) à i), la valeur suivante pour $\Phi(m, 90)$:

$$\Phi(m, 90) = 9\,110\,821.$$

$$\text{Il reste encore à calculer } \sum_{91}^{1229} \varphi \left(\frac{m}{p_s} \right).$$

Pour faciliter la vérification, cette somme peut être présentée en paragraphes de 30 termes chacun. On obtient :

| | |
|------------------------|-------------------------|
| $(91 - 120) = 482750$ | $(661 - 690) = 67219$ |
| $(120 - 150) = 367270$ | $(691 - 720) = 64218$ |
| $(151 - 180) = 294706$ | $(721 - 750) = 61701$ |
| $(181 - 210) = 246891$ | $(751 - 780) = 59333$ |
| $(211 - 240) = 211080$ | $(781 - 810) = 57027$ |
| $(241 - 270) = 186053$ | $(811 - 840) = 55128$ |
| $(271 - 300) = 164035$ | $(841 - 870) = 52933$ |
| $(301 - 330) = 147949$ | $(871 - 900) = 51051$ |
| $(331 - 360) = 134643$ | $(901 - 930) = 49501$ |
| $(361 - 390) = 123110$ | $(931 - 960) = 47740$ |
| $(391 - 420) = 114466$ | $(961 - 990) = 46438$ |
| $(421 - 450) = 105838$ | $(991 - 1020) = 44900$ |
| $(451 - 480) = 98288$ | $(1021 - 1050) = 43492$ |
| $(481 - 510) = 92338$ | $(1051 - 1080) = 42164$ |
| $(510 - 540) = 87237$ | $(1081 - 1110) = 41196$ |
| $(541 - 570) = 82515$ | $(1111 - 1140) = 40135$ |
| $(571 - 600) = 78184$ | $(1141 - 1170) = 39157$ |
| $(601 - 630) = 74031$ | $(1171 - 1200) = 38293$ |
| $(631 - 660) = 70351$ | $(1201 - 1229) = 36119$ |

Par conséquent :

$$\varphi(m) = 5 \ 7 \ 6 \ 1 \ 4 \ \emptyset \ \emptyset$$

$$5 \ 5.$$

Sur les ensembles de nombres premiers.

Meissel

Kiel.

[justify]

Dans le troisième volume de la présente revue, à la page 523, je présente le calcul de l'ensemble des nombres premiers jusqu'à cent millions. Après avoir recalculé les positions individuelles, j'ai identifié les trois erreurs suivantes.

Page 524 :

$$\begin{aligned}\Phi(321543, 63) &= 29758 && (\text{erreur transcrite } 29757), \\ \Phi(325732, 62) &= 30274 && (\text{erreur transcrite } 30273).\end{aligned}$$

Les deux premières valeurs sont incompatibles, car j'obtiens l'une à partir de l'autre par factorisation $\sum_{91}^{1229} \varphi \left(\frac{m}{p_s} \right)$, p. 525. Colonne (451–480) = 98 291 (noté 98 288).

La troisième erreur est d'ordre optique puisque le sommant

$$\varphi \left(\frac{m}{479} \right) = \varphi \left(\frac{m}{3391} \right) = \varphi(29489) = 3203$$

car le début du terme de la somme est incorrect : $\varphi(29449) = 3200$.

Je n'ai trouvé aucune autre erreur.

Les résultats sont les suivants :

$$\begin{aligned}\Phi(m, 90) &= 9\,110\,819, \\ \sum_{91}^{1229} \varphi \left(\frac{m}{p_s} \right) &= 4\,100\,054, \\ \varphi(m) &= 5\,761\,455.\end{aligned}$$

KIEL, LE 7 OCTOBRE 1882.

Explication par Jack Peetre des travaux de Meissel²

D'abord est fournie la formule classique de calcul du nombre de nombres premiers $\leq n$ en utilisant le principe d'inclusion-exclusion et en ne faisant intervenir dans ce calcul que les nombres premiers jusqu'à \sqrt{n} , la racine carrée de n , p. 154.]

L'idée qui a alors guidé Meissel a été de faire intervenir également les nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_b \leq x^{1/3}$. Alors on a :

$$\pi(x) = [x] - \sum_{i=1}^b \left[\frac{x}{p_i} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq b} \left[\frac{x}{p_i p_j} \right] - \dots + \frac{(a+b-2)(a-b+1)}{2} - \sum_{b < i \leq a} \pi \left(\frac{x}{p_i} \right)$$

où par conséquent $a = \pi(\sqrt{x})$, $b = \pi(x^{1/3})$. La formule ci-dessus est la célèbre formule de Meissel. Ces différentes généralisations consistent à faire intervenir non seulement la racine carrée et la racine cubique mais également les racines de degré supérieur de x .

Dans la référence [13]^a, Meissel vérifia la correction de la table de Burckhardt [49] jusqu'à un milliard (10^9), mais il nota également quelques erreurs dans celle de Gauss [50]. Dans la référence [15], il considéra le nombre de nombres premiers jusqu'à mille millions (10^9), notant le résultat $\#(10^9) = 5\,761\,460$, qu'il dut plus tard corriger en $\#(10^9) = 5\,761\,455$ dans [30]. (Il avait annoncé dans une recherche précédente [12], la valeur $\pi(10^7) = 664\,599$ et avait aussi enregistré quelques erreur dans Hülse [54] ; avant lui, Legendre [57] avait noté une valeur légèrement erronée $\pi(10^6) = 78\,526$). Quelques erreur de Burkhardt [49] - dans le domaine 1 100 000 – 1 200 000 sont notées dans [31].

Finalement, Meissel poussa ses calculs jusqu'à un milliard (10^9) dans [33], où il reporta la valeur $\#(10^9) = 50\,847\,478$. Il compara ce résultat avec une formule approximative établie par Gram [52], avec lequel Meissel avait correspondu [53]. Dans cette correspondance, Meissel établit une formule asymptotique, avec terme restant pour la fonction $e^{-n-x}\text{Li}(e^{n+x})$, qui est liée au développement dans [21]. Davantage d'erreurs dans [49] furent détectées, l'une d'entre elles ayant également été déjà trouvée par Oppermann^b dans [60]. Cependant, plus de 70 ans plus tard, Lehmer a démontré (dans [92]) que la valeur de $\pi(10^9)$ donnée par Meissel était erronée, la valeur correcte étant $\pi(10^9) = 50\,847\,534$, ce qui signifie que Meissel avait omis^c 56 nombres premiers^d.

a. donc en 1870, soit 11 ans après la note de Riemann.

b. Supposément le professeur de Gram ; voir Nørlund [101,74].

c. ce qui correspond à l'erreur de 0.00000110133 % que l'on a notée en introduction à ces traductions.

d. Dans [96], qui, par ailleurs, ne présente que peu d'intérêt pour nous, si ce n'est qu'il confirme certains éléments biographiques mentionnés plus haut dans le *Lebenslauf*, on trouve une brève communication (datée de Kiel, le 2 juillet 1885) dans laquelle Meissel indique qu'"*ich während der Juliferien nach Bremerhaven und Copenhagen zu reisen beabsichtige*" (trad : J'ai l'intention de me rendre à Bremerhaven et à Copenhague pendant les vacances de juillet) [96, 69]. Peut-on supposer qu'il a rencontré Gram, Oppermann et peut-être d'autres mathématiciens danois (ainsi que son fils à Bremerhaven) à cette occasion ? Pour un autre lien avec le Danemark, voir la note 7 ci-dessus.

2. Référence : Peetre [hm22] : Outline of a scientific biography of Ernst Meissel, *Historia mathematica*, 22, 1995, 154-178.

Sur une somme théorique des nombres que Meissel considéra : observation historique

Peter Lindqvist, Jaak Peetre

Résumé : En 1866, Ernst Meissel affirma, sans démonstration, que

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \frac{1}{\alpha} + 0.2614972128 \dots \quad \text{avec } P = \{2, 3, 5, \dots\}$$

désignant l'ensemble des nombres premiers. Il est curieux de constater que les mêmes chiffres apparaissent également dans une constante d'un théorème bien connu de Mertens (1874). Dans cet article, nous proposons une démonstration élémentaire du théorème de Meissel, montrant que les deux nombres coïncident. Nous formulons également des hypothèses, à partir d'éléments trouvés dans ses archives, sur la manière dont Meissel a pu parvenir à ce résultat.

En 1866, Ernst Meissel [8] annonça un “résultat curieux” :

Si S désigne la somme de la série $\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha}$ où $P = \{2, 3, 5, \dots\}$ sont les nombres premiers, alors

$$S = \frac{1}{\alpha} + 0.2614972128 \tag{1}$$

pour α “très petit” (sehr klein)³. Aucun détail n'est donné, pas même une indication sur le sens de cette approximation.

Huit ans plus tard, en 1874, Ferdinand Mertens [10] publia un article où il établit rigoureusement l'existence de la limite :

$$M = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right).$$

Cette même série avait été initialement rencontrée par Euler [2], puis par Gauss [3], p. 12, et fut ensuite étudiée par Legendre [7] et Chebychev [1]. Mertens détermine également la valeur de M numériquement. Il s'avère que cette valeur concorde avec la constante de (1). Dans [10], Meissel n'est pas mentionné⁴. En réalité, Mertens obtient également une estimation du reste, à savoir

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \tag{2}$$

Peter Lindqvist, Institut des sciences mathématiques, Université norvégienne de Science et technologie, N-7034 Trondheim, Norvège ; Jaak Peetre, Département de mathématiques, Université de Lund, Boîte postale 118 S-221 00, Lund, Suède.

3. L'original place le premier chiffre du deuxième groupe comme 5 mais dans la copie de [8] disponible aux Archives de l'Académie de Berlin (Nachlass Meissel n° 55), celui-ci a été modifié manuellement en 7. Pour un aperçu de la vie et de l'œuvre de Meissel, voir (11). Pour plus de détails sur le Nachlass, voir [12]

4. Il est également curieux que la même constante ait été évaluée, avec 15 chiffres, par Merrifield [9] ; il ne mentionne aucun de ses prédécesseurs, hormis Euler.

D'un autre côté, pour le calcul numérique, il utilise le tableau des valeurs zêta de Legendre dans [6], p. 432, ainsi que le développement

$$M = \gamma - \frac{1}{2} \log \zeta(2) - \frac{1}{3} \log \zeta(3) - \frac{1}{5} \log \zeta(5) + \frac{1}{6} \log \zeta(6) - \frac{1}{7} \log \zeta(7) + \dots, \quad (3)$$

où γ est le nombre d'Euler-Mascheroni et ζ la fonction zêta de Riemann.

Le théorème de Mertens a été reproduit par Landau dans [5], vol. 1, p. 100-102 et 135-140, où une démonstration différente est proposée. Landau n'a pas tenu compte de la valeur de la constante, et les auteurs de manuels ultérieurs (Ingham ; Hardy-Wright ; Prahar ; Nagel ; Apostol, etc.) ont suivi son exemple sur ce point.

Dans [15], le théorème est, à tort, attribué à Hadamard et de la Vallée-Poussin ; le nombre M y est donné avec les mêmes 15 chiffres que dans [9] : $M = 0,261497212847643$. Apparemment, cela a incité l'auteur de la base de données Mac Soft "Constantes mathématiques favorites" à désigner cette constante (et d'autres) comme la constante d'Hadamard et de de la Vallée Poussin.

En réponse à une objection lancée aux théoriciens des nombres par l'un des auteurs, le professeur Andrzej Schinzel [16] a fourni une démonstration directe, fondée sur le théorème des nombres premiers, de la coïncidence des deux limites. Un peu plus tard, l'autre auteur a trouvé une démonstration élémentaire de ce résultat, que nous reproduisons ici. Elle repose sur une identité que l'on trouve dans de nombreux manuels et qui peut être démontrée par intégration par parties, par exemple.

Lemme. Soit c_1, c_2, \dots une suite quelconque de nombres réels telle que $c_1 = 0$. On définit les sommes cumulées $C(t) = \sum_{n \leq t} c_n$. De plus, soit $f(x)$ une fonction continue quelconque admettant une dérivée continue pour $2 \leq x < \infty$. Alors, on a

$$\sum_{n \leq x} c_n f(x) = C(x)f(x) - \int_2^x C(t)f'(t)dt.$$

En posant $c_n = \frac{1}{p}$ si $n = p$ est premier et nul sinon, et en posant $f(x) = (\log x)^{-\alpha}$, on obtient du lemme :

$$\sum \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \frac{1}{(\log x)^\alpha} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \alpha \int_2^x \frac{\sum_{p \leq t} \frac{1}{p}}{t(\log t)^{1+\alpha}} dt$$

Si l'on fait tendre $x \rightarrow \infty$, le premier terme à droite s'annule pour tout $\alpha > 0$ du fait du théorème de Mertens, et on obtient

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \alpha \int_2^\infty \frac{\sum_{p \leq t} \frac{1}{p}}{t(\log t)^{1+\alpha}} dt.$$

En utilisant sa forme précise (2), nous pouvons maintenant écrire

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \alpha \int_2^\infty \frac{\log \log t}{t(\log t)^{1+\alpha}} dt + \alpha M \int_2^\infty \frac{dt}{t(\log t)^{1+\alpha}} + \alpha O\left(\int_2^\infty \frac{dt}{t(\log t)^{2+\alpha}}\right).$$

En intégrant par parties, on peut écrire la première intégrale à droite comme suit :

$$\alpha \int_2^\infty \frac{\log \log t}{t(\log t)^{1+\alpha}} dt = - \left[\frac{\log \log t}{(\log t)^\alpha} \right]_2^\infty + \int_2^\infty \frac{dt}{t(\log t)^{1+\alpha}}$$

Donc

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \frac{\log \log 2}{(\log 2)^\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + M \right) \frac{1}{(\log 2)^\alpha} + O(\alpha)$$

ou, en remarquant que

$$\frac{1}{(\log 2)^\alpha} = e^{-\alpha \log \log 2} = 1 - \alpha \log \log 2 + O(\alpha^2),$$

finalement

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} = \frac{1}{\alpha} + M + O(\alpha)$$

lorsque $\alpha \rightarrow 0+$. C'est le résultat de Meissel, modulo l'évaluation de la constante.

On peut énoncer ce résultat comme suit.

Théorème. *On a*

$$M = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\sum_{p \in P} \frac{1}{p(\log p)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right) = 0.261497212847643 \dots$$

Du point de vue de l'historien des mathématiques, plusieurs problèmes demeurent. Comment Meissel est-il parvenu à son curieux résultat ? De toute évidence, compte tenu de la faible convergence des séries en question (voir [14], p. 50)⁵, Meissel devait disposer d'une base théorique solide pour son affirmation. En effet, en consultant ses écrits posthumes, on constate que c'est bien le cas : il apparaît à un endroit précis (Nachlass Meissel, n° 3, p. 16-20), dans un contexte traitant par ailleurs du problème à trois corps. Il existe un recueil de formules relatives à la théorie des nombres premiers, apparemment dans un grand désordre, parmi lesquelles la suivante a immédiatement attiré notre attention :

$$\sum_1^n \frac{1}{p_n} = c_n + \log \left(\frac{p_n}{n} \right) + \frac{n + \frac{1}{2}}{p_n}.$$

On ignore de quelle époque date le carnet de notes en question, mais cela indique clairement que Meissel, à un moment donné, devait être en possession d'un résultat équivalent à celui de Mertens, même si ce n'était peut-être pas avec une démonstration rigoureuse⁶. Il est également possible qu'il

5. Nous avons calculé en utilisant **Mathematica** la somme $\sum_{p \leq w} \frac{1}{p}$ pour les 4 millions premiers nombres premiers.

Même avec la formule pour les nombres premiers de Riemann (voir [14] p. 50), nous n'avons pas obtenu plus de 5 ou 6 chiffres corrects de la constante M . Cela explique aussi probablement la piètre valeur obtenue par le jeune Gauss ([3], p. 12), $M = 0.266$.

6. On devrait rappeler qu'en ces temps (le milieu des années 1860) où [...] *Note de la traductrice : naquit (trad. de "came into existence") quelque chose, il semble manquer un mot dans la note de bas de page*, Meissel travaillait de façon très isolée à Iserlohn, apparemment sans contact extérieur et sans accès à une bibliothèque. Il est vraisemblable qu'il ait eu en sa possession une copie du livre de Legendre [7] (cf. [11] p. 162-175), mais il n'avait probablement pas connaissance du travail de Chebyshev.

ait connu le développement (3). Cette hypothèse est confortée par le fait que les deux mathématiciens donnent exactement 10 décimales, ce qui suggère qu'ils ont tous deux pu utiliser la table de Legendre [6].

Remarque. Mentionnons quelques faits connexes : Nous avons également trouvé un petit tableau (Nachlass Meissel, n° 35), probablement de la fin de sa période Iserlohn, de la fonction $f(\alpha) = \sum_P \frac{1}{p^\alpha \log p}$ pour les valeurs $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 60$. (Ceci est noté comme intégrale de la première fonction zêta $P(\alpha) = \sum_P \frac{1}{p^\alpha}$, $f'(\alpha) = -P(\alpha)$). En effet, Meissel a considéré non seulement la première fonction zêta, mais aussi la première fonction thêta $T(x) = \sum_P e^{-xp}$ (Nachlass Meissel, n° 38). S'il avait connaissance de l'article de Riemann, figurant dans le Nachlass (Nachlass Meissel, n° 40), on y trouve quelques calculs relatifs à la fonction ξ de Riemann. Par exemple, il donne également un autre tableau court incluant la valeur, peu précise, $\xi(12) = 0,0088331$; il est regrettable qu'il n'ait pas poursuivi ses recherches, car il aurait pu découvrir le premier zéro de ζ sur la ligne critique, anticipant ainsi les travaux bien plus tardifs de Gram [4]. Nous espérons pouvoir analyser plus en détail les contributions de Meissel à la théorie des nombres ultérieurement.

En conclusion, nous proposons de nommer le nombre M “*constante de Meissel*”.

Remerciements : Nous tenons à remercier G. Almkvist, C.-E. Fröberg et A. Schinzel pour leurs précieux conseils et/ou informations utiles concernant cette recherche.

Références

- [1] P. L. Chebyshev (Tschebychef), Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers. J. Math. Pures Appl. L. série. 17, 1852, 341-365. (Also in : Œuvres, t. I. St. Pétersburg, 1899, p. 29-48.)
- [2] L. Euler, Variæ observationes circa series infinites. Comm. Acad. Petropolitanae 9 (1737), 222-236. (Also in : Opera omnia 14, p. 216-244.)
- [3] C. F. Gauss, Werke 10,. Teubner, Leipzig, 1917.
- [4] J. P. Gram, Note sur les zéros de la fonction ((s) de Riemann. Acta Mathematica 27, 289-304, 1903.
- [5] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I-II. Teubner, Leipzig Berlin, 1909.
- [6] A.-M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes II. Imprimerie de Huzard-Courcier, Paris, 1826.
- [7] A.-M. Legendre, Théorie des nombres I-II. Troisième édition. Paris, 1830. Reprinted : A. Blanchard, Paris, 1955.
- [8] E. Meissel, Notiz. Nachr. Provinzial-Gewerbeschule Iserlohn 1866.
- [9] C. W. Merrifield, The sums of the series of the reciprocals of the prime numbers and their powers. Proc. Royal Soc. 33, 1881, 4-10.
- [10] F. Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. J. Reine Angew. 17 (1874), 46-62.
- [11] J. Peetre, Outline of a scientific biography of E. Meissel (1826-1895). Hist. Math. 22 (1995), 154-178.

- [12] J. Peetre, Ernst Meissel and the Pythagorean problem the Drei-Körper-Problem in the Nachlass Meissel. In preparation.
- [13] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Mo-natsber. Berl. Akad. 1859. (Also in : Werke. Zweite Auflage. Teubner, Leipzig, 1892, p. 145-153.
- [14] H. Riesel, Prime numbers and computer methods for factorization. Second edition. Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1994.
- [15] J. B. Rosser L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math. 6, 1962, 64-89.
- [16] A. Schinzel, personal communication February 24, 1996.
- [17] A. Selberg, The history of the Prime Number Theorem. Lecture delivered at Trond-heim September 27, 1996.

[p. 164 de l'article de Jaak Peetre]

On traduit cette partie car on s'interroge sur le fait que Galois ajoute un i dans la formule de Legendre, et qu'il est question ci-dessous de la formule de Legendre, telle que Meissel l'utilise.]

Dans [19], Meissel commence par donner une démonstration originale de la célèbre relation de Legendre qui a pour effet que

$$F(k)E(k') + F(k')E(k) - F(k)F(k') = \frac{\pi}{2},$$

où $F(k)$ et $E(k)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce respectivement, et où k' est le module complémentaire $k' = \sqrt{1 - k^2}$. La démonstration de Meissel s'appuie sur la théorie des transformations. L'idée est d'utiliser non seulement des transformations d'ordre entier n , mais aussi celles d'ordre fractionnaire. On montre que, pour tout k donné, le membre de gauche de (2) reste inchangé pour un ensemble infini de modules transformés λ , d'où l'on peut conclure qu'il est constant partout. Une fois cela démontré, il est facile de voir ensuite que cette constante doit être égale à $\pi/2$. Suivant cela, l'auteur impose alors la restriction $\lambda = k'$, ce qui fixe k pour un n donné. Par exemple, dans le cas le plus simple des transformations du second ordre ($n = 2$), Meissel a trouvé que

$$\begin{cases} k = \sqrt{2} - 1, \\ E(k) = \sqrt{\frac{1}{2}}F(k) + \frac{\pi}{4F(k')} \\ E(k') = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)F(k') + \frac{\pi}{4F(k)}. \end{cases}$$

Enfin, dans [8], Meissel a produit une table de $\log_{10}q$ fréquemment utilisée, où q est le nome de Jacobi, $q = e^{-\pi K'(k)/K(k)}$. (Nous préférons maintenant écrire K , et non F , pour l'intégrale elliptique complète de première espèce). Dans [79], Fletcher a pu démontrer sans aucun doute que

Bertrand a utilisé la table de Meissel dans son livre [70], bien qu'il l'ait attribuée à une autre personne, à savoir Fédor Thoman. En effet, Fletcher conjecture que “la guerre franco-prussienne a rendu inopportune une reconnaissance franche de l'origine allemande de la table de $\log q$ ”. [79, 275].

Réponse de la machine (utilisation de la plateforme `Le chat de Mistral AI`) à la question “Lorsqu’il effectue des calculs pour compter les nombres premiers, pourquoi Meissel ne cite-t-il pas Riemann alors qu’ils sont tous les deux allemands, que l’article de Riemann doit être célèbre, que l’article de Meissel est postérieur à cela de Riemann et que Riemann utilise aussi les racines n -ièmes ?”

Cette question⁷ touche à l’histoire des mathématiques et à la diffusion des idées scientifiques au XIXe siècle. Voici quelques éléments de réponse :

1. *Dates et contexte historique.*

- Riemann publie son célèbre article “*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*” en 1859, où il introduit la fonction zêta et ses liens avec la distribution des nombres premiers.
- Meissel publie sa méthode de comptage des nombres premiers en 1870 (et affine ses résultats jusqu’en 1885).

À première vue, Meissel aurait pu connaître le travail de Riemann, mais...

2. *Diffusion et réception de l’article de Riemann.*

- L’article de Riemann était très théorique et peu accessible à l’époque : il utilisait des outils analytiques avancés (fonctions complexes, intégrales de contour) qui n’étaient pas encore largement maîtrisés.
- Riemann lui-même n’a pas donné de formule explicite pour compter les nombres premiers, mais plutôt une approximation asymptotique (la fameuse formule $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$).
- Les idées de Riemann ont mis du temps à être comprises et exploitées : ce n’est qu’à partir des années 1890, avec les travaux de Hadamard et de la Vallée Poussin, que la preuve du théorème des nombres premiers (basé sur les zéros de la fonction zêta) a été établie.

3. *Approche de Meissel.*

- Meissel cherchait une méthode pratique et calculable pour compter les nombres premiers, pas une formule asymptotique.
- Sa méthode repose sur des cribles et des calculs combinatoires, très différents de l’approche analytique de Riemann.
- Meissel cite surtout des travaux antérieurs sur les cribles (comme ceux de Legendre), car c’est dans cette tradition qu’il s’inscrit.

4. *Pourquoi Meissel ne cite pas Riemann ?*

- Manque de lien direct : Meissel ne s’intéressait pas à la théorie analytique des nombres, mais à des méthodes de calcul effectives.
- Accès limité : L’article de Riemann, bien que célèbre aujourd’hui, n’était pas encore considéré comme une référence incontournable pour les calculs pratiques de nombres premiers à l’époque de Meissel.

7. Ici j’ai retiré le sempiternel début de réponse de tous les LLM, début qui est un ensemble de mots du style “C’est une excellente question”, début auquel j’ai systématiquement envie de répondre “Mais chéri, pour qui tu te prends, tu n’es qu’une bête machine, je suis une humaine, je te suis supérieure, tu n’obtiendras pas de moi par la flatterie du renard de la fable que je vienne te voir plus souvent parce que tu me félicites avec ton “c’est une excellente question”, comme tu féliciterais une bonne élève ; ce sont des humains comme moi qui t’ont donné toute ta connaissance, alors doucement les basses, s’il te plaît.”.

- Traditions mathématiques distinctes : Meissel était plus proche de la tradition arithmétique allemande (Legendre, Gauss), tandis que Riemann ouvrait une nouvelle voie en analyse complexe.

5. *Postérité*

- Ce n'est qu'après la preuve du théorème des nombres premiers (1896) que les idées de Riemann ont été pleinement intégrées à la théorie des nombres.
- Aujourd'hui, les méthodes de Meissel et les idées de Riemann sont vues comme complémentaires : les unes pour le calcul effectif, les autres pour la compréhension asymptotique.

Résumé : Meissel et Riemann travaillaient sur des aspects différents du problème des nombres premiers, avec des outils et des objectifs distincts. Meissel ne cite pas Riemann car, à l'époque, leurs approches ne se recoupaient pas directement.