

Traduction d'une conférence de Masamichi Takesaki, à Battelle, Seattle, en 1971, intitulée *States and automorphisms of operator algebras, Standard representations and the Kubo-Martin-Schwinger boundary condition*

## États et automorphismes des algèbres d'opérateurs

### Représentations standards et condition aux limites de Kubo-Martin-Schwinger

Masamichi Takesaki <sup>1</sup>

#### Introduction

Supposons que  $\mathcal{B}$  désigne l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  de tous les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$ . Il est bien connu que  $\mathcal{B}$  est l'espace conjugué de l'espace de Banach  $J$  de tous les opérateurs nucléaires sur  $\mathcal{K}$ , où la dualité de  $\mathcal{B}$  et  $J$  est donnée par la forme bilinéaire :  $(x, y) \in \mathcal{B} \times J \mapsto \text{Tr}(xy) \in \mathbb{C}$ . Une forme linéaire sur  $\mathcal{B}$  est dite normale si elle est donnée par un élément de  $J$ . Soit  $\varphi$  un état normal de  $\mathcal{B}$ . Alors, par définition, il existe un opérateur nucléaire positif auto-adjoint  $h_\varphi$  tel que  $\varphi(x) = \text{Tr}(xh_\varphi)$ ,  $x \in \mathcal{B}$  et  $\text{Tr}(h_\varphi) = 1$ . Soit  $e_\varphi$  la projection de  $\mathcal{K}$  sur la fermeture du domaine de  $h_\varphi$ . Alors on a  $\varphi(x) = \varphi(e_\varphi x e_\varphi)$ ,  $x \in \mathcal{B}$ . Par conséquent, l'état  $\varphi$  est considéré comme l'application composée :  $x \in \mathcal{B} \mapsto e_\varphi x e_\varphi \in e_\varphi \mathcal{B} e_\varphi \mapsto \varphi(e_\varphi x e_\varphi)$ . Puisque l'application :  $x \in \mathcal{B} \mapsto e_\varphi x e_\varphi \in e_\varphi \mathcal{B} e_\varphi$  est relativement simple, nous pouvons supposer que  $e_\varphi = 1$ . Par conséquent, dans cette situation,  $h_\varphi$  est non singulier, c'est-à-dire que nous pouvons considérer l'inverse  $h_\varphi^{-1}$  de  $h_\varphi$ , qui est non borné bien que  $\dim \mathcal{K} = \infty$ .

Supposons un instant que  $\mathcal{K}$  soit de dimension  $n$ ,  $n < +\infty$  et  $h_\varphi = 1/n$ . Dans ce cas, nous avons

$$(1.1) \quad \varphi(xy) = \varphi(yx), \quad x, y \in \mathcal{B}.$$

Un tel état est appelé une trace (finie). Dans ce cas particulier, nous remplaçons  $\varphi$  par  $\tau$ . Considérant  $\mathcal{B}$  comme un espace vectoriel, nous notons  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{K}_\tau$  et par  $\eta_\tau(x)$  un élément  $x \in \mathcal{B}$  considéré comme un vecteur dans  $\mathcal{K}_\tau$ . Définissons le produit intérieur dans  $\mathcal{K}_\tau$  par

$$(1.2) \quad \langle \eta_\tau(x) | \eta_\tau(y) \rangle = \tau(y^*x), \quad x, y \in \mathcal{B}$$

Alors nous obtenons un espace de Hilbert  $\mathcal{K}_\tau$  de dimension  $n^2$ . Définissons les deux actions  $\pi_\tau$  et  $\pi'_\tau$  de  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{K}_\tau$  par

$$(1.3) \quad \begin{cases} \pi_\tau(a)\eta_\tau(x) = \eta_\tau(ax) ; \\ \pi'_\tau(a)\eta_\tau(x) = \eta_\tau(xa), \quad a, x \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Alors on voit facilement que  $\pi_\tau$  est une représentation fidèle de  $\mathcal{B}$  et que  $\pi'_\tau$  est une anti-représentation fidèle de  $\mathcal{B}$ . En raison de l'associativité de la multiplication dans  $\mathcal{B}$ ,  $\pi_\tau(\mathcal{B})$  et  $\pi'_\tau(\mathcal{B})$  commutent. Supposons qu'un opérateur  $a$  sur  $\mathcal{K}_\tau$  commute avec  $\pi_\tau(\mathcal{B})$ . Puisque l'application :  $x \in \mathcal{B} \mapsto \eta_\tau(x) \in \mathcal{K}_\tau$

---

Transcription en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X et traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2026.

1. Département de mathématiques, Université de Californie, Los Angeles, Californie. 90024

est surjective, on peut trouver un élément  $a_0 \in \mathcal{B}$  avec  $a\eta_\tau(1) = \eta_\tau(a_0)$ . Alors nous avons, pour tout  $x \in \mathcal{B}$ ,

$$a\eta_\tau(x) = a\pi_\tau(x)\eta_\tau(1) = \pi_\tau(x)a\eta_\tau(1) = \pi_\tau(x)\eta_\tau(a_0) = \eta_\tau(xa_0) = \pi'_\tau(a_0)\eta_\tau(x).$$

Donc  $a = \pi'_\tau(a_0)$ . Par conséquent, on obtient

$$(1.4) \quad \pi_\tau(\mathcal{B})' = \pi'_\tau(\mathcal{B}).$$

Soit  $J_\tau$  l'opérateur linéaire conjugué dans  $\mathcal{K}_\tau$  défini par  $J_\tau\eta_\tau(x) = \eta_\tau(x^*)$ ,  $x \in \mathcal{B}$ . On voit alors facilement que  $J_\tau$  est une isométrie de  $\mathcal{K}_\tau$  sur  $\mathcal{K}_\tau$  et que  $J_\tau^2 = 1$ . De plus, pour chaque  $a \in \mathcal{B}$ ,

$$(1.5) \quad J_\tau\pi_\tau(a)J_\tau = \pi'_\tau(a^*).$$

Ainsi, en combinant (5) avec (4), on obtient

$$(1.6) \quad \begin{cases} J_\tau\pi_\tau(\mathcal{B})J_\tau = \pi_\tau(\mathcal{B})'; \\ J_\tau\pi_\tau(\mathcal{B})'J_\tau = \pi_\tau(\mathcal{B}). \end{cases}$$

Considérons maintenant la représentation cyclique  $\pi_\varphi$  de  $\mathcal{B}$  induite par un état normal fidèle arbitraire. Dans ce cas, on considère  $\mathcal{B}$  à nouveau comme un espace vectoriel, noté  $\mathcal{K}_\varphi$ , et par  $\eta_\varphi(x)$  le vecteur dans  $\mathcal{K}_\varphi$  correspondant à  $x \in \mathcal{B}$ . On définit le produit intérieur dans  $\mathcal{K}_\varphi$  par

$$(1.7) \quad \langle \eta_\varphi(x) | \eta_\varphi(y) \rangle = \varphi(y^*x), \quad x, y \in \mathcal{B}.$$

La représentation cyclique  $\pi_\varphi$  de  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{K}_\varphi$  est définie par

$$(1.8) \quad \pi_\varphi(a)\eta_\varphi(x) = \eta_\varphi(ax), \quad a, x \in \mathcal{B}.$$

On obtient alors

$$\varphi(a) = \varphi(1^*a1) = \langle \pi_\varphi(a)\eta_\varphi(1) | \eta_\varphi(1) \rangle.$$

Nous allons examiner le commutant  $\pi_\varphi(\mathcal{B})'$  de  $\pi_\varphi(\mathcal{B})$ . Remarquant l'égalité :

$$\varphi(a) = \text{Tr}(ah_\varphi) = \eta_\tau(ah_\varphi) = \tau((\sqrt{nh_\varphi^{1/2}})a(\sqrt{nh_\varphi^{1/2}})) = \langle \pi_\tau(a)\eta_\tau(\sqrt{nh_\varphi^{1/2}}) | \eta_\tau(\sqrt{nh_\varphi^{1/2}}) \rangle,$$

définissons l'application  $U$  de  $\mathcal{K}_\varphi$  sur  $\mathcal{K}_\tau$  par

$$(1.9) \quad U\eta_\varphi(x) = \sqrt{nh_\varphi}(\eta_\tau(xh_\varphi^{1/2})), \quad x \in \mathcal{B}$$

Il n'est alors pas difficile de montrer que  $U$  est une isométrie de  $\mathcal{K}_\varphi$  sur  $\mathcal{K}_\tau$  telle que

$$U\pi_\varphi(a)U^* = \pi_\tau(a), \quad a \in \mathcal{B}.$$

Par conséquent, en posant  $J_\varphi = U^*J_\tau U$ , on trouve une isométrie linéaire conjuguée  $J_\varphi$  de  $\mathcal{K}_\varphi$  sur  $\mathcal{K}_\varphi$  avec  $J_\varphi^2 = 1$  telle que

$$J_\varphi\pi_\varphi(\mathcal{B})J_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{B})'.$$

Ainsi, nous obtenons ce qui suit :

**Théorème 1.** *Si  $K$  est de dimension finie, alors pour tout état  $\varphi$  normal fidèle de  $\mathcal{B}(= \mathcal{B}(K))$ , il existe une isométrie linéaire conjuguée  $J_\varphi$ , avec  $J_\varphi^2 = 1$ , de l'espace de représentation  $\mathcal{K}_\varphi$  de la représentation cyclique  $\pi_\varphi$  induite par  $\varphi$  sur  $\mathcal{K}_\varphi$  lui-même, telle que*

$$(1.10) \quad J_\varphi \pi_\varphi(\mathcal{B}) J_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{B})'$$

**Définition 2.** Une isométrie linéaire conjuguée  $J$  d'un espace de Hilbert sur lui-même avec  $J^2 = 1$  est appelée une involution unitaire. Une représentation  $\{\pi, \mathcal{K}\}$  d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  est dite standard s'il existe une involution unitaire  $J$  sur  $\mathcal{K}$  telle que

$$(a) \quad J\pi(A)''J = \pi(A)';$$

$$(b) \quad J \text{ commute avec toute projection centrale dans } \pi(A)''.$$

Une algèbre de von Neumann  $\{M, \mathcal{K}\}$  est dite standard si la représentation identité de  $M$  est standard.

Dans le théorème 1, l'existence de l'involution unitaire  $J_\tau$  est, en essence, due à la commutativité, voir (1). Quelle est la relation entre  $\varphi(xy)$  et  $\varphi(yx)$  en général ? Bien sûr,  $\varphi(xy) \neq \varphi(yx)$  sauf si  $\varphi$  est une trace. Mais nous avons

$$\varphi(xy) = \text{Tr}(xyh_\varphi) = \text{Tr}(yh_\varphi x) \quad ;$$

$$\varphi(yx) = \text{Tr}(yxh_\varphi).$$

Par conséquent, nous devons examiner  $h_\varphi x$  et  $xh_\varphi$ . Nous trouvons alors un pont  $h_\varphi^{(1-t)} x h_\varphi^t$  avec  $0 \leq t \leq 1$ , entre  $h_\varphi x$  et  $xh_\varphi$ , qui appartient à  $J$  même si  $\dim K = \infty$ . De là, on peut conclure que pour toute paire  $x, y$  dans  $\mathcal{B}$ , il existe une fonction bornée  $F_{x,y}(a)$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$  et continue sur cette même bande, avec les valeurs limites :

$$F_{x,y}(t) = \varphi(h_\varphi^{it} x h_\varphi^{-it} y) \quad ;$$

$$F_{x,y}(t+i) = \varphi(y h_\varphi^{it} x h_\varphi^{-it}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Définition 3.** Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre munie d'un groupe à un paramètre  $\sigma_t$  d'automorphismes. Un état (ou plus généralement une fonctionnelle linéaire positive)  $\varphi$  satisfait la condition limite de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) en  $\beta > 0$  pour  $\sigma_t$  si

$$(a) \quad \varphi \text{ est invariant sous } \sigma_t \text{ et}$$

$$(b) \quad \text{Pour toute paire } x, y \text{ dans } A, \text{ il existe une fonction bornée } F_{x,y}(a) \text{ holomorphe dans la bande } 0 \leq \Im a \leq \beta \text{ et continue sur cette même bande, telle que}$$

$$(1.11) \quad F_{x,y}(t) = \varphi(\sigma_t(x)y) \quad ;$$

$$F_{x,y}(t+i\beta) = \varphi(y\sigma_t(x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant  $\sigma_t$  par  $\sigma_{\beta t}$ , on peut supposer  $\beta = 1$ .

Si  $A$  a une unité, alors la  $\sigma_t$ -invariance de  $\varphi$  découle automatiquement de la condition (b). En effet, la périodicité et le fait d'être bornée de  $F_{x,1}(a)$  impliquent que  $F_{x,1}(t) = \varphi \cdot \sigma_t(x)$  est constante.

Des arguments précédant la définition 3, nous concluons

**Théorème 4.** *Un état normal fidèle  $\varphi$  de  $\mathcal{B}$  satisfait la condition KMS en  $\beta = 1$  pour le groupe d'automorphismes intérieurs à un paramètre  $\sigma_t(x) = h_\varphi^{it} x h_\varphi^{-it}$ ,  $x \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}$ .*

Les principaux objectifs de cette série de conférences sont de présenter les résultats suivants et de trouver d'autres applications :

- (a) La représentation cyclique d'une  $C^*$ -algèbre induite par un état KMS est standard ;
- (b) Une algèbre de von Neumann  $\{M, \mathcal{K}\}$  avec un vecteur cyclique et séparateur est standard ;
- (c) À tout état normal fidèle  $\varphi$  d'une algèbre de von Neumann  $M$  correspond de manière unique un groupe à un paramètre  $\sigma_t^\varphi$  d'automorphismes de  $M$  pour lesquels  $\varphi$  satisfait la condition KMS en  $\beta = 1$ . Le groupe d'automorphismes  $\sigma_t^\varphi$  est appelé le groupe d'automorphismes modulaire de  $M$  associé à  $\varphi$  ;
- (d) Pour une sous-algèbre de von Neumann  $N$  de  $M$ , un état normal fidèle  $\varphi$  de  $M$ , il existe une projection normale  $\varepsilon$  de norme un (appelée l'espérance conditionnelle) de  $M$  sur  $N$  telle que

$$\varphi(\varepsilon(x)y) = \varphi(xy), \quad x \in M, y \in N,$$

si et seulement si  $N$  est invariant sous  $\sigma_\tau^\varphi$  ;

- (e) Le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_\tau$  associé à un état normal fidèle  $\varphi$  de  $M$  est intérieur si et seulement si  $M$  est semi-fini ;
- (f) Tout état KMS normal de  $M$  pour le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  est obtenu, en gros, par la multiplication de  $\varphi$  par un élément central de  $M$ .

## 1. Une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur

Supposons que  $\mathcal{K}$  soit un espace de Hilbert complexe. Par  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ , nous désignons l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur  $\mathcal{K}$ . Pour chaque sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ , nous désignons par  $S'$  l'ensemble de tous les  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  commutant avec chaque opérateur de  $S$ . L'ensemble  $S'$  est appelé le commutant de  $S$ . Le commutant  $S'$  de tout sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  est fermé selon l'opération linéaire et la multiplication, c'est-à-dire que  $S'$  est une algèbre sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Puisque la relation  $S \subset J$  implique  $S' \supset J'$ , on a

$$S \subset S'' = S^{(IV)} = \dots ;$$

$$S' = S''' = S^{(V)} = \dots .$$

**Définition 1.1.** Une sous-algèbre auto-adjointe  $M$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  est appelée une algèbre de von Neumann si  $M = M''$ .

Nous étudions une algèbre de von Neumann  $\{M, \mathcal{K}\}$  admettant un vecteur  $\xi_0$  tel que  $[M\xi_0] = \mathcal{K}$ , où  $[M]$  désigne le sous-espace fermé engendré par  $M$  pour tout sous-ensemble  $M$  de  $\mathcal{K}$ . Un tel vecteur  $\xi_0$  est dit cyclique pour  $M$ . Un vecteur  $\xi_0$  dans  $\mathcal{K}$  est dit séparant pour  $M$  si  $x\xi_0 \neq 0$  pour tout  $x \in M$  non nul. Ce qui suit est connu, voir [4; Prop. 5 dans p. 6].

**Proposition 1.2.** *Un vecteur de  $\mathcal{K}$  est dit séparant pour une algèbre de von Neumann  $M$  sur  $\mathcal{K}$  si et seulement s'il est cyclique pour le commutant  $M'$  de  $M$ .*

Soit  $K = [M'\xi_0]$  et  $e$  la projection de  $\mathcal{K}$  sur  $K$ . Alors  $K$  est invariant par  $M'$ , de sorte que  $e$  commute avec  $M'$ ; par conséquent, il appartient à  $M$ . Considérons les algèbres  $eMe$  et  $M'e$  comme des sous-algèbres de  $\mathcal{B}(K)$ . Alors, on sait aussi que

$$(eMe)' = M'e \quad \text{et} \quad (M'e)' = eMe,$$

où les commutants sont considérés dans  $\mathcal{B}(K)$ , voir [4; Prop. 1, p. 16]. Puisque  $\xi_0$  est séparant pour  $M'$ , l'application  $x \in M' \mapsto xe \in M'e$  est un isomorphisme. Par conséquent, pour étudier le commutant  $M'$  de  $M$ , il suffit d'étudier le commutant  $M'e$  de  $eMe$  sur l'espace de Hilbert  $K$ . Il est facile de voir que  $\xi_0$  est un vecteur cyclique dans  $K$  pour  $eMe$ ; par conséquent,  $\xi_0$  est cyclique et séparant dans  $K$  pour  $eMe$ . Ainsi, nous ne considérerons que les algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparant.

Supposons que  $A$  soit une  $C^*$ -algèbre munie d'un groupe à un paramètre  $\sigma_t$  d'automorphismes. Soit  $\varphi$  un état KMS de  $A$  pour  $\sigma_t$ , où par état KMS nous entendons un état satisfaisant la condition KMS en  $\beta = 1$ , sauf si  $\beta$  est spécifié autrement. Soit  $\{\pi_\varphi, \mathcal{K}_\varphi, \xi_\varphi\}$  la représentation cyclique de  $A$  induite par  $\varphi$ . Cette représentation est caractérisée dans l'équivalence unitaire par le fait que

$$[\pi_\varphi(A)\xi_\varphi] = \mathcal{K}_\varphi \quad ; \quad \varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle, \quad x \in A.$$

Soit  $M$  l'algèbre de von Neumann  $\pi_\varphi(A)^\sim$  engendrée par  $\pi_\varphi(A)$ . Puisque  $\varphi$  est  $\sigma_t$ -invariant, il existe l'opérateur unitaire  $U(t)$  pour chaque  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$U(t)\pi_\varphi(x)\xi_\varphi = \pi_\varphi(\sigma_t(x))\xi_\varphi, \quad x \in A.$$

Alors on a

$$\pi_\varphi \cdot \sigma_t(x) = U(t)\pi_\varphi(x)U(t)^{-1}, \quad x \in A.$$

Il s'ensuit que  $U(t)MU(t)^{-1} = M$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $U(t)$  donne lieu à un automorphisme  $\widetilde{\sigma}_t$  de  $M$  lorsque  $\widetilde{\sigma}_t(x) = U(t)xU(t)^{-1}$ ,  $x \in M$ . Définissons l'état  $\widetilde{\varphi}$  de  $M$  par  $\widetilde{\varphi}(x) = \langle x\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle$ ,  $x \in M$ . Alors nous affirmons ce qui suit :

**Proposition 1.3.** Dans la situation ci-dessus,  $\widetilde{\varphi}$  satisfait la condition KMS pour  $\widetilde{\sigma}_t$ , et  $\xi_\varphi$  est séparant pour  $M$ .

*Preuve.* Soient  $x$  et  $y$  des éléments arbitraires de  $M$ . Alors il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $A$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\xi_\varphi - \pi_\varphi(x_n)\xi_\varphi\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^*\xi_\varphi - \pi_\varphi(x_n^*)\xi_\varphi\| = 0 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y\xi_\varphi - \pi_\varphi(y_n)\xi_\varphi\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^*\xi_\varphi - \pi_\varphi(y_n^*)\xi_\varphi\| = 0.$$

D'après la condition KMS, il existe, pour tout  $n = 1, 2, \dots$ , une fonction bornée  $F_n(a)$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$ , et continue sur cette même bande, telle que

$$F_n(t) = \varphi(\sigma_t(x_n)y_n) \quad \text{et} \quad F_n(t+i) = \varphi(y_n\sigma_t(x_n))$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \varphi(\sigma_t(x_n)y_n) = \langle \pi_\varphi \cdot \sigma_t(x_n)\pi_\varphi(y_n)\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle \\ &= \langle U(t)\pi_\varphi(x_n)U(t)^{-1}\pi_\varphi(y_n)\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(y_n)\xi_\varphi | U(t)\pi_\varphi(x_n^*)\xi_\varphi \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que  $F_n(t)$  converge uniformément en  $t$  vers les fonctions :

$$f(t) = \langle y\xi_\varphi | U(t)x^*\xi_\varphi \rangle = \langle U(t)xU(t)^{-1}y\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle = \tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}_t(x)y)$$

De même,  $F_n(t+i)$  converge uniformément en  $t$  vers la fonction  $g(t) = \tilde{\varphi}(y\tilde{\sigma}_t(x))$ . D'après le théorème de Phragmen-Lindröf,  $F_n(a)$  converge uniformément dans la bande vers une fonction  $F(a)$  définie sur la bande; par conséquent,  $F(a)$  est bornée, holomorphe et continue sur celle-ci. Il est évident que  $F(t) = f(t)$  et  $F(t+i) = g(t)$ ; ainsi,  $\tilde{\varphi}$  est un état KMS pour  $\tilde{\sigma}_t$ .

Supposons  $x\xi_\varphi = 0$  pour un certain  $x \in M$ . Pour tout  $y \in M$ , il existe une fonction bornée  $F$  holomorphe et continue sur la bande telle que

$$F(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}_t(y^*)x^*xy) ;$$

$$F(t+i) = \tilde{\varphi}(x^*xy\tilde{\sigma}_t(y^*)).$$

Alors on a

$$F(t+i) = \langle x^*xy\tilde{\sigma}_t(y^*)\xi_\varphi | \xi_\varphi \rangle = \langle xy\tilde{\sigma}_t(y^*)\xi_\varphi | x\xi_\varphi \rangle = 0$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc  $F$  doit être identiquement nulle. Ainsi

$$0 = F(0) = \varphi(y^*xxy) = \|xy\xi_\varphi\|^2,$$

ce qui signifie que  $xM\xi_\varphi = 0$ ; donc  $x = 0$ . Par conséquent,  $\xi_\varphi$  est séparable pour  $M$ . C.Q.F.D.

## 2. Décomposition polaire de l'involution

(MJC) Désormais, nous considérons une algèbre de von Neumann arbitraire  $\{M, \mathcal{K}\}$  mais fixée avec un vecteur cyclique et séparableur  $\xi_0$ . Soit  $\mathcal{A} = M\xi_0$  et  $\mathcal{A}' = M'\xi_0$ . Puisque les applications :  $x \in M \mapsto x\xi_0 \in \mathcal{A}$  et  $y \in M' \mapsto y\xi_0 \in \mathcal{A}'$  sont toutes deux bijectives, nous pouvons considérer les applications inverses  $\pi$  et  $\pi'$  des applications ci-dessus respectivement, c'est-à-dire que nous écrivons  $x = \pi(x\xi_0)$ ,  $x \in M$ , et  $y = \pi'(y\xi_0)$ ,  $y \in M'$ . Pour chaque paire  $(\xi, \eta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{K}$ , nous définissons son produit par :

$$(2.1) \quad \xi\eta = \pi(\xi)\eta.$$

De même, nous définissons le produit de chaque paire  $(\xi, \eta) \in \mathcal{K} \times \mathcal{A}'$  par

$$(2.1') \quad \xi\eta = \pi'(\eta)\xi.$$

Puisque  $M$  et  $M'$  commutent, les produits définis en (2.1) et (2.1') sont cohérents et suivent la loi d'associativité. Par conséquent,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  s'avèrent être des algèbres munies de ces produits. Les applications  $\pi$  et  $\pi'$  sont respectivement un isomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur  $M$  et un anti-isomorphisme de  $\mathcal{A}'$  sur  $M'$  respectivement.

On définit les opérateurs linéaires conjugués denses  $S_0$  sur  $\mathcal{A}$  et  $F_0$  sur  $\mathcal{A}'$  par

$$\begin{cases} S_0\xi = \pi(\xi)^*\xi_0, & \xi \in \mathcal{A}; \\ F_0\eta = \pi'(\eta)^*\xi_0, & \eta \in \mathcal{A}'. \end{cases}$$

Alors on a, pour chaque  $\xi \in \mathcal{A}$  et  $\eta \in \mathcal{A}'$ ,

$$\begin{aligned} \langle S_0\xi|\eta \rangle &= \langle \pi(\xi)^*\xi_0|\pi'(\eta)\xi_0 \rangle = \langle \xi_0|\pi(\xi)\pi'(\eta)\xi_0 \rangle \\ &= \langle \xi_0|\pi'(\eta)\pi(\xi)\xi_0 \rangle = \langle \pi'(\eta)^*\xi_0|\xi \rangle = \langle F_0\eta|\xi \rangle. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $S_0^* \supset F_0$  et  $F_0^* \supset S_0$ , où il convient de remarquer que  $S_0$  et  $F_0$  sont tous deux linéaires conjugués, de sorte que les opérateurs adjoints  $S_0^*$  et  $F_0^*$  apparaissent toujours du même côté du produit scalaire que  $S_0$  et  $F_0$ . Soit  $S$  la fermeture  $S_0^{**}$  de  $S_0$  et  $F$  l'adjoint  $S_0^*$  de  $S_0$ . Le domaine de  $S$  est noté  $\mathcal{D}^\#$  et celui de  $F$  est noté  $\mathcal{D}^\circledast$ . Par commodité, nous notons souvent  $S\xi$ ,  $\xi \in \mathcal{D}^\#$ , par  $\xi^\#$  et  $F\eta$ ,  $\eta \in \mathcal{D}^\circledast$ , par  $\eta^\circledast$  respectivement. Il est maintenant facile de montrer que  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ) est une algèbre involutive avec l'involution :  $\xi \mapsto \xi^\#$  (resp.  $\eta \mapsto \eta^\circledast$ ).

**Remarque.** Un vecteur  $\xi \in \mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{D}^\#$  si et seulement s'il existe une séquence  $\{\xi_n\}$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$  et  $\{\xi_n^\#\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{K}$ . Si tel est le cas, alors  $\xi^\#$  est obtenu par  $\xi^\# = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^\#$ .

**Lemme 2.1.** *L'opérateur linéaire conjugué fermé  $F$  est la fermeture de  $F_0$ , c'est-à-dire, un vecteur  $\eta \in \mathcal{K}$  appartient à  $\mathcal{D}^\circledast$  si et seulement s'il existe une suite  $\{\eta_n\}$  dans  $\mathcal{A}'$  telle que  $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$  et  $\{\eta_n^\circledast\}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{K}$ . Si tel est le cas alors  $\eta^\circledast$  est donné par  $\eta^\circledast = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^\circledast$ .*

*Preuve.* Soit  $\eta$  un élément arbitraire mais fixé de  $\mathcal{D}^\circledast$ . Définissons les opérateurs  $a_0$  et  $b_0$  sur  $\mathcal{A}$  par

$$a_0\xi = \pi(\xi)\eta \quad \text{et} \quad b_0\xi = \pi(\xi)\eta^\circledast, \quad \xi \in \mathcal{A}.$$

Alors, on a, pour chaque paire  $x, y$  dans  $M$ ,

$$\begin{aligned} \langle a_0x\xi_0|y\xi_0 \rangle &= \langle x\eta|y\xi_0 \rangle = \langle \eta|x^*y\xi_0 \rangle \\ &= \langle \eta|(y^*x\xi_0)^\# \rangle = \langle y^*x\xi_0|n^\circledast \rangle = \langle x\xi_0|y\eta^\circledast \rangle = \langle x\xi_0|b_0y\xi_0 \rangle \quad ; \end{aligned}$$

d'où nous obtenons  $a_0^* \supset b_0$  et  $b_0^* \supset a_0$ . Par conséquent,  $a_0$  et  $b_0$  sont tous deux pré-fermés. Soit  $a$  la fermeture  $a_0^{**}$  de  $a_0$ . Nous affirmons que  $a$  est affilié à  $M'$  au sens où tout opérateur unitaire  $u$  dans  $M$  commute avec  $a$ . Pour tout  $x$  dans  $M$ , nous avons

$$(ua_0u^{-1})x\xi_0 = ua_0(u^{-1}x\xi_0) = u(u^{-1}x\eta) = x\eta = a_0x\xi_0 \quad ,$$

de sorte que  $ua_0u^{-1} = a_0$  pour tout unitaire  $u \in M$ ; donc  $uau^{-1} = (ua_0u^{-1})^{**} = a_0^{**} = a$ .

Maintenant, soient  $a = uh = ku$  les décompositions polaires gauche et droite de  $a$ , où  $h = (a^*a)^{1/2}$  et  $k = (aa^*)^{1/2}$ . Puisque  $a$  est affilié à  $M'$ ,  $h$  et  $k$  sont tous deux affiliés à  $M'$  et  $u$  appartient à  $M'$ . Notons que  $uhu^* = k$  et  $u^*ku = h$ . Soit

$$h = \int_0^\infty \lambda dp(\lambda) \quad \text{et} \quad k = \int_0^\infty \lambda dq(\lambda).$$

les décompositions spectrales de  $h$  et  $k$  respectivement. Posons

$$h_n = \int_0^n \lambda dp(\lambda) \quad \text{et} \quad k_n = \int_0^n \lambda dq(\lambda).$$

Alors  $h_n$  et  $k_n$  sont bornés; donc appartiennent à  $M'$ . Puisque  $\xi_0$  appartient aux domaines  $\mathcal{D}(a)$  de  $a$  et  $\mathcal{D}(a^*)$  de  $a^*$ ,  $\xi_0$  appartient aux domaines  $\mathcal{D}(h)$  de  $h$  et  $\mathcal{D}(k)$  de  $k$  simultanément. Par conséquent, nous avons

$$h\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n\xi_0 \quad \text{et} \quad k\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n\xi_0 .$$

Posons  $\eta_n = uh_n\xi_0 \in \mathcal{A}'$ . Alors, puisque  $uh_nu^* = k_n$ , on obtient

$$\eta_n^\circledast = h_nu^*\xi_0 = u^*uh_nu^*\xi_0 = u^*k_n\xi_0 ;$$

ainsi

$$\eta = a\xi_0 = uh\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} uh_n\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n ;$$

$$\eta^\circledast = a^*\xi_0 = u^*k\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u^*k_n\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^\circledast .$$

Par conséquent,  $\eta$  est approché par une suite dans  $\mathcal{A}'$  par rapport à la norme du graphe de l'opérateur  $F$ , ce qui signifie que  $F$  est la fermeture de sa restriction  $F_0$  à  $\mathcal{A}'$ . C.Q.F.D.

Nous définissons les produits scalaires dans  $D^\#$  et  $D^\circledast$  respectivement comme suit :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle_\# = \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \xi_2^\# | \xi_1^\# \rangle, & \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}^\# ; \\ \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle_\circledast = \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle + \langle \eta_2^\circledast | \eta_1^\circledast \rangle, & \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}^\circledast ; \end{cases}$$

Les normes définies ci-dessus sont exactement les normes dans les graphes de  $S$  et  $F$  respectivement, de sorte que  $D^\#$  et  $D^\circledast$  sont tous deux complets avec ces nouvelles normes puisque  $S$  et  $F$  sont fermés.

**Remarque.** Pour un sous-espace  $M$  (pas nécessairement fermé) de  $D^\#$  (resp.  $D^\circledast$ ),  $S$  (resp.  $F$ ) est la fermeture de sa restriction à  $M$  si et seulement si  $M$  est dense dans  $D^\#$  (resp.  $D^\circledast$ ) par rapport à la nouvelle norme.

Puisque  $s_0 = s_0^{-1}$  et  $F_0 = F_0^{-1}$ , on a

$$(2.4) \quad S = S^{-1} \quad \text{et} \quad F = F^{-1}.$$

Par conséquent,  $D^\#$  (resp.  $D^\circledast$ ) est invariant par l'application :  $\xi \mapsto \xi^\#$  (resp.  $\eta \mapsto \eta^\circledast$ ).

**Remarque.** Si un opérateur injectif défini de façon dense  $T_0$  est pré-fermé et que son inverse  $T_0^{-1}$  est aussi pré-fermé, alors la fermeture  $T$  de  $T_0$  est injective et son inverse  $T_0^{-1}$  est la fermeture de  $T_0^{-1}$ . Cependant, l'injectivité d'un opérateur pré-fermé  $T_0$  n'implique pas nécessairement l'injectivité de sa fermeture  $T$ , même si  $T_0$  est borné.

Posons

$$(2.5) \quad \Delta = FS = S^*S$$

Alors  $\Delta$  est un opérateur linéaire, non singulier, auto-adjoint et positif sur  $\mathcal{K}$ , mais pas nécessairement borné. Comme dans la théorie usuelle des opérateurs fermés, on obtient la décomposition polaire de  $S$  :

$$S = J\Delta^{1/2}.$$

Puisque  $S$  est linéaire conjugué et que  $\Delta^{1/2}$  est linéaire,  $J$  doit être une isométrie linéaire conjuguée. Puisque  $S$  est non singulière,  $J$  est en fait un opérateur unitaire linéaire conjugué de  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{K}$  lui-même. Puisque  $S^{-1} = \Delta^{-1/2}J^{-1}$ , on a d'après (2.4)  $\Delta^{1/2}J^{-1} = J\Delta^{1/2}$ ; par conséquent,  $J\Delta^{1/2}J = \Delta^{-1/2}$ . Puisque  $S = \Delta^{-1/2}J^{-1}$  est la décomposition polaire droite de  $S$ , on obtient

$$J = J^{-1}, \quad \Delta^{1/2} = (SS^*)^{1/2} = (SF)^{1/2}.$$

Ainsi, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 2.2.** *L'opérateur  $J$  est une involution unitaire de  $\mathcal{K}$  et*

$$(2.6) \quad \begin{cases} S = J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}J & ; \\ F = J\Delta^{-1/2} = \Delta^{1/2}J & ; \\ J\Delta J = \Delta^{-1}. \end{cases}$$

Pour tout  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , on définit l'opérateur  $X^T$  par  $X^T = Jx^*J$ . Alors, l'application  $x \mapsto x^T$  est un anti-automorphisme de  $\omega(\mathcal{K})$  de période deux.

Le domaine  $D(\Delta^{1/2})$  de  $\Delta^{1/2}$  est précisément le domaine  $D^\#$  de  $S$  et le domaine  $D(\Delta^{-1/2})$  de  $\Delta^{-1/2}$  est également le domaine de  $\mathcal{D}^\circledast$  de  $F$ . De plus, les produits intérieurs dans  $D^\#$  et  $\mathcal{D}^\circledast$  sont donnés par ce qui suit :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_\# &= \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \Delta^{1/2}\xi_1 | \Delta^{1/2}\xi_2 \rangle, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}^\# & ; \\ \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\circledast &= \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle + \langle \Delta^{-1/2}\eta_1 | \Delta^{-1/2}\eta_2 \rangle, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}^\circledast & . \end{aligned}$$

**Définition 2.3.** L'opérateur positif auto-adjoint  $\Delta$  est appelé l'opérateur modulaire de  $\{M, \mathcal{K}, \xi_0\}$ .

### 3. Éléments bornés

Dans cette section, nous discutons d'un critère pour qu'un élément  $\xi$  de  $D^\#$  soit dans  $\mathcal{A} = M\xi_0$ . Fixons un élément arbitraire  $\xi$  dans  $D^\#$ . Définissons les opérateurs  $a_0$  et  $b_0$  sur  $\mathcal{A}' = M'\xi_0$  par  $a_0x\xi_0 = x\xi$ , et  $b_0x\xi_0 = x\xi^\#$  pour tout  $x \in M'$ . Alors comme dans la preuve du lemme 2.1, on a  $a_0^* \supset b_0$  et  $a_0 \subset b_0^*$ , et  $a_0$  commute avec tout unitaire dans  $M'$ . Par conséquent, la fermeture  $a = a_0^{**}$  de  $a_0$  est affilié à  $M$ . Soient  $a = uh = ku$  les décompositions polaires gauche et droite de  $a$ , où  $h = (a^*a)^{1/2}$  et  $k = (aa^*)^{1/2}$ . Soit  $K$  l'algèbre de toutes les fonctions continues sur l'intervalle ouvert  $(0, \infty)$  à support compact. En utilisant les décompositions spectrales

$$h = \int_0^\infty \lambda dp(\lambda) \quad \text{et} \quad k = \int_0^\infty \lambda dq(\lambda)$$

de  $h$  et  $k$  respectivement, nous définissons  $f(h)$  et  $f(k)$ ,  $f \in K$ , comme étant

$$(3.1) \quad f(h) = \int_0^\infty f(\lambda) dp(\lambda) \quad \text{et} \quad f(k) = \int_0^\infty f(\lambda) dq(\lambda).$$

Puisque chaque  $f \in K$  est borné,  $f(h)$  et  $f(k)$  appartiennent tous deux à  $M$ . De plus, puisque chaque  $f \in K$  est approché uniformément sur son support par des polynômes de terme constant nul, on a

$$(3.2) \quad uf(h)u^* = f(k) \quad \text{et} \quad u^*f(k)u = f(h).$$

#### Lemme 3.1.

- (a)  $f(k)\xi$  appartient à  $\mathcal{A}$ ,  $f \in K$  ;
- (b)  $\langle (f(k)^*f(k)\xi)^\# | \xi^\# \rangle \geq 0$ ,  $f \in K$  ;
- (c)  $\xi$  appartient à  $\mathcal{A}$  si et seulement s'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$(3.3) \quad \langle (f(k)^*f(k)\xi)^\# | \xi^\# \rangle \leq \gamma^2 \|f(k)\xi_0\|^2, f \in K ;$$

Si tel est le cas, alors  $\|a\| \leq \gamma$ .

*Preuve.* Pour chaque  $f \in K$ , nous avons

$$f(k)\xi = f(k)a\xi_0 = f(k)ku\xi_0 = kf(k)u\xi_0.$$

Puisque la fonction  $\lambda \in (0, \infty) \rightarrow \lambda f(\lambda) \in \mathbb{C}$  appartient à  $K$  pour tout  $f \in K$ ,  $kf(k)$  est bornée et appartient à  $M$  ; par conséquent,  $f(k)\xi = kf(k)u\xi_0$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

Maintenant, on calcule que

$$(f(k)\xi)^\# = u^*k\bar{f}(k)\xi_0 = h\bar{f}(h)u^*\xi_0 = \bar{f}(h)a^*\xi_0 = \bar{f}(h)\xi^\# ;$$

donc

$$(3.4) \quad (f(k)\xi)^\# = \bar{f}(h)\xi^\#, \quad f \in K.$$

Donc nous avons

$$\langle (f(k)^* f(k)\xi)^\# | \xi^\# \rangle = \langle \bar{f}(h) f(h)\xi^\# | \xi^\# \rangle = \|f(h)\xi^\#\|^2 \geq 0 .$$

Supposons qu'il existe une constante  $\gamma > 0$  satisfaisant l'inégalité (3.3). Alors nous avons, pour tout  $f \in K$ ,

$$\|kf(k)\xi_0\|^2 = \|f(k)k\xi_0\|^2 = \|f(k)ua^*\xi_0\|^2 = \|uf(h)\xi^\#\|^2 = \|f(h)\xi^\#\|^2 \leq \gamma^2 \|f(k)\xi_0\|^2.$$

Par conséquent, nous avons

$$\int_0^\infty |\lambda f(\lambda)|^2 d\|q(\lambda)\xi_0\|^2 \leq \gamma^2 \int_0^\infty |f(\lambda)|^2 d\|q(\lambda)\xi_0\|^2, \quad f \in K,$$

ce qui signifie que la mesure  $d\|q(\lambda)\xi_0\|^2$  a comme support l'intervalle fermé  $[0, \gamma]$ ; donc  $f(k)\xi_0 = 0$  si  $\text{supp} f \subset (\gamma, \infty)$ ; donc  $f(k) = 0$  pour un tel  $f$ . Donc le spectre de  $h$  est contenu dans  $[0, \gamma]$ ; par conséquent  $\|k\| \leq \gamma$ . Par conséquent,  $a$  est borné et  $\|a\| \leq \gamma$ ; donc  $\xi = a\xi_0$  est dans  $\mathcal{A}$ .

L'assertion inverse est presque claire maintenant. Puisque nous n'utiliserons pas ceci dans la suite, nous laissons la preuve au lecteur. C.Q.F.D.

Pour un  $\eta \in D^\circledast$  fixé, on définit  $a'_0(x\xi_0) = x\eta$  et  $b'_0(x\xi_0) = x\eta^\circledast$ ,  $x \in M$ . Alors  $a'_0 \supset b'_0$  et  $a'_0 \subset b'^*_0$ , et  $a'_0$  commute avec tout opérateur unitaire de  $M$ . Par conséquent, la fermeture  $a' = a'^{**}_0$  de  $a'_0$  est affiliée à  $M'$ . Soient  $a' = vh' = k'v$  les décompositions polaires gauche et droite de  $a'$  avec  $h' = (a'^* a')^{1/2}$  et  $k' = (a' a'^*)^{1/2}$ . On définit  $f(h')$  et  $f(k')$  pour chaque  $f \in K$  en utilisant les décompositions spectrales comme précédemment. Alors on obtient ce qui suit :

### Lemme 3.2.

- (a)  $f(k')\eta$  appartient à  $\mathcal{A}'$ ,  $f \in K$ ;
- (b)  $\langle (f(k')^* f(k')\eta)^\circledast | \eta^\circledast \rangle \geq 0$ ,  $f \in K$ ;
- (c)  $\eta$  appartient à  $\mathcal{A}'$  si et seulement s'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$(3.5) \quad \langle (f(k')^* f(k')\eta)^\circledast | \eta^\circledast \rangle \leq \gamma^2 \|f(k')\xi_0\|^2, \quad f \in K ;$$

si tel est le cas, alors  $\|a'\| \leq \gamma$ .

## 4. Résolvante de l'opérateur modulaire

Conservons les hypothèses et les notations de la section précédente. Soit  $\tilde{\mathbb{C}}$  la sphère de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  et  $[0, \infty]$  la demi-droite positive étendue  $\{z \in \tilde{\mathbb{C}} : 0 \leq z \leq \infty\}$ . Soit  $A[0, \infty]$  l'espace de toutes les fonctions  $f$  holomorphes dans un voisinage de  $[0, \infty]$  et s'annulant à l'infini. Nous allons étudier  $f(\Delta)$ , pour chaque  $f \in A[0, \infty]$ . Pour chaque  $\omega \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty]$ , posons

$$(4.1) \quad \gamma(\omega) = (2|\omega| - \omega - \bar{\omega})^{-1/2} ;$$

$$(4.2) \quad R(\omega) = (\omega - \Delta)^{-1}$$

Alors, d'après le lemme 2.2, on a

$$R(\omega)^T = JR(\omega)^*J = (\omega - \Delta^{-1})^{-1}.$$

**Théorème 4.1.** *Pour tout  $\omega \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty]$ , les affirmations suivantes sont vraies :*

- (a)  $R(\omega)\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  ;
- (b)  $\|\pi(R(\omega)\xi')\| \leq \gamma(\omega)\|\pi'(\xi')\|$ ,  $\xi' \in \mathcal{A}'$  ;
- (c)  $R(\omega)^T\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  ;
- (d)  $\|\pi'(R(\omega)^T\xi)\| \leq \gamma(\omega)\|\pi(\xi)\|$ ,  $\xi \in \mathcal{A}$ .

*Preuve.* Par symétrie, il suffit de démontrer (a) et (b). Prenons et fixons un  $\xi' \in \mathcal{A}'$  arbitraire. Posons

$$\xi = R(\omega)\xi' = (\omega - \Delta)^{-1}\xi'.$$

Alors  $\xi$  est dans  $\mathcal{D}(\Delta)$ , le domaine de  $\Delta$  ; donc il est dans  $\mathcal{D}(\Delta^{1/2}) = \mathcal{D}^\#$ . Appliquons les arguments de la section 3 à  $\xi$ . Plus précisément, en utilisant le lemme 3.1, on montre que l'opérateur  $a$  défini par  $\xi$  dans la section 3 est borné et  $\|a\| \leq \gamma(\omega)\|\pi'(\xi')\|$ . Pour tout  $f \in K$ , on a

$$\begin{aligned} (2|\omega| - \omega - \bar{\omega})\langle (f(k)^*f(k)\xi)^\# | \xi^\# \rangle &= (2|\omega| - \omega - \bar{\omega})\langle Sf(k)^*f(k)\xi | S\xi \rangle \\ &= (2|\omega| - \omega - \bar{\omega})\langle \Delta\xi | f(k)^*f(k)\xi \rangle = (2|\omega| - \omega - \bar{\omega})\langle f(k)\Delta\xi | f(k)\xi \rangle \\ &\leq 2|\omega|\|f(k)\Delta\xi\|\|f(k)\xi\| - 2\Re\omega\langle f(k)\Delta\xi | f(k)\xi \rangle \\ &\leq \|f(k)\Delta\xi\|^2 + |\omega|^2\|f(k)\xi\|^2 - 2\Re\omega\langle f(k)\Delta\xi | f(k)\xi \rangle \\ &= \|f(k)(\omega - \Delta)\xi\|^2 = \|f(k)\xi'\|^2 = \|f(k)\pi'(\xi')\xi_0\|^2 \\ &= \|\pi'(\xi')f(k)\xi_0\|^2 \leq \|\pi'(\xi')\|^2\|f(k)\xi_0\|^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\langle (f(k)^*f(k)\xi)^\# | \xi^\# \rangle \leq \gamma(\omega)^2\|\pi'(\xi')\|^2\|f(k)\xi_0\|^2, \quad f \in K.$$

Par conséquent,  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}$  par le lemme 3.1 et

$$\|\pi(\xi)\| \leq \gamma(\omega)\|\pi'(\xi')\|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

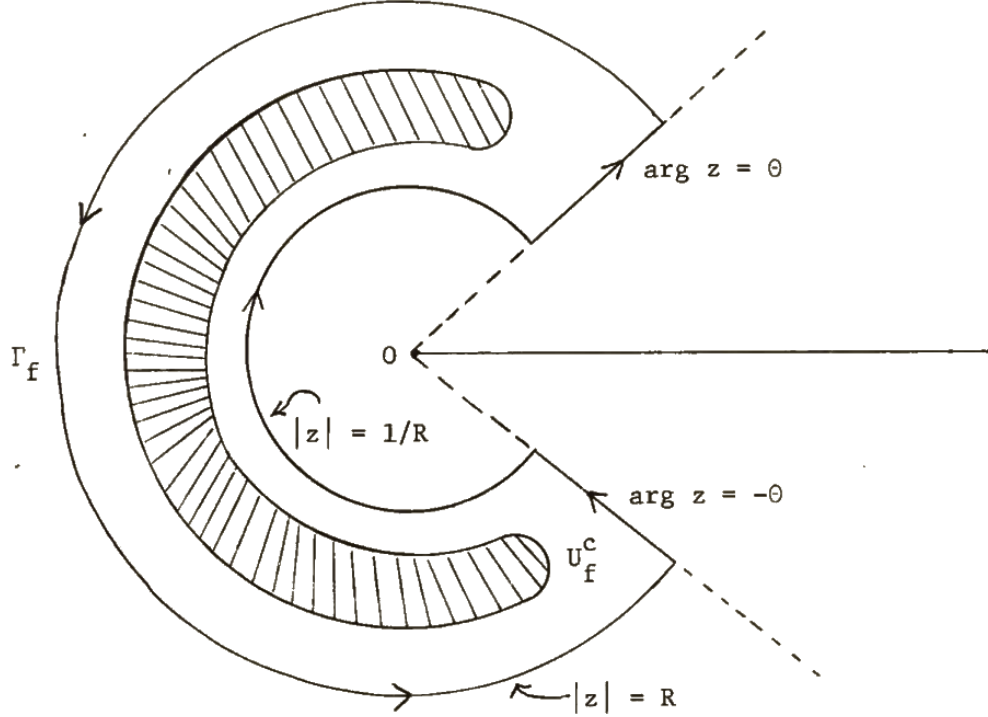
Maintenant, soit

$$(4.4) \quad \Delta = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$$

la décomposition spectrale de  $\Delta$ . Pour chaque fonction borélienne bornée  $f$  sur  $[0, \infty]$ ,  $f(\Delta)$  est donnée par

$$f(\Delta) = \int_0^\infty f(\lambda) dE(\lambda)$$

et est bornée. Prenons une fonction  $f$  dans  $A[0, \infty]$ . Puisque le complémentaire  $U_f^c$  du domaine  $U_f$  de  $f$  ne rencontre pas la demi-droite réelle non négative, il existe des constantes  $R > 1$  et  $0 < \theta < \pi$  telles que  $U_f^c \subset \{z \in \mathbb{C} : 1/R < |z| < R \text{ et } \theta < |\arg z| < 2\pi - \theta\}$ . Soient  $R$  et  $\theta$  deux tels nombres et  $\Gamma_f$  le contour montré sur le diagramme ci-dessous et  $\ell_f =$  la longueur de  $\Gamma_f$  :



Pour tout nombre complexe  $z$  extérieur au contour  $\Gamma_f$ ,  $f(z)$  est représenté par la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega ;$$

d'où nous avons

$$(4.5) \quad f(\Delta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} f(\omega)(\omega - \Delta)^{-1} d\omega.$$

Alors ce qui suit est une conséquence immédiate du théorème 4.1.

**Corollaire 4.2.** *Si  $f$  est dans  $A[0, \infty]$ , alors*

(a)  $f(\Delta)\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , et

$$(4.6) \quad \|\pi(f(\Delta)\xi')\| \leq \frac{1}{2\pi} \ell_f \|\pi'(\xi')\| \sup_{\omega \in \Gamma_f} (\gamma(\omega)|f(\omega)|), \quad \xi' \in \mathcal{A}' ;$$

(b)  $f(\Delta^{-1})\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ , et

$$\|\pi'(f(\Delta)\xi)\| \leq \frac{1}{2\pi} \ell_f \|\pi(\xi)\| \sup_{\omega \in \Gamma_f} (\gamma(\omega)|f(\omega)|), \quad \xi \in \mathcal{A} ;$$

**Définition 4.3.** Posons

$$\mathcal{A}^\# = \{\xi \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{D}(\Delta) : \Delta\xi \in \mathcal{A}'\};$$

$$\mathcal{A}^\circledast = \{\xi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}(\Delta^{-1}) : \Delta^{-1}\xi \in \mathcal{A}\}.$$

Il est facile de voir qu'un vecteur  $\xi \in \mathcal{K}$  appartient à  $\mathcal{A}^\#$  si et seulement si  $\xi$  est dans  $\mathcal{D}^\# \cap \mathcal{A}'$  et  $\xi^\#$  appartient à nouveau à  $\mathcal{A}'$ .

**Lemme 4.4.**

- (a) L'ensemble  $\mathcal{A}^\#$  est une sous-algèbre auto-adjointe de  $\mathcal{A}$  par rapport à la  $\#$ -involution et dense dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{D}^\#$  ;
- (b) L'ensemble  $\mathcal{A}^\circledast$  est une sous-algèbre auto-adjointe de  $\mathcal{A}'$  par rapport à la  $\circledast$ -involution et dense dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{D}^\circledast$  ;
- (c) Si  $\xi$  et  $\eta$  sont tous deux dans  $\mathcal{A}^\#$ , alors

$$(4.8) \quad \Delta(\xi\eta) = (\Delta\xi)(\Delta\eta);$$

- (d) Si  $\xi$  et  $\eta$  sont tous deux dans  $\mathcal{A}^\circledast$ , alors

$$(4.9) \quad \Delta^{-1}(\xi\eta) = (\Delta^{-1}\xi)(\Delta^{-1}\eta).$$

*Preuve.* Si  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}^\#$ , alors  $\eta = (1 + \Delta)\xi$  est dans  $\mathcal{A}'$ , de sorte que  $\xi = (1 + \Delta)^{-1}\eta$  est dans  $\mathcal{A}$  d'après le théorème 4.1. Puisque

$$\eta^\circledast = (\xi + \Delta\xi)^\circledast = \xi^\circledast + \xi^\# = (1 + \Delta)\xi^\# ,$$

$\xi^\# = (\eta - \xi)^\circledast$  est dans  $\mathcal{A}'$ ; donc  $\Delta\xi^\# = \eta^\circledast - \xi^\#$  est dans  $\mathcal{A}'$ ; par conséquent,  $\xi^\#$  est dans  $\mathcal{A}^\#$  par définition. Donc  $\mathcal{A}^\#$  est invariant par l'involution :  $\xi \mapsto \xi^\#$ .

Supposons maintenant que  $\xi$  et  $\eta$  soient tous deux dans  $\mathcal{A}^\#$ . Alors on a

$$(\Delta\xi)(\Delta\eta) = \xi^\# \circledast \eta^\# \circledast = (\eta^\# \xi^\#)^\circledast = (\xi\eta)^\# \circledast = \Delta(\xi\eta).$$

Donc  $\xi\eta$  et  $\Delta(\xi\eta)$  sont tous deux dans  $\mathcal{A}'$ , de sorte que  $\xi\eta$  appartient à  $\mathcal{A}^\#$ . Par conséquent,  $\mathcal{A}^\#$  est un sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\mathcal{A}^\#$  est dense dans  $\mathcal{D}^\#$  par rapport à la  $\#$ -norme. Pour ce faire, il suffit de montrer que  $(1 + \Delta^{1/2})\mathcal{A}^\#$  est dense dans  $\mathcal{K}$ . Puisque les fonctions  $z/(1 + z^2)$  et  $1/(1 + z^2)$  sont toutes deux dans  $A[0, \infty]$ , on a, par le corollaire 4.2,

$$\Delta^{-1}(1 + \Delta^{-2})^{-1}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \quad \text{et} \quad (1 + \Delta^{-2})^{-1}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}',$$

ce qui signifie par définition que  $\mathcal{A}^\#$  contient  $\Delta^{-1}(1 + \Delta^{-2})^{-1}\mathcal{A}$ . Par conséquent, nous obtenons

$$(1 + \Delta^{1/2})\mathcal{A}^\# \supset (1 + \Delta^{1/2})\Delta^{-1}(1 + \Delta^{-2})^{-1}\mathcal{A}.$$

Mais  $(1 + \Delta^{1/2})\Delta^{-1}(1 + \Delta^{-2})^{-1} = \Delta(1 + \Delta^{1/2})(1 + \Delta^2)^{-1}$  est un opérateur borné de plage dense dans  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{K}$ , donc  $(1 + \Delta^{1/2})\Delta^{-1}(1 + \Delta^{-2})^{-1}\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{K}$ ; il en est de

même pour  $(1 + \Delta^{1/2})\mathcal{A}^\#$  dans  $\mathcal{K}$ . Les assertions pour  $\mathcal{A}^\circledast$  découlent par symétrie.

C.Q.F.D.

**Lemme 4.5.**

- (a)  $R(\omega)\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}^\#$ ,  $\omega \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty[$ ;
- (b) Si les nombres complexes  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_1\omega_2$  sont tous dans  $\tilde{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty[$ , et si soit  $\xi_1$  soit  $\xi_2$  appartient à  $\mathcal{A}^\#$ , alors la formule suivante est satisfaite :

$$(4.10) \quad (R(\omega_1)\xi_1)(R(\omega_2)\xi_2) = R(\omega_1\omega_2)[\omega_1(R(\omega_1)\xi_1)\xi_2 + \xi_1(\Delta R(\omega_2)\xi_2)]$$

*Preuve* : Il est évident que

$$(4.11) \quad \begin{cases} (\Delta R(\omega) = \Delta(\omega - \Delta)^{-1} = -\omega^{-1}(\omega^{-1} - \Delta^{-1})^{-1} ; \\ R(\omega) = \omega^{-1}(1 + \Delta R(\omega)), \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[ . \end{cases}$$

Puisque  $\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}$ , nous avons, d'après le théorème 4.1,

$$\Delta R(\omega)\mathcal{A}^\# = -\frac{1}{\omega}R(\omega^{-1})^T\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}' ,$$

de sorte que

$$R(\omega)\mathcal{A}^\# = \frac{1}{\omega}(1 + \Delta R(\omega))\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}' .$$

Par conséquent,  $R(\omega)\mathcal{A}^\#$  est contenu dans  $\mathcal{A}^\#$ , de sorte que l'assertion (a) s'ensuit. Ainsi, si l'un ou l'autre de  $\xi_1$  ou  $\xi_2$  est dans  $\mathcal{A}^\#$ , alors les deux membres de (4.10) sont des fonctions continues de l'autre vecteur. Par conséquent, nous pouvons supposer que  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont tous deux dans  $\mathcal{A}^\#$ . Alors on a

$$\Delta(R(\omega_1)\xi_1)(R(\omega_2)\xi_2) = (\Delta R(\omega_1)\xi_1)(\Delta R(\omega_2)\xi_2) = (\omega_1 R(\omega_1)\xi_1 - \xi_1)(\omega_2 R(\omega_2)\xi_2 - \xi_2) ,$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} (\omega_1\omega_2 - \Delta)[(R(\omega_1)\xi_1)(R(\omega_2)\xi_2)] &= \omega_1(R(\omega_1)\xi_1)\xi_2 + \omega_2\xi_1(R(\omega_2)\xi_2) - \xi_1\xi_2 \\ &= \omega_1(R(\omega_1)\xi_1)\xi_2 + \xi_1(\omega_2 R(\omega_2)\xi_2 - \xi_2) \\ &= \omega_1(R(\omega_1)\xi_1)\xi_2 + \xi_1(\Delta R(\omega_2)\xi_2) . \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

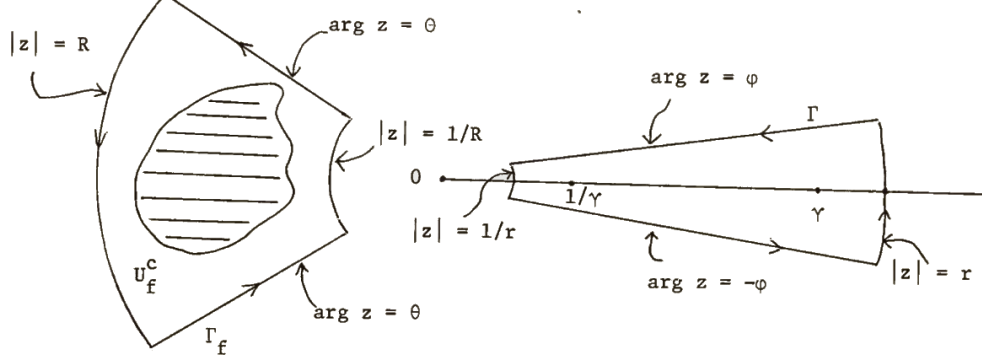
pour  $\gamma > 1$ , on pose

$$(4.12) \quad E_\gamma = \int_{1/\gamma}^\gamma dE(\lambda) .$$

D'après le lemme 2.2 et la définition de l'anti-automorphisme  $x \mapsto x^T$ , on a

$$E_\gamma^T = E_\gamma, \quad \|\Delta E_\gamma\| \leq \gamma, \quad \|\Delta^{-1}E_\gamma\| \leq \gamma .$$

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un voisinage  $U_f$  de  $[0, \infty[$ . Soient  $R > 1$  et  $0 < \theta < \pi$  tels que  $U_f^c$  soit inclus dans l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} : 1/R < |z| < R \text{ et } \theta < |\arg z| < 2\pi - \theta\}$ . Choisissons  $r > \gamma$  et  $0 < \varphi < \theta$ . Considérons les contours  $\Gamma_f$  et  $\Gamma$  comme indiqué dans le diagramme :



Le point est que  $\omega_1\omega_2$  n'est jamais un nombre réel positif tant que  $\omega_1$  reste à l'intérieur de la courbe  $\Gamma$  et que  $\omega_2$  reste à l'intérieur de la courbe  $\Gamma_f$ .

**Lemme 4.6.**

(a) Pour une fonction  $f$  holomorphe dans un voisinage  $U_f$  de  $[0, \infty]$ ,  $f(\Delta)\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}'$  ;

(b) En choisissant le contour  $\Gamma$  comme ci-dessus, nous avons, pour chaque  $\xi \in \mathcal{A}^\#$  et  $\eta \in \mathcal{K}$ ,

$$(4.13) \quad (E_\gamma\eta)(f(\Delta)\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\omega^{-1}\Delta)[(R(\omega)E_\gamma\eta)\xi]d\omega .$$

*Preuve.* L'égalité

$$E_\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\omega)E_\gamma d\omega$$

implique la formule (4.13) pour une fonction constante  $f$ . En considérant la décomposition  $f(z) = f(z) - f(\infty) + f(\infty)$ , nous pouvons supposer que  $f$  est dans  $A[0, \infty]$ . Supposons que  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}^\#$ . Alors  $R(\omega)\xi$  est dans  $\mathcal{A}^\#$  d'après le lemme 4.5. De plus, nous avons

$$\|\pi'(R(\omega)\xi)\| = \left\| \frac{1}{\omega}\pi'(\xi) - \frac{1}{\omega}R(\omega^{-1})^T\xi \right\| \leq \frac{1}{|\omega|}\|\pi'(\xi)\| + \frac{1}{|\omega|^2}\gamma(\omega^{-1})\|\pi(\xi)\| ,$$

de sorte que  $\|\pi'(R(\omega)\xi)\|$  est borné le long de la courbe  $\Gamma_f$  ; par conséquent,  $f(\Delta)\xi$  appartient à  $\mathcal{A}'$ . Ainsi, l'assertion (a) s'ensuit.

Maintenant, prenons un  $\omega_2 \in \Gamma_f$  arbitraire. Alors, d'après le lemme 4.5,

$$(R(\omega_1)E_\gamma\eta)(R(\omega_2)\xi) = R(\omega_1\omega_2)[\omega_1(R(\omega_1)E_\gamma\eta) + (E_\gamma\eta)(\Delta R(\omega_2)\xi)]$$

pour tout  $\omega_1 \in \Gamma$ . En multipliant par  $(1/2\pi i)$  et en intégrant le long de la courbe  $\Gamma$  par rapport à  $\omega_1$ , on obtient

$$(E_\gamma\eta)(R(\omega_2)\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (R(\omega_1)E_\gamma\eta)(R(\omega_2)\xi) d\omega_1 .$$

Puisque la fonction  $\omega_1 \mapsto R(\omega_1\omega_2)$  est holomorphe à l'intérieur de la courbe  $\Gamma$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma R(\omega_1\omega_2)[E_\gamma\eta)(\Delta R(\omega_2)\xi)]d\omega_1 = 0.$$

d'où

$$(4.14) \quad (E_\gamma \eta)(R(\omega_2)\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int R(\omega_1 \omega_2) [\omega_1 (R(\omega_1) E_\gamma \eta) \xi] d\omega_1 .$$

Ensuite, en multipliant par  $\frac{1}{2\pi i} f(\omega_2)$  et en intégrant par rapport à  $\omega_2$  le long de la courbe  $\Gamma_f$ , nous obtenons

$$(E_\gamma \eta)(f(\Delta)\xi) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_f} \int_{\Gamma} f(\omega_2) \omega_1 R(\omega_1 \omega_2) [(R(\omega_1) E_\gamma \eta) \xi] d\omega_1 d\omega_2 .$$

D'autre part, nous avons, pour chaque  $\omega_1 \in \Gamma$  et  $t \in [0, \infty)$ ,

$$f(\omega_1^{-1}t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} f(\omega_2) \omega_1 (\omega_1 \omega_2 - t)^{-1} d\omega_2 ,$$

de sorte que

$$f(\omega_1^{-1}\Delta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} f(\omega_2) \omega_1 R(\omega_1 \omega_2) d\omega_2 .$$

Ainsi nous obtenons

$$(E_\gamma \eta)(f(\Delta)\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\omega^{-1}\Delta) [(R(\omega) E_\gamma \eta) \xi] d\omega . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

## 5. Groupe d'automorphismes à un paramètre défini par l'opérateur modulaire

Nous conservons la même terminologie et les mêmes notations que dans la section précédente.

Pour chaque nombre complexe  $a$ , la fonction  $z \mapsto z^a = \exp(a \log |z| + ia \arg z)$  est définie et holomorphe, sauf sur le demi-axe réel négatif  $[-\infty, 0]$ . Nous posons

$$(5.1) \quad \Delta^a = \int_0^\infty \lambda^a dE(\lambda), \quad a \in \mathbb{C} .$$

**Théorème 5.1.** *Le groupe unitaire à un paramètre  $\Delta^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , forme un groupe d'automorphismes de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{A}'$  respectivement, et*

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \pi(\Delta^{it}\xi) &= \Delta^{it}\pi(\xi)\Delta^{-it}, \quad \xi \in \mathcal{A} ; \\ \pi'(\Delta^{it}\eta) &= \Delta^{it}\pi'(\eta)\Delta^{-it}, \quad \eta \in \mathcal{A}' \end{aligned}$$

*Preuve.* Considérons la fonction

$$f_\delta(z) = \left( \frac{z + \delta}{1 + \delta z} \right)^{it}, \quad 0 \leq \delta < 1 .$$

Alors,  $f_\delta$  avec  $\delta > 0$  est holomorphe sauf sur le segment  $[-\frac{1}{\delta}, -\delta]$ . Nous appliquons le lemme 4.6 à la fonction  $f_\delta$  avec  $\delta > 0$ .

Prenons  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dans  $\mathcal{A}^\#$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{A}$ . D'après le lemme 4.6, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle f_\delta(\Delta)\eta_1|(E_\gamma\xi)^\# \eta_2 \rangle &= \langle (f_\delta(\Delta)\eta_1|\eta_2^\circledast|(E_\gamma\xi)^\#) \rangle = \langle E_\gamma\xi|[(f_\delta(\Delta)\eta_1)\eta_2^\circledast]^\circledast \rangle \\
&= \langle E_\gamma\xi|\eta_2(f_\delta(\Delta)\eta_1)^\circledast \rangle \quad \text{puisque } f_\delta(\Delta)\eta_1 \in \mathcal{A}' , \\
&= \langle (E_\gamma\xi)(f_\delta(\Delta)\eta_1|\eta_2) \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle f_\delta(\omega^{-1}\Delta)[(R(\omega)E_\gamma\xi)\eta_1]|\eta_2 \rangle d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle (R(\omega)E_\gamma\xi)\eta_1|(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2) \rangle d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle R(\omega)E_\gamma\xi|(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2)\eta_1^\circledast \rangle d\omega .
\end{aligned}$$

Puisque

$$f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^* = \{(\omega^{-1}\Delta + \delta)^{it}(1 + \omega^{-1}\delta\Delta)^{-it}\}^* = (\bar{\omega}^{-1}\Delta + \delta)^{-it}(1 + \bar{\omega}^{-1}\delta\Delta)^{it} ,$$

le lemme 4.6 assure que  $f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2$  est dans  $\mathcal{A}'$ ; donc l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle R(\omega)E_\gamma\xi|[\eta_1(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2)^\circledast]^\circledast \rangle d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle \eta_1(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2)^\circledast|(R(\omega)E_\gamma\xi)^\# \rangle d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle \eta_1|(R(\omega)E_\gamma\xi)^\#(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2) \rangle d\omega .
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons, pour chaque  $\xi \in \mathcal{A}$  et  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{A}^\#$ ,

$$(5.3) \quad \langle f_\delta(\Delta)\eta_1|(E_\gamma\xi)^\# \eta_2 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle \eta_1|(R(\omega)E_\gamma\xi)^\#(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2) \rangle d\omega$$

Puisque nous avons

$$f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^* = (1 + \bar{\omega}\delta\Delta^{-1})^{-it}(\delta + \bar{\omega}\Delta^{-1})^{it} ,$$

si nous définissons une fonction  $g_\delta^\omega$  par

$$g_\delta^\omega = \left( \frac{\delta + \bar{\omega}z}{1 + \bar{\omega}\delta z} \right)^{it} - \delta^{-it} ,$$

alors

$$f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^* = g_\delta^\omega(\Delta^{-1}) + \delta^{-it}$$

et  $g_\delta^\omega$  appartient à  $A[0, \infty]$ . Donc d'après le corollaire 4.2, nous avons

$$\|\pi'(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2)\| \leq \|\pi'(\eta_2)\| + \frac{1}{2\pi} \ell \|\pi(\eta_2)\| \sup_{z \in \Gamma_{f_\delta}} (\gamma(z)|g_\delta^\omega(z)|) ,$$

où  $\ell$  est la longueur du contour  $\Gamma_{f_\delta}$ . Il existe donc une constante  $\gamma_0$  ne dépendant pas de  $\omega$  telle que

$$\|\pi'(f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^*\eta_2)\| \leq \gamma_0 .$$

L'opérateur :  $\xi \mapsto (E_\gamma \xi)^\#$  est borné, de sorte que la fonction :  $\omega \mapsto (R(\omega)E_\gamma \xi)^\# (f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^* \eta_2)$  est bornée. Ainsi, les deux côtés de l'égalité (5.3) sont des fonctions continues de  $\eta_1$ , de telle façon que cette égalité (5.3) est vérifiée pour tout  $\eta_1 \in \mathcal{K}$ . Par conséquent, nous obtenons, pour tout  $\eta_1 \in \mathcal{A}'$ ,  $\eta_2 \in \mathcal{A}^\#$ , et  $\xi \in \mathcal{A}$ ,

$$(5.4) \quad \langle f_\delta(\Delta)\eta_1 | (E_\gamma \xi)^\# \eta_2 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle R(\omega)E_\gamma \xi \eta_1 | f_\delta(\omega^{-1}\Delta)^* \eta_2 \rangle d\omega.$$

Pour tout  $\omega \in \Gamma$  et  $\lambda \in [0, \infty]$ , nous avons

$$\begin{aligned} |f_\delta(\omega^{-1}\lambda)| &= \left| \left( \frac{\lambda + \omega\delta}{\omega + \delta\lambda} \right)^{it} \right| = \exp \left[ -t \arg \left( \frac{\lambda + \omega\delta}{\omega + \delta\lambda} \right) \right] \\ &= \exp[t(\arg(\omega + \delta\lambda) - \arg(\lambda + \delta\omega))]. \end{aligned}$$

En rappelant la définition du contour  $\Gamma$ , nous obtenons

$$|\arg(\omega + \delta\lambda) - \arg(\lambda + \delta\omega)| \leq |\arg \omega| \leq \varphi.$$

D'où nous obtenons l'estimation

$$|f_\delta(\omega^{-1}\lambda)| \leq e^{\varphi|t|};$$

Donc  $f_\delta(\omega^{-1}\lambda)$  est uniformément borné sur le contour  $\Gamma$  et converge vers  $f_0(\omega^{-1}\lambda)$  lorsque  $\delta$  tend vers zéro. Par conséquent, le théorème de convergence de Lebesgue implique que

$$\langle f_0(\Delta)\eta_1 | E_\gamma \xi \eta_2 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle (R(\omega)E_\gamma \xi) \eta_1 | f_0(\omega^{-1}\Delta)^* \eta_2 \rangle d\omega$$

pour tout  $\eta_1 \in \mathcal{A}'$ ,  $\eta_2 \in \mathcal{A}^\#$  et  $\xi \in \mathcal{A}$ . Mais  $f_0(\Delta) = \Delta^{it}$  et  $f_0(\omega^{-1}\Delta)^* = \omega^{-it} \Delta^{-it}$ ; d'où on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{it} \eta_1 | (E_\gamma \xi)^\# \eta_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint \langle (R(\omega)E_\gamma \xi) \eta_1 | \omega^{-it} \Delta^{-it} \eta_2 \rangle d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \langle (\omega^{-it} R(\omega)E_\gamma \xi) \eta_1 | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle d\omega = \langle (\Delta^{-it} E_\gamma \xi) \eta_1 | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\langle \Delta^{it} \eta_1 | (E_\gamma \xi)^\# \eta_2 \rangle = \langle (\Delta^{-it} E_\gamma \xi) \eta_1 | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle.$$

Puisqu'on a

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (E_\gamma \xi)^\# = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} S E_\gamma \xi = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} J \Delta^{1/2} E_\gamma \xi = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} E_\gamma J \Delta^{1/2} \xi = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} E_\gamma \xi^\# = \xi^\#.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \pi(\xi) \Delta^{it} \eta_1 | \eta_2 \rangle &= \langle \Delta^{it} \eta_1 | \xi^\# \eta_2 \rangle = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle (\Delta^{it} \eta_1 | \pi'(\eta_2) (E_\gamma \xi)^\# \rangle \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle (\Delta^{-it} E_\gamma \xi) \eta_1 | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle \pi'(\eta_1) (\Delta^{-it} E_\gamma \xi) | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle \\ &= \langle \pi'(\eta_1) \Delta^{-it} \xi | \Delta^{-it} \eta_2 \rangle = \langle \Delta^{it} \pi'(\eta_1) \Delta^{-it} \xi | \eta_2 \rangle; \end{aligned}$$

on obtient donc, pour tout  $\xi \in \mathcal{A}$  et  $\eta \in \mathcal{A}'$ ,

$$\pi(\xi)\Delta^{it}\eta = \Delta^{it}\pi'(\eta)\Delta^{-it}\xi ,$$

que l'on peut écrire de manière équivalente

$$\Delta^{-it}\pi(\xi)\Delta^{it}\eta = \pi'(\eta)\Delta^{-it}\xi .$$

Ainsi  $\Delta^{it}$  laisse  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  tous deux invariants, et

$$\pi(\Delta^{it}\xi) = \Delta^{it}\pi(\xi)\Delta^{-it}, \quad \xi \in \mathcal{A};$$

$$\pi'(\Delta^{it}\eta) = \Delta^{it}\pi'(\eta)\Delta^{-it}, \quad \eta \in \mathcal{A}' .$$

Donc, pour tout couple  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\Delta^{it}(\xi_1\xi_2) = \Delta^{it}\pi(\xi)\xi_2 = \Delta^{it}\pi(\xi_1)\Delta^{-it}\Delta^{it}\xi_2 = \pi(\Delta^{it}\xi_1)\Delta^{it}\xi_2 = (\Delta^{it}\xi_1)(\Delta^{it}\xi_2).$$

Ainsi, le groupe unitaire à un paramètre  $\Delta^{it}$  est un groupe d'automorphismes de  $\mathcal{A}$ . De même, nous concluons que  $\Delta^{it}$  est un groupe d'automorphismes de  $\mathcal{A}'$ . De plus, nous avons, pour tout  $\xi \in \mathcal{A}$  et  $\eta \in \mathcal{A}'$ ,

$$\Delta^{it}\xi^\# = \Delta^{it}J\Delta^{1/2}\xi = J\Delta^{it}\Delta^{1/2}\xi = J\Delta^{1/2}\Delta^{it}\xi = (\Delta^{it}\xi)^\# ;$$

$$\Delta^{it}\eta^\circledast = \Delta^{it}J\Delta^{-1/2}\eta = J\Delta^{it}\Delta^{-1/2}\eta = J\Delta^{-1/2}\Delta^{it}\eta = (\Delta^{it}\eta)^\circledast \quad \text{C.Q.F.D.}$$

**Lemme 5.2.** *Soit  $\gamma > 0$ . Si  $\xi$  est dans le domaine  $\mathcal{D}(\Delta^\gamma)$ , alors*

- (a)  $\xi$  est dans le domaine  $\mathcal{D}(\Delta^a)$  pour  $0 \leq \Re a \leq \gamma$  ;
- (b) la fonction  $F(a) = \langle \Delta^a \xi | \eta \rangle$  pour tout  $\eta \in \mathcal{K}$  est bornée, holomorphe dans la bande  $0 \leq \Re a \leq \gamma$  et continue sur cette même bande.

*Preuve.* Soit  $a = s + it$  avec  $0 \leq s \leq \gamma$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Soit  $f(\lambda) = 1$  pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $f(\lambda) = \lambda^{2\gamma}$  pour  $1 < \lambda$ . Alors  $|\lambda^a|^2 \leq f(\lambda)$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . Par hypothèse,  $f(\lambda)$  est intégrable par rapport à la mesure  $d\langle E(\lambda)\xi | \eta \rangle$ . Par conséquent, la fonction  $F$  est bornée et continue d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Considérons une courbe lisse simplement fermée quelconque  $C$  contenue dans la bande  $0 \leq \Im a \leq \gamma$ . Alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\oint_C F(a) da = \oint_C \int_0^\infty \lambda^a d\langle E(\lambda)\xi | \eta \rangle = \int_0^\infty \left( \oint_C \lambda^a da \right) d\langle E(\lambda)\xi | \eta \rangle = 0 .$$

Ainsi, le théorème de Morera assure que  $F(a)$  est holomorphe dans la bande.

C.Q.F.D.

**Définition 5.3.** Posons

$$\mathcal{A}_0 = \{ \xi \in \mathcal{A} : \xi \in \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\Delta^a) \quad \text{et} \quad \Delta^a \xi \in \mathcal{A} \text{ pour tout } a \in \mathbb{C} \}.$$

**Lemme 5.4.**

- (a)  $\Delta^a \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$ ,  $a \in \mathbb{C}$  ;
- (b)  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$  ;
- (c)  $S\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$ ,  $F\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$  et  $J\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$  ;;
- (d)  $\mathcal{A}_0$  est une algèbre ;
- (e)  $J(\xi\eta) = (J\eta)(J\xi)$ ,  $\xi, \eta \in \mathcal{A}_0$ .

*Preuve.* L'assertion (a) découle directement de la définition de  $\mathcal{A}_0$ . Si  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}_0$ , alors  $\Delta^{-1}\xi$  est à nouveau dans  $\mathcal{A}$ , donc  $\xi$  appartient à  $\mathcal{A}^\circledast$  ; par conséquent à  $\mathcal{A}'$ . Ceci prouve les assertions (b).

Puisque  $J\mathcal{D}(\Delta^a) = \mathcal{D}(\Delta^{-\bar{a}})$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , nous avons  $J \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\Delta^a) = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\Delta^a)$ . Si  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}_0$ , alors on a, pour tout  $a \in \mathbb{C}$

$$\Delta^a S\xi = \Delta^a J\Delta^{1/2}\xi = J\Delta^{-\bar{a}}\Delta^{1/2}\xi = J\Delta^{1/2}\Delta^{-\bar{a}}\xi = S\Delta^{-\bar{a}}\xi \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,  $S\xi$  appartient à  $\mathcal{A}_0$ .

Supposons que  $\xi$  et  $\eta$  soient dans  $\mathcal{A}_0$ . Alors  $(\Delta^a\xi)(\Delta^a\eta)$  est dans  $\mathcal{A}$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et la fonction :  $a \in \mathbb{C} \rightarrow (\Delta^a\xi)(\Delta^a\eta) \in \mathcal{K}$  est entière par le lemme 5.2. Mais nous savons par le théorème 5.1 que  $(\Delta^{it}\xi)(\Delta^{it}\eta) = \Delta^{it}(\xi\eta)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, la fonction :  $t \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta^{it}(\xi\eta)$  est étendue holomorphiquement à  $(\Delta^{ia}\xi)(\Delta^{ia}\eta)$ , ce qui signifie que  $\xi\eta$  appartient à  $\mathcal{D}(\Delta^{ia})$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et  $\Delta^{ia}(\xi\eta) = (\Delta^{ia}\xi)(\Delta^{ia}\eta) \in \mathcal{A}$ . Ainsi,  $\xi\eta$  tombe dans  $\mathcal{A}_0$ , et  $\Delta^a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , est un groupe complexe à un paramètre d'automorphismes de  $\mathcal{A}_0$ .

La dernière assertion (e) est maintenant vérifiée comme suit :

$$J(\xi\eta) = \Delta^{1/2}S(\xi\eta) = \Delta^{1/2}(S\eta)(S\xi) = (\Delta^{1/2}S\eta)(\Delta^{1/2}S\xi) = (J\eta)(J\xi). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

**Lemme 5.5.** *Si une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est la transformée de Fourier-Stieljes d'une mesure finie  $\mu$ , alors*

$$(a) \quad f(\log \Delta)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}, \text{ et } [f(\log \Delta)\xi]^\# = \bar{f}(-\log \Delta)\xi^\#, \quad \xi \in \mathcal{A} \quad (5.5) ;$$

$$(b) \quad f(\log \Delta)\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}', \text{ et } [f(\log \Delta)\eta]^\circledast = \bar{f}(-\log \Delta)\eta^\circledast, \quad \eta \in \mathcal{A}' \quad (5.6) .$$

*Preuve.* Puisqu'on a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\mu(s), \quad t \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$f(\log \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is \log \Delta} d\mu(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{is} d\mu(s).$$

Pour chaque  $\xi \in \mathcal{A}$  et  $\eta \in \mathcal{A}'$ , on a

$$\pi'(\eta)f(\log \Delta)\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \pi'(\eta)\Delta^{is}\xi d\mu(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\Delta^{is}\xi)\eta d\mu(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{is}\pi(\xi)\Delta^{-is}\eta d\mu(s) ,$$

de sorte que

$$\|\pi'(\eta)f(\log \Delta)\xi\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\Delta^{is}\pi(\xi)\Delta^{-is}\eta\| d|\mu|(s) \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu|(s) \right) \|\pi(\xi)\| \|\eta\| ,$$

où  $|\mu|$  désigne la variation totale de la mesure  $\mu$ . Par conséquent,  $f(\log\Delta)\xi$  appartient à  $\mathcal{A}$ . De même,  $f(\log\Delta)\eta$  appartient à  $\mathcal{A}'$ . Les égalités (5.5) et (5.6) découlent du calcul :

$$\begin{aligned} J\Delta^{1/2}f(\log\Delta) &= Jf(\log\Delta)\Delta^{1/2} \\ &= \bar{f}(J(\log\Delta)J)J\Delta^{1/2} \\ &= \bar{f}(\log\Delta^{-1})J\Delta^{1/2} = \bar{f}(-\log\Delta)J\Delta^{1/2}. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

**Lemme 5.6.** Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à support compact, alors

$$(f * g)(\log\Delta)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0 \quad \text{et} \quad (f * g)(\log\Delta)\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_0$$

où

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds.$$

*Preuve.* Puisque  $f * g$  est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,  $(f * g)(\log\Delta)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ . Puisque le support de  $f * g$  est compact, l'image de  $(f * g)(\log\Delta)$  est contenue dans  $\cap_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\Delta^a)$ . De plus, en posant  $e_a(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} e_a(f * g) &= (e_a f) * (e_a g), \\ e_a(f * g)(\log\Delta) &= \Delta^a(f * g)(\log\Delta). \end{aligned}$$

Donc  $\Delta^a$  envoie  $(f * g)(\log\Delta)\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$ . Par conséquent, nous concluons que  $(f * g)(\log\Delta)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ . Par symétrie, l'assertion pour  $\mathcal{A}'$  s'ensuit. C.Q.F.D.

**Lemme 5.7.** L'algèbre  $\mathcal{A}_0$  est dense dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{D}^\#$  par rapport à la  $\#$ -norme et également dense dans  $\mathcal{D}^\@$  par rapport à la  $\@$ -norme.

*Preuve.* Soit  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $f * g$  avec  $f$  et  $g$  des fonctions continues à support compact sur  $\mathbb{R}$ . D'après le lemme 5.6,  $f(\log\Delta)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ . Soit  $\{f_n\}$  une suite bornée dans  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1$ . Pour tout  $\xi \in \mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\Delta^{1/2})$ , on a, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|f_n(\log\Delta)\xi - \xi\|^2 = \int_0^\infty |f_n(\log\lambda) - 1|^2 d\|E(\lambda)\xi\|^2 \rightarrow 0;$$

et

$$\begin{aligned} \|Sf_n(\log\Delta)\xi - S\xi\|^2 &= \|J\Delta^{1/2}f_n(\log\Delta)\xi - J\Delta^{1/2}\xi\|^2 \\ &= \|\Delta^{1/2}f_n(\log\Delta)\xi - \Delta^{1/2}\xi\|^2 \\ &= \int_0^\infty |f_n(\log\lambda) - 1|^2 |\lambda| d\|E(\lambda)\xi\|^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Maintenant, nous sommes en mesure de voir ce qui suit :

**Théorème 5.8.** *L'algèbre de von Neumann  $\{M, \mathcal{K}\}$  avec un vecteur séparable et cyclique  $\xi_0$  est standard par rapport à l'involution unitaire  $J$  définie dans la section 2. C'est-à-dire,*

$$JMJ = M', \quad JM'J = M ;$$

$$JaJ = a^* \quad \text{pour } a \in M \cap M'.$$

*Preuve.* D'après le lemme 5.4 (e), on a

$$\pi'(J\xi) = J\pi(\xi)J, \quad \xi \in \mathcal{A}_0 ;$$

donc  $J\pi(\mathcal{A}_0)J = \pi'(\mathcal{A}_0)$ . Par conséquent,  $J\pi(\mathcal{A}_0)''J = \pi'(\mathcal{A}_0)''$ . Soit  $\eta = y\xi_0$  pour un  $y \in \pi(\mathcal{A}_0)'$  arbitraire. Alors, pour tout  $\xi \in \mathcal{A}_0$ , on a

$$\begin{aligned} \|\pi(\xi)\eta\| &= \|\pi(\xi)y\xi_0\| = \|y\pi(\xi)\xi_0\| = \|y\xi\| \\ &\leq \|y\|\|\xi\|. \end{aligned}$$

Si  $\xi$  est un élément de  $\mathcal{A}$ , alors il existe, d'après le lemme 5.7, une suite  $\{\xi_n\}$  dans  $\mathcal{A}_0$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n^\# - \xi^\#\| = 0.$$

Pour tout  $\zeta \in \mathcal{A}'$ , on a

$$\begin{aligned} \langle y\xi | \zeta \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n^\xi | \zeta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(\xi_n)\eta | \zeta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta | \pi(\xi_n)^* \zeta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta | \pi'(\zeta)\xi_n^\# \rangle \\ &= \langle \eta | \pi'(\zeta)\xi^\# \rangle = \langle \eta | \pi(\xi)^* \zeta \rangle = \langle \pi(\xi)\eta | \zeta \rangle, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $y\xi = \pi(\xi)\eta$ . Donc  $\eta$  appartient à  $\mathcal{A}'$  et  $y = \pi'(\eta) \in M'$ . Par conséquent,  $\pi(\mathcal{A}_0)' \subset M'$ , ce qui implique que  $\pi(\mathcal{A}_0)'' \supset M'' = M$ . Ainsi  $\pi(\mathcal{A}_0)'' = M$ . De même, nous obtenons  $\pi'(\mathcal{A}_0)'' = M'$ . Ainsi  $JMJ = M'$ .

Si  $a$  est dans le centre  $M \cap M'$ , alors

$$Sa\xi_0 = a^*\xi_0 = Fa\xi_0,$$

de telle façon que  $F Sa\xi_0 = a\xi_0$ , c'est-à-dire  $\Delta a\xi_0 = a\xi_0$ .

Donc  $\Delta^{1/2}a\xi_0 = a\xi_0$  et  $a^*\xi_0 = J\Delta^{1/2}a\xi_0 = Ja\xi_0 = a^*$  ;

C.Q.F.D.

## 6. Condition aux limites de Kubo-Martin-Schwinger

Supposons que  $\varphi$  soit une forme linéaire positive normale fidèle sur une algèbre de von Neumann  $M$ . Soit  $\{\pi_\varphi, \mathcal{K}_\varphi, \xi_\varphi\}$  la représentation cyclique de  $M$  induite par  $\varphi$ . Puisque  $\varphi$  est fidèle,  $\pi_\varphi$  est également fidèle et la normalité de  $\varphi$  assure que  $\pi_\varphi(M)^\sim = \pi_\varphi(M)$ . Par conséquent,  $\pi_\varphi$  est un isomorphisme de  $M$  sur  $\pi_\varphi(M)$ , de sorte que nous pouvons identifier  $M$  lui-même avec  $\pi_\varphi(M)$ . Alors la fonctionnelle  $\varphi$  de  $M$  est donnée par  $\varphi(x) = (x\xi_\varphi | \xi_\varphi)$ ,  $x \in M$ . Si  $e$  désigne la projection sur  $[M'\xi_\varphi]$ , alors  $e$  appartient à  $M$  et  $\varphi(1 - e) = 0$  ; donc  $e = 1$  par la fidélité de  $\varphi$ . Ainsi,  $\xi_\varphi$

est un vecteur séparant pour  $M$ . Par conséquent,  $\{M, \mathcal{K}_\varphi, \xi_\varphi\}$  peut être considéré comme le triplet  $\{M, \mathcal{K}, \xi_0\}$  dont il a été question précédemment. Par conséquent, nous utilisons les mêmes notations qu'auparavant. Mais nous écrivons

$$(6.1) \quad \sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it}x\Delta^{-it}, \quad x \in M,$$

parce que l'opérateur modulaire  $\Delta$  dépend du choix d'un vecteur cyclique et séparant  $\xi_0$ , donc de  $\varphi$ .

**Théorème 6.1.** *Dans la situation ci-dessus, la fonctionnelle fidèle, normale et positive  $\varphi$  de  $M$  satisfait la condition KMS en  $\beta = 1$  pour le groupe d'automorphismes à un paramètre  $\sigma_t^\varphi$  de  $M$ .*

*Preuve.* Pour une paire arbitraire  $x, y$  dans  $M$ , soit  $\xi = x\xi_0$  et  $\eta = y\xi_0$ . Alors on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \varphi(\sigma_t(x)y) = \langle \Delta^{it}x\Delta^{-it}y\xi_0 | \xi_0 \rangle = \langle \Delta^{-it}y\xi_0 | x^*\xi_0 \rangle = \langle \Delta^{-it}\eta | \xi^\# \rangle ; \\ g(t) &= \varphi(y\sigma_t(x)) = \langle y\Delta^{it}x\Delta^{-it}y\xi_0 | \xi_0 \rangle = \langle \Delta^{it}x\xi_0 | y^*\xi_0 \rangle = \langle \Delta^{it}\xi | \eta^\# \rangle . \end{aligned}$$

Puisque  $\eta$  et  $\xi$  sont dans  $\mathcal{D}(\Delta^{1/2})$ , le lemme 5.2 nous dit que  $f(t)$  et  $g(t)$  se prolongent holomorphiquement en des fonctions  $F(a)$  définies sur la bande  $0 \leq \Im a \leq 1/2$  et  $G(a)$  définies sur la bande  $-1/2 \leq \Im a \leq 0$ , respectivement. Ces fonctions  $F$  et  $G$  ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} F\left(t + \frac{1}{2}i\right) &= \langle \Delta^{-i(t+1/2i)}\eta | \xi^\# \rangle = \langle \Delta^{1/2}\Delta^{-it}\eta | \xi^\# \rangle = \langle \Delta^{-it}\eta | \Delta^{1/2}\xi^\# \rangle = \langle \Delta^{-it}\eta | J\xi \rangle ; \\ &= \langle \xi | J\Delta^{-it}\eta \rangle = \langle \xi | \Delta^{-it}J\eta \rangle = \langle \Delta^{it}\xi | J\eta \rangle ; \\ G\left(t - \frac{1}{2}i\right) &= \langle \Delta^{i(t-1/2i)}\xi | \eta^\# \rangle = \langle \Delta^{1/2}\Delta^{it}\xi | \eta^\# \rangle = \langle \Delta^{it}\xi | \Delta^{1/2}\eta^\# \rangle = \langle \Delta^{it}\xi | J\eta \rangle . \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons  $F(t + 1/2) = G(t - 1/2i)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi, les fonctions  $F$  et  $G$  définissent une fonction bornée  $H$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$  et continue sur cette même bande, telle que  $H(a) = F(a)$  si  $0 \leq \Im a \leq 1/2$  et  $H(a) = G(a - i)$  si  $1/2 \leq \Im a \leq 1$ . Cette fonction  $H$  assure la condition KMS pour  $\varphi$ . C.Q.F.D.

**Théorème 6.2.** *Le groupe d'automorphismes  $\sigma_t^\varphi$  de  $M$  est l'unique groupe d'automorphismes à un paramètre pour lequel  $\varphi$  satisfait la condition KMS en  $\beta = 1$ .*

*Preuve.* Supposons que  $a_t$  soit un autre groupe d'automorphismes à un paramètre de  $M$  pour lequel  $\varphi$  satisfait la condition KMS en  $\beta = 1$ . Soit  $x$  (resp.  $y$ ) un élément de  $M$  tel que la fonction :  $t \mapsto \sigma_t^\varphi(x)$  (resp.  $t \mapsto a_t(y)$ ) soit étendue à une fonction entière à valeurs dans  $M$ , dont la valeur en  $\omega \in \mathbb{C}$  sera notée  $\sigma_\omega^\varphi(x)$  (resp.  $a_\omega(y)$ ). Notons que le concept d'holomorphie ne dépend pas des topologies d'opérateurs dans  $M$ , voir [11 ; page 92]. Soit  $F(\omega, \zeta) = \varphi(\sigma_\omega^\varphi(x)a_\zeta(y))$ . Alors la condition KMS pour  $\sigma_t^\varphi$  implique que

$$F(t + i, \zeta) = \varphi(a_\zeta(y)\sigma_t^\varphi(x)), \quad t \in \mathbb{R}$$

la condition KMS pour  $a_t$  implique que

$$F(t + i, s + i) = \varphi(\sigma_t^\varphi(x)a_s(y)), \quad s \in \mathbb{R} .$$

Il est évident que  $F(\omega) = F(\omega, \omega) = \varphi(\sigma_\omega(x)a_\omega(y))$  est une fonction holomorphe bornée de  $\omega$ . La périodicité,  $F(t) = F(t + i)$ , implique par le théorème de Sturm-Liouville que  $F$  est constante.

Par conséquent, on a

$$\varphi(x\sigma_{-t}^\varphi \cdot a_t(y)) = \varphi(\sigma_t^\varphi(x)a_t(y)) = \varphi(xy) \quad ,$$

de sorte que

$$\langle \sigma_{-t}^\varphi \cdot a_t(y)\xi_0 | x^*\xi_0 \rangle = \langle y\xi_0 | x^*\xi_0 \rangle.$$

Puisque l'ensemble de tels  $x$  est fortement dense dans  $M$ , nous obtenons  $\sigma_{-t}^\varphi \cdot a_t(y) = y$ . De nouveau, la densité de l'ensemble de tels  $y$  implique que  $\sigma_{-t}^\varphi \cdot a_t$  est l'automorphisme identité de  $M$ , de telle façon que  $a_t$  et  $\sigma_t^\varphi$  doivent coïncider. C.Q.F.D.

**Définition 6.3.** Ce groupe d'automorphismes unique  $\sigma_t^\varphi$  à un paramètre de  $M$  est appelé le groupe d'automorphismes modulaires de  $M$  associé à  $\varphi$ .

## 7. Espérances conditionnelles

Dans la théorie des probabilités usuelle, la probabilité conditionnelle et l'espérance conditionnelle jouent un rôle important. Puisque la théorie des algèbres d'opérateurs, en particulier la théorie des états, est considérée comme l'extension non commutative de la théorie des probabilités, il est naturel de se demander si l'on peut généraliser l'espérance conditionnelle usuelle à la situation non commutative. Si nous interprétons l'espérance conditionnelle usuelle en termes d'algèbres d'opérateurs, nous trouvons facilement ce qui suit : Soit  $A$  une algèbre de von Neumann abélienne et  $\mathcal{B}$  une sous-algèbre de von Neumann. Supposons que soit un état normal fidèle de  $A$ . Alors l'espérance conditionnelle dans cette situation est l'application  $\varepsilon$  de  $A$  sur  $\mathcal{B}$  telle que

$$(7.1) \quad \varphi(xy) = \varphi(\varepsilon(x)y), \quad x \in A, y \in \mathcal{B}.$$

Il est facile de voir que  $\varepsilon$  possède les propriétés suivantes :

$$(7.2) \quad \varepsilon(x) = x, \quad x \in \mathcal{B};$$

$$(7.3) \quad \|\varepsilon(x)\| \leq \|x\|, \quad x \in A;$$

$$(7.4) \quad \varepsilon(x^*) = \varepsilon(x)^*, \quad x \in A;$$

$$(7.5) \quad \varepsilon(x^*x) \geq 0, \quad x \in A;$$

$$(7.6) \quad \varepsilon(x^*x) = 0 \text{ implique } x = 0, \quad x \in A$$

$$(7.7) \quad \varepsilon(ax) = a\varepsilon(x), \quad a \in \mathcal{B}, x \in A$$

$$(7.8) \quad \varepsilon(x)^*\varepsilon(x) \leq \varepsilon(x^*x), \quad x \in A$$

$$(7.9) \quad \sup \varepsilon(x_i) = \varepsilon(\sup x_i)$$

pour tout réseau croissant borné  $\{x_i\}$  d'éléments positifs dans  $A$ . On sait, par Tomiyama [31], qu'une application linéaire  $\varepsilon$  d'une  $C^*$ -algèbre arbitraire  $A$  sur une  $C^*$ -sous-algèbre  $\mathcal{B}$  satisfaisant les conditions (7.2) et (7.3) possède les propriétés (7.4), (7.5), (7.7) et (7.8). Une telle application  $\varepsilon$  est appelée une projection de norme un de  $A$  sur  $\mathcal{B}$ .

Maintenant, nous sommes en position d'examiner la situation pour les espérances conditionnelles non commutatives :

**Théorème 7.1.** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann et  $\varphi$  un état normal fidèle de  $M$  avec le groupe d'automorphismes modulaire associé  $\sigma_t^\varphi$ . Pour une sous-algèbre de von Neumann  $N$  de  $M$ , les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- (a)  $N$  est invariant par  $\sigma_t^\varphi$ , c'est-à-dire,  $\sigma_t^\varphi(N) = N$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ;
- (b) Il existe une application  $\varepsilon$  de  $M$  sur  $N$  satisfaisant (7.1)-(7.9).

*Preuve :* (a)  $\implies$  (b) : Comme dans la section précédente, nous pouvons supposer que  $M$  agit sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  muni d'un vecteur cyclique et séparant  $\xi_0$  tel que  $\varphi(x) = (x\xi_0|\xi_0)$ ,  $x \in M$ . Soit  $A = M\xi_0$  et  $B = N\xi_0$ . Soit  $K$  la fermeture de  $B$ . Alors  $\xi_0$  est un vecteur cyclique et séparant de  $K$  pour l'algèbre de von Neumann  $N_K$  obtenue par la restriction de  $N$  à  $K$ . Soit  $\Delta$  l'opérateur modulaire pour  $A$ . Alors nous avons  $\Delta^{it}x\xi_0 = \Delta^{it}x\Delta^{-it}\xi_0 = \sigma_t^\varphi(x)\xi_0$  pour tout  $x \in M$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $\Delta^{it}B = B$ , de sorte que  $\Delta^{it}$  laisse le sous-espace  $K$  invariant. Par conséquent, la restriction  $\Delta_k$  de  $\Delta$  à  $K$  est un opérateur auto-adjoint positif non singulier dans  $K$ . Puisque  $\Delta_k^{it}$  induit le groupe d'automorphismes à un paramètre  $\sigma_t^\varphi$  de  $N$  pour lequel la restriction  $\varphi_N$  de  $\varphi$  à  $N$  satisfait la condition KMS,  $\Delta_k$  doit donc être l'opérateur modulaire pour  $B$ . Par conséquent, le domaine  $\mathcal{D}^\#(B)$  du  $\#$ -opérateur dans  $K$  construit à partir de  $B$  est simplement l'intersection de  $K$  et  $\mathcal{D}^\#(A)$ , où  $\mathcal{D}^\#(A)$  désigne, bien sûr, le domaine du  $\#$ -opérateur  $S$  défini par  $A$ . Notamment, on a

$$\mathcal{D}^\#(B) = \mathcal{D}(\Delta_K^{1/2}) \cap K = \mathcal{D}^\#(A) \cap K ;$$

$$\mathcal{D}^\circ(B) = \mathcal{D}(\Delta_K^{-1/2}) = \mathcal{D}(\Delta^{-1/2}) \cap K = \mathcal{D}^\circ(A) \cap K ,$$

où  $\mathcal{D}^\circ(B)$  et  $\mathcal{D}^\circ(A)$  sont naturellement compréhensibles. Soit  $E$  la projection de  $\mathcal{K}$  sur  $K$ . Puisque  $K$  est invariant selon  $N$ ,  $E$  appartient à  $N'$ , c'est-à-dire

$$(7.10) \quad Ex = xE, \quad x \in N.$$

Puisque  $Sx\xi_0 = x^*\xi_0$  appartient à  $B$  si  $x \in N$ ,  $S$  laisse  $B$  invariant, c'est-à-dire  $J\Delta^{1/2}B = B$ . Puisque  $\Delta^{1/2}B$  est dense dans  $K$ ,  $J$  laisse  $K$  invariant ; par conséquent, on obtient

$$JE = EJ, \quad \text{donc} \quad SE = ES.$$

Nous affirmons que  $Ex\xi_0 \in B$  pour tout  $x \in M$ . Soit  $x\xi_0 = \xi$ . Alors  $J \in \mathcal{A}'$  et pour tout  $\eta \in B$ , on a

$$\|\eta EJ\xi\| = \|\pi(\eta)EJ\xi\| = \|E\pi(\eta)J\xi\| \leq \|\pi(\eta)J\xi\| = \|\pi'(J\xi)\eta\| \leq \|\pi'(J\xi)\| \|\eta\| .$$

Par conséquent,  $J\xi$  appartient à  $B'$ , où  $B'$  est considéré dans  $K$  comme celui correspondant à  $B$ . Ainsi,  $E\xi = JEJ\xi$  appartient à  $JB' = B$ . Par conséquent, il existe un unique élément  $\varepsilon(x)$  dans

$N$  tel que  $Ex\xi_0 = \varepsilon(x)\xi_0$ . Ainsi, pour tout  $y \in N$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= \langle xy\xi_0 | \xi_0 \rangle = \langle y\xi_0 | x^*\xi_0 \rangle = \langle y\xi_0 | Ex^*\xi_0 \rangle = \langle y\xi_0 | (Ex\xi_0)^\# \rangle \\ &= \langle y\xi_0 | \varepsilon(x)^*\xi_0 \rangle = \varphi(\varepsilon(x)y) .\end{aligned}$$

La linéarité et les autres propriétés découlent facilement de l'unicité de  $\varepsilon(x)$ .

(b)  $\implies$  (a) : Soit  $K$  la fermeture de  $N\xi_0$  comme précédemment et  $E$  la projection de  $\mathcal{K}$  sur  $K$ . Pour chaque  $x \in M$  et  $y \in N$ , on a

$$\langle Ex\xi_0 | y\xi_0 \rangle = \langle x\xi_0 | y\xi_0 \rangle = \varphi(y^*x) = \varphi(y^*\varepsilon(x)) = \langle y^*\varepsilon(x)\xi_0 | \xi_0 \rangle = \langle \varepsilon(x)\xi_0 | y\xi_0 \rangle ,$$

De plus, on a, pour tout  $x \in M$ ,

$$ES_0x\xi_0 = Ex^*\xi_0 = \varepsilon(x^*)\xi_0 = \varepsilon(x)^*\xi_0 = S_0\varepsilon(x)\xi_0 = S_0Ex\xi_0 ,$$

où  $S_0$  désigne l'opérateur pré-fermé :  $x\xi_0 \mapsto x^*\xi_0$ . On a donc  $(1-2E)M\xi_0 \subset M\xi_0$  ; et par conséquent  $(1-2E)M\xi_0 = M\xi_0$  et

$$S_0 = (1-2E)S_0(1-2E) .$$

Nous avons donc, puisque  $(1-2E)$  est unitaire

$$S = (1-2E)S(1-2E) .$$

Donc

$$F = (1-2E)F(1-2E)$$

$$\Delta = (1-2E)\Delta(1-2E)$$

$$J = (1-2E)J(1-2E)$$

On obtient donc

$$\Delta^{it} = (1-2E)\Delta^{it}(1-2E)$$

Ainsi  $\Delta^{it}$  laisse  $K$  invariant. Puisque  $EM\xi_0 = \varepsilon(M)\xi_0 = N\xi_0$ , on a

$$\Delta^{it}N\xi_0 = \Delta^{it}EM\xi_0 = E\Delta^{it}M\xi_0 = EM\xi_0 = N\xi_0 .$$

Donc pour tout  $x \in N$ , il existe  $x(t)$  dans  $N$  avec  $\Delta^{it}x\xi_0 = x(t)\xi_0$ . Alors on a

$$\sigma_t^\varphi(x)\xi_0 = \Delta^{it}x\xi_0 = \Delta^{-it}x\xi_0 = x(t)\xi_0 ,$$

de sorte que  $\sigma_t^\varphi(x)x(t)$ . Ainsi  $\sigma_t^\varphi$  laisse  $N$  invariant.

C.Q.F.D.

**Définition 7.2.** L'application  $\varepsilon$  est appelée l'espérance conditionnelle de  $M$  sur  $N$  par rapport à  $\varphi$ .

## 8. Théorèmes de Radon-Nikodym

Comme il est bien connu, la théorie des représentations des algèbres d'opérateurs est étroitement liée à l'analyse des fonctionnelles linéaires positives ; et cette dernière est tout naturellement considérée comme un analogue non commutatif de la théorie de l'intégration usuelle sur les espaces localement compacts. Dans la théorie de l'intégration usuelle, le théorème de Radon-Nikodym joue un rôle important. Dans cette section, nous allons étudier comment on peut généraliser ce théorème du cas abélien au cas non commutatif.

Nous commençons par une discussion sur les algèbres de von Neumann semi-finies. Soit  $M$  une algèbre de von Neumann semi-finie avec une trace fidèle, semi-finie et normale  $\tau$ . Soit  $\varphi$  un état normal fidèle sur  $M$ . Alors, on sait, voir [21], qu'il existe un unique opérateur fermé auto-adjoint positif non singulier  $h$  affilié à  $M$  tel que

$$(8.1) \quad \varphi(x) = \tau(xh) = \int_0^\infty \lambda d\tau(xe(\lambda)), \quad x \in M$$

où  $h = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$  est la décomposition spectrale de  $h$ .

**Théorème 8.1.** *Si un état normal fidèle  $\varphi$  est donné par (8.1), alors le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  de  $M$  est obtenu par*

$$(8.2) \quad \sigma_t^\varphi(x) = h^{it} x h^{-it}, \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Preuve.* Soit  $e_n = \int_{1/n}^\infty de(\lambda)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $M_0 = \bigcup_{n=1}^\infty e_n M e_n$ . Alors  $M_0$  est une  $*$ -sous-algèbre  $\sigma$ -faiblement dense de  $M$ . Pour tout  $x \in M_0$ , l'application  $: t \in \mathbb{R} \mapsto h^{it} x h^{-it} \in M$  est étendue à une fonction entière à valeurs dans  $M$ , dont la valeur en  $a \in \mathbb{C}$  est notée symboliquement par  $h^{ia} x h^{-ia}$ . Pour tout  $y \in M$ , la fonction  $F_{x,y}(a) = \varphi(h^{ia} x h^{-ia} y)$  est entière et  $F_{x,y}(t) = \varphi(h^{it} x h^{-it} y)$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t+i) &= \varphi(h^{i(t+i)} x h^{-i(t+i)} y) = \tau(h^{i(t+i)} x h^{-i(t+i)} y h) \\ &= \tau(y h h^{i(t+i)} x h^{-(i(t+i))}) = \tau(y h^{it} x h^{-it} h) = \varphi(y h^{it} x h^{-it}). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $F_{x,y}$  assure les conditions KMS pour la paire  $x, y$  par rapport au groupe d'automorphismes à un paramètre  $h^{it} x h^{-it}$ . Les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 1.3 montrent que  $\varphi$  satisfait la condition KMS pour ce groupe d'automorphismes à un paramètre. Par conséquent, le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  est implémenté par le groupe unitaire à un paramètre  $h^{it}$  appartenant à  $M$ . C.Q.F.D.

Réciproquement, nous avons ce qui suit :

**Théorème 8.2.** *Supposons que  $\varphi$  soit un état normal fidèle d'une algèbre de von Neumann  $M$ . Si le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  est intérieur au sens où il existe un groupe unitaire à un paramètre  $\Gamma(t)$  appartenant à  $M$  tel que*

$$(8.2a) \quad \sigma_t^\varphi(x) = \Gamma(t)x\Gamma(t)^{-1}, \quad x \in M$$

alors  $M$  est semi-finie.

*Preuve.* Par hypothèse, il existe un opérateur auto-adjoint positif et non singulier  $h$  affilié à  $M$  tel que  $\Gamma(t) = h^{it}$ . Soit  $h = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$  la décomposition spectrale de  $h$ .

Posons  $e_n = \int_{1/n}^n de(\lambda)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Alors, la non-singularité de  $h$  implique que  $e_n$  converge fortement vers l'identité 1 ; par conséquent, l'algèbre  $M_0 = \bigcup_{n=1}^\infty e_n M e_n$  est  $\sigma$ -faiblement dense dans  $M$ . En remarquant que si  $x \in M_0$ , alors  $h^{-1}x$  est borné et appartient à  $M_0$ , nous définissons la fonctionnelle linéaire  $\tau$  sur  $M_0$  par

$$(8.3) \quad \tau(x) = \varphi(h^{-1}x), \quad x \in M_0.$$

Soit  $x$  un élément de  $M_0$ . Alors  $x = e_n x e_n$  pour un certain  $n$ . Soit  $s$  un nombre réel. Soit  $F(a)$  la fonction bornée holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$ , et continue sur cette même bande, telle que

$$F(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(h^s e_n)x) ;$$

$$F(t+i) = \varphi(x\sigma_t^\varphi(h^s e_n)).$$

Puisque  $h^s e_n$  est fixé par l'automorphisme intérieur  $\sigma_t^\varphi = h^{it} \cdot h^{-it}$ ,  $F(t)$  est constante ; et il en est de même de  $F(a)$  ; donc  $F(t) = F(t+i)$ , ce qui signifie que

$$(8.4) \quad \varphi(h^s e_n x) = \varphi(x h^s e_n), \quad s \in \mathbb{R} .$$

Par conséquent, nous obtenons, en posant  $s = -1/2$ ,

$$\tau(x) = \varphi(h^{-1} e_n x) = \varphi(h^{-1/2} e_n h^{-1/2} e_n x) = \varphi(h^{-1/2} e_n x h^{-1/2} e_n) .$$

Par conséquent,  $\tau$  est positif et  $\tau(x^*x) = 0$  implique  $x = 0$ .

Soient  $x$  et  $y$  une paire quelconque dans  $M_0$ . Alors il existe la fonction bornée  $F(a)$  holomorphe dans la bande et continue sur cette bande avec

$$F(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(h^{-1}x)y) ;$$

$$F(t+i) = \varphi(y\sigma_t^\varphi(h^{-1}x)) .$$

Puisque  $h^{-1}x$  est dans  $M_0$ , la fonction :  $t \mapsto \sigma_t^\varphi(h^{-1}x) = h^{it}h^{-1}xh^{-it}$  est prolongée holomorphiquement en la fonction :  $a \in \mathbb{C} \mapsto h^{i(a+i)}xh^{-ia}e_n$ , où  $n$  est choisi de sorte que  $e_n x e_n = x$ . Par conséquent, nous obtenons, de l'égalité pour  $F(t+i)$ ,

$$F(t) = \varphi(yh^{it}xh^{-i(t-i)}e_n) = \varphi(yh^{it}xh^{-it}h^{-1}e_n) = \varphi(h^{-1}yh^{it}xh^{-it}) \quad \text{par (8.4)}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\tau(\sigma_t^\varphi(x)y) = \varphi(h^{-1}\sigma_t^\varphi(x)y) = \varphi(\sigma_t^\varphi(h^{-1}x)y) = \varphi(h^{-1}yh^{it}xh^{-it}) = \tau(y\sigma_t^\varphi(x)).$$

En particulier, on a

$$(8.5) \quad \tau(xy) = \tau(yx), \quad x, y \in M_0$$

Supposons que  $p$  soit une projection non nulle dans  $M_0$  et que  $u$  soit une isométrie partielle dans  $M$  telle que  $u^*u = p$  et  $uu^* = q \leq p$ . Alors  $u$  appartient à  $M_0$ . Par conséquent, l'égalité (8.6) dit que  $\tau(p) = \tau(u^*u) = \tau(uu^*) = \tau(q)$ . Donc  $\tau(q - p) = 0$ . Par conséquent,  $p = q$ . Par conséquent, toutes les projections dans  $M_0$  sont finies, ce qui signifie que  $M$  est semi-fini car  $M_0$  contient la suite croissante  $\{e_n\}$  de projections finies convergeant fortement vers l'identité. C.Q.F.D.

D'après les théorèmes 8.1 et 8.2, on peut dire que le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  associé à  $\varphi$  est l'ombre de la dérivée de Radon-Nikodym de  $\varphi$  par rapport à la trace inexistante. En gardant ce fait à l'esprit, nous allons étudier plus en détail la relation entre les états normaux fidèles et le groupe d'automorphismes modulaires associé.

Soit  $M$  une algèbre de von Neumann à état normal fidèle  $\varphi$ . Considérons la représentation cyclique de  $M$  induite par  $\varphi$ , nous supposons que  $M$  agit sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  avec le vecteur cyclique et séparateur  $\xi_0$  tel que  $\varphi(x) = \langle x\xi_0 | \xi_0 \rangle, x \in M$ . Soit  $M_*$  le préduel de  $M$ , l'espace de Banach de toutes les fonctionnelles linéaires faiblement continues sur  $M$ . Dans le préduel  $M_*$ , l'\*-opération  $\omega \in M_* \rightarrow \omega^* \in M_*$  est définie par  $\omega^*(x) = \overline{\omega(x^*)}, x \in M$ . Pour tout  $\xi \in \mathcal{K}$ , on définit deux fonctionnelles : l'une est un élément  $\varphi_\xi$  dans  $M_*$  et l'autre est un élément  $\varphi'_\xi$  dans  $M'_*$  comme suit :

$$(8.6) \quad \begin{cases} \varphi_\xi(x) = \langle x\xi | \xi_0 \rangle, & x \in M ; \\ \varphi'_\xi(x) = \langle x\xi | \xi_0 \rangle, & x \in M' . \end{cases}$$

Soit  $V$  (resp.  $V'$ ) l'ensemble de tous les  $\varphi_\xi$  (resp.  $\varphi'_\xi$ ),  $\xi \in \mathcal{K}$ . Alors, on peut facilement vérifier ce qui suit basé sur le lemme 2.1 :

**Lemme 8.3.** Les énoncés suivants (a) et (b) (resp. (a') et (b')) sont équivalents :

- (a)  $\xi$  appartient à  $\mathcal{D}^\#$ ,      (a')  $\xi$  appartient à  $\mathcal{D}^\circledast$  ;
- (b)  $\varphi'_\xi^*$  appartient à  $V'$ ,      (b')  $\varphi_\xi^*$  appartient à  $V$ .

Si  $\xi$  est dans  $\mathcal{D}^\#$  (resp.  $\mathcal{D}^\circledast$ ), alors

$$(8.7) \quad \varphi'_\xi^* = \varphi'_{\xi^\#} \quad (\text{resp. } \varphi_\xi^* = \varphi_{\xi^\circledast}).$$

Soit  $P^\#$  (resp.  $P^\circledast$ ) l'ensemble de tous les  $\xi \in \mathcal{D}^\#$  (resp.  $\xi \in \mathcal{D}^\circledast$ ) tels que  $\varphi'_\xi \geq 0$  (resp.  $\varphi_\xi \geq 0$ ). Alors  $P^\#$  et  $P^\circledast$  sont tous deux des cônes convexes dans  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 8.4.** Les espaces linéaires  $\mathcal{D}^\#$  et  $\mathcal{D}^\circledast$  sont respectivement algébriquement engendrés par  $P^\#$  et  $P^\circledast$ . De plus,  $P^\#$  et  $P^\circledast$  sont les cônes duaux l'un de l'autre au sens suivant :

- (a) Un vecteur  $\xi \in \mathcal{K}$  appartient à  $P^\#$  si et seulement si  $\langle \xi | \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\eta \in P^\circledast$  ;
- (b) Un vecteur  $\eta \in \mathcal{K}$  est dans  $P^\circledast$  si et seulement si  $\langle \xi | \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\xi \in P^\#$ . Par conséquent,  $P^\#$  et  $P^\circledast$  sont tous deux fermés.

Par symétrie, on a seulement à prouver les assertions pour  $\mathcal{D}^\#$  et  $P^\#$ . Puisque  $\mathcal{D}^\#$  est engendré par sa partie auto-adjointe, nous allons prouver que tout auto-adjoint  $\xi \in \mathcal{D}^\#$ , i.e.  $\xi = \xi^\#$ , est de la forme  $\xi_1 - \xi_2$  pour certains  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $P^\#$ . Définissons deux actions de chaque  $a \in M$  (resp.  $a \in M'$ ) à  $\omega \in M_*$ . (resp.  $M'_*$ ) par

$$\langle x, a\omega \rangle = \langle xa, \omega \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, \omega a \rangle = \langle ax, \omega \rangle$$

pour tout  $x \in M$  (resp.  $x \in M'$ ) et  $\omega \in M_*$  (resp.  $\omega \in M'_*$ ), où  $\langle x, \omega \rangle$  représente la valeur de  $\omega$  en  $x$ . Alors on a

$$a\varphi_\xi = \varphi_{a\xi}, \quad a'\varphi'_\xi = \varphi'_{a'\xi}$$

pour chaque  $a \in M$  (resp.  $a' \in M'$ ). Si  $\varphi'_\xi$  est auto-adjoint, alors il existe une projection  $e'$  dans  $M'$  telle que  $e'\varphi'_\xi \geq 0$  et  $(1 - e')\varphi'_\xi \leq 0$ . Par conséquent, en posant  $\xi_1 = e'\xi$  et  $\xi_2 = -(1 - e')\xi$ , on obtient l'expression recherchée :  $\xi = \xi_1 - \xi_2$ , puisque  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont tous deux dans  $P^\#$ .

Soit  $\xi$  un vecteur dans  $\mathcal{K}$ . Supposons  $\langle \xi | \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\eta \in P^\circledast$ . Soit  $M_+$  (resp.  $M'_+$ ) l'ensemble de tous les éléments positifs de  $M$  (resp.  $M'$ ). Alors on a, pour tout  $h \in M_+$  et  $k \in M'_+$

$$\langle h\xi_0 | k\xi_0 \rangle = \langle h^{1/2}h^{1/2}\xi_0 | k^{1/2}k^{1/2}\xi_0 \rangle = \langle h^{1/2}k^{1/2}\xi_0 | k^{1/2}h^{1/2}\xi_0 \rangle = \|h^{1/2}k^{1/2}\xi_0\|^2 \geq 0.$$

Par conséquent,  $M'_+\xi_0 \subset P^\circledast$ . Donc on obtient

$$0 \leq \langle \xi | k\xi_0 \rangle = \varphi'_\xi(k), \quad k \in M'_+,$$

de telle façon que  $\xi$  appartient à  $P^\#$ .

Supposons que  $\xi$  soit un élément de  $P^\#$ . Nous allons prouver que  $\langle \xi | \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\eta \in P^\circledast$ . Définissons un opérateur  $h_0$  sur  $\mathcal{A}' = M'\xi_0$  par

$$h_0x\xi_0 = x\xi, \quad x \in M'.$$

Alors, comme on l'a déjà vu suffisamment de fois,  $h_0$  est un opérateur densément défini commutant avec tout opérateur unitaire dans  $M'$ . La condition de positivité pour  $\varphi'_\xi$  implique que  $h_0$  est positif et donc symétrique. Soit  $h$  l'extension auto-adjointe de Friedrichs de  $h_0$ . Alors  $h$  est affilié à  $M$ . Soit  $h = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$  la décomposition spectrale de  $h$ . Posons  $h_n = \int_0^n \lambda de(\lambda)$ . Alors  $h_n$  appartient à  $M_+$ , et  $h_n\xi_0$  converge vers  $h\xi_0$ . Ainsi, on obtient, pour tout  $\eta \in P^\circledast$ ,

$$\langle \xi | \eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n\xi_0 | \eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi_0 | h_n\eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\langle h_n\eta | \xi_0 \rangle} \geq 0,$$

puisque  $\varphi_\eta \geq 0$ .

C.Q.F.D.

**Remarque.** La preuve ci-dessus montre que  $P^\#$  (resp.  $P^\circledast$ ) est la fermeture de  $M_+\xi_0$  (resp.  $M'_+\xi_0$ ).

Pour chaque couple  $\xi, \eta$  dans  $\mathcal{K}$ , définissons une fonctionnelle linéaire normale  $\omega_{\xi, \eta}$  (resp.  $\omega'_{\xi, \eta}$  de  $M$  (resp.  $M'$ ) par

$$(8.8) \quad \begin{cases} \langle x, \omega_{\xi, \eta} \rangle = \langle x\xi | \eta \rangle, & x \in M ; \\ \langle x, \omega'_{\xi, \eta} \rangle = \langle x\xi | \eta \rangle, & x \in M' . \end{cases}$$

Il est clair que  $\varphi_\xi = \omega_{\xi, \xi_0}$  et  $\varphi'_\xi = \omega'_{\xi, \xi_0}$ . De plus,

$$\omega_{\xi, \eta}^* = \omega_{\eta, \xi} ; (\omega'_{\xi, \eta})^* = \omega'_{\eta, \xi}.$$

### Théorème 8.5.

- (a) *Toute fonctionnelle linéaire positive normale  $\psi$  de  $M$  est représentée de manière unique sous la forme  $\psi = \omega_{\xi, \xi}$ ,  $\xi \in P^\#$ . Par conséquent, il existe un opérateur fermé auto-adjoint positif  $h$  affilié à  $M$  tel que*

$$(8.9) \quad \psi(x) = \langle xh\xi_0 | h\xi_0 \rangle, \quad x \in M .$$

- (b) Si  $\psi \leq \varphi$ , alors le  $h$  ci-dessus est unique et  $0 \leq h \leq 1$ .

*Preuve.* Il est connu (voir [4] ; Théorème 4, p. 222) qu'il existe un vecteur  $\eta \in \mathcal{K}$  avec  $\psi = \omega_{\eta, \eta}$ . Nous considérons la décomposition polaire de  $\varphi'_\eta$  dans  $M'_*$  :

$$\varphi'_\eta = v\psi', \quad \psi' = v^*\varphi_\eta ,$$

où  $\psi$  est une forme linéaire positive normale de  $M'$  et  $v$  une isométrie partielle dans  $M'$ , voir [4 ; Théorème 4, P. 61]. Posons  $\xi = v^*\eta$ . Alors  $\psi' = v^*\varphi'_\eta = \varphi_{v^*\eta} = \varphi'_\xi$ , de telle façon que  $\xi$  est dans  $P^\#$ . De plus, on a  $\varphi'_\eta = v\psi' = v\varphi'_\xi = \varphi'_{v\xi}$ . Puisque l'application :  $\zeta \in \mathcal{K} \rightarrow \varphi'_\zeta \in M'_*$  est injective, on a  $\eta = v\xi$ . On obtient donc, pour tout  $x \in M$

$$\langle x, \psi \rangle = \langle x\eta | \eta \rangle = \langle xv\xi | \eta \rangle = \langle vx\xi | \eta \rangle = \langle x\xi | v^*\eta \rangle = \langle x\xi | \xi \rangle = \langle x, \omega_{\xi, \xi} \rangle .$$

Donc,  $\psi$  est de la forme souhaitée  $\psi = \omega_{\xi, \xi}$  avec  $\xi \in P^\#$ . Supposons qu'il existe un autre vecteur  $\xi_1 \in P^\#$  avec  $\psi = \omega_{\xi_1, \xi_1}$ . Alors, pour tout  $x \in M$ ,

$$\|x\xi\|^2 = \langle x\xi | x\xi \rangle = \langle x^*x\xi | \xi \rangle = \langle x^*x\xi_1 | \xi_1 \rangle = \langle x\xi_1 | x\xi_1 \rangle = \|x\xi_1\|^2 .$$

Définissons un opérateur  $u_0$  par  $u_0x\xi = x\xi_1$ ,  $x \in M$ . Alors  $u_0$  est une isométrie de  $M\xi$  sur  $M\xi_1$  de sorte qu'elle s'étend en une isométrie partielle  $u$  qui s'annule sur  $[M\xi]^\perp$ . Il est facile de vérifier que  $u$  commute avec chaque élément de  $M$ , de sorte que  $u$  appartient à  $M'$ . Ainsi, nous obtenons l'isométrie partielle  $u \in M'$  avec  $u\xi = \xi_1$ . Donc, nous avons  $\varphi'_{\xi_1} = \varphi'_{u\xi} = u\varphi'_\xi$ . Puisque  $\varphi'_{\xi_1}$  et  $\varphi'_\xi$  sont tous deux positifs,  $\varphi'_{\xi_1}$  et  $\varphi'_\xi$  doivent coïncider en raison de l'unicité de la décomposition polaire dans  $M'_*$ . Ainsi,  $\xi$  et  $\xi_1$  sont identiques. Ceci montre l'unicité du  $\xi$  ci-dessus

Supposons  $\psi \leq \varphi$ . Cette hypothèse est équivalente au fait que  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}'$  et  $\|\pi'(\xi)\| \leq 1$ . Nous devons montrer que  $\xi$  appartient à  $\mathcal{A}$  et  $\|\pi(\xi)\| \leq 1$ . Si c'est le cas, alors la positivité de  $\pi(\xi)$  découle automatiquement du fait que  $\xi$  est dans  $P^\#$ . Le fait connu à propos de  $\xi$  est que  $\xi \in \mathcal{A}' \cap P^\#$  et  $\|\pi'(\xi)\| \leq 1$ . Alors nous avons, puisque  $\xi = \xi^\#$ ,

$$\xi^\circledast = \xi^\# \circledast = \Delta\xi \in \mathcal{A}' .$$

Donc  $\xi$  est dans  $\mathcal{A}^\#$ . De plus, en posant  $\eta = \xi^\circledast + \xi$ , on a  $\xi = (1 + \Delta)^{-1}\eta$ . Donc, par le théorème 4.1, on a

$$\|\pi(\xi)\| \leq \gamma(-1)\|\pi'(\eta)\| = \frac{1}{2}(\|\pi'(\eta)\|) = \frac{1}{2}(\|\pi'(\xi)\| + \|\pi'(\xi)^*\|) \leq 1.$$

Par conséquent,  $h = \pi(\xi)$  est celui qu'on recherche. L'unicité de  $h$  découle de l'unicité de  $\xi$  et du fait que  $h$  soit borné. C.Q.F.D.

**Remarque.** Le théorème 8.5 nous indique que si un opérateur positif  $a$  sur un espace de Hilbert est majoré par un opérateur nucléaire positif  $b$ , alors il existe un unique opérateur positif  $h$  de norme  $\leq 1$  tel que  $a = h b h$ . L'auteur ignore si cela est vrai pour une paire générale  $a$  et  $b$  telle que  $0 \leq a \leq b$ .

Nous allons maintenant examiner comment décrire la relation entre  $\sigma_t^\varphi$  et  $\psi$  en termes des groupes d'automorphismes modulaires associés.

**Définition 8.6.** Pour chaque fonctionnelle positive normale  $\varphi$  d'une algèbre de von Neumann, l'ensemble  $M_\varphi = \{x \in M : x\varphi = \varphi x\}$  est appelé le centralisateur de  $\varphi$ . Bien sûr, le centralisateur  $M_\varphi$  est une sous-algèbre de von Neumann de  $M$ .

Si  $M$  est semi-finie, et si  $\varphi$  est de la forme  $\varphi(x) = \tau(xh)$ ,  $x \in M$ , avec  $\tau$  une trace fidèle et semi-finie et un opérateur auto-adjoint positif  $h$  affilié à  $M$ , alors le centralisateur  $M_\varphi$  de  $\varphi$  n'est rien d'autre que le commutant relatif de  $h$  dans  $M$ . En général, le centralisateur  $M_\varphi$  d'un état normal fidèle  $\varphi$  est précisément la sous-algèbre des points fixes de  $M$  sous le groupe d'automorphismes modulaires associé  $\sigma_t^\varphi$  comme on le voit dans ce qui suit :

**Proposition 8.7.** *Si  $\varphi$  est une fonctionnelle linéaire positive normale fidèle d'une algèbre de von Neumann  $M$ , alors le centralisateur  $M_\varphi$  de  $\varphi$  est précisément l'ensemble de tous les points fixes du groupe d'automorphismes modulaires associé  $\sigma_t^\varphi$ .*

*Preuve.* Supposons que  $a \in M$  soit un point fixe de  $\sigma_t^\varphi$ . Par la condition KMS, pour tout  $x \in M$ , il existe une fonction bornée  $F(a)$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$ , et continue sur cette même bande, telle que

$$F(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(a)x);$$

$$F(t+i) = \varphi(x\sigma_t^\varphi(a)).$$

Mais  $\sigma_t^\varphi(a) = a$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , de sorte que  $F(t)$  et  $F(t+i)$  sont des fonctions constantes de  $t$ ; donc  $F(a)$  doit être constante. Ainsi, nous avons  $F(t) = F(t+i)$ , ce qui signifie que  $\varphi(ax) = \varphi(xa)$ . Puisque  $x$  est arbitraire, on obtient  $\varphi a = a\varphi$ ; donc  $a$  est dans le centralisateur  $M_\varphi$  de  $\varphi$ .

Réciproquement, supposons que  $a$  soit dans le centralisateur  $M_\varphi$ . Puisque  $\varphi$  est  $\sigma_t^\varphi$ -invariant, il est évident que  $\sigma_t^\varphi(M_\varphi) = M_\varphi$ . Donc, on a

$$(8.11) \quad \varphi\sigma_t^\varphi(a) = \sigma_t^\varphi(a)\varphi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $x$  un élément arbitraire de  $M$ . Alors il existe une fonction bornée  $F(a)$  sur la bande qui assure la condition KMS pour la paire  $a$  et  $x$ . Mais l'égalité (8.11) mentionne que  $F(t) = F(t+i)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent, d'après le théorème de Sturm-Liouville, la fonction holomorphe bornée périodique  $F$  doit être constante. Ainsi  $\varphi(\sigma_t(a)x) = \varphi(ax)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in M$ . Donc on a

$$\langle x\xi_0 | a^*\xi_0 \rangle = \langle ax\xi_0 | \xi_0 \rangle = \varphi(ax) = \varphi(\sigma_t^\varphi(a)x) = \langle \sigma_t^\varphi(a)x\xi_0 | \xi_0 \rangle = \langle x\xi_0 | \sigma_t^\varphi(a^*)\xi_0 \rangle .$$

Par conséquent,  $\sigma_t^\varphi(a^*) = a^*$ , de manière équivalente  $\sigma_t^\varphi(a) = a$ . Ainsi,  $a$  est un point fixe de  $\sigma_t^\varphi$ .  
C.Q.F.D.

### Théorème 8.8.

Dans la même situation qu'auparavant, les énoncés suivants pour une fonctionnelle linéaire positive normale  $\psi$  de  $M$  sont équivalents :

- (a)  $\psi$  est  $\sigma_t^\varphi$ -invariant ;
- (b)  $\psi$  est de la forme  $\psi = \omega_{\xi, \xi}$ , avec  $\xi \in P^\#$  et  $\Delta^{it}\xi = \xi$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ;
- (c)  $\psi$  est de la forme  $\psi = \omega_{h\xi_0, h\xi_0}$  avec  $h$  un opérateur auto-adjoint positif affilié au centralisateur  $M_\varphi$  de  $\varphi$ .

Sous l'hypothèse que  $\psi$  est fidèle, les énoncés suivants sont également équivalents aux précédents :

- (d)  $\sigma_t^\varphi$  et  $\sigma_s^\psi$  commutent,  $s, t \in \mathbb{R}$  ;
- (e)  $\varphi$  est  $\sigma_t^\psi$ -invariant.

Si un  $\psi$  fidèle satisfait l'une des conditions ci-dessus, alors le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\psi$  de associé à  $\psi$  est donné par

$$\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it}), \quad x \in M ,$$

où  $h$  est celui décrit dans l'énoncé (c)

*Preuve.* Les implications (c)  $\implies$  (b)  $\implies$  (a) sont presque triviales.

(a)  $\implies$  (b) Supposons que  $\psi$  soit  $\sigma_t^\varphi$ -invariant. D'après le théorème 8.5,  $\psi$  est uniquement de la forme  $\psi = \omega_{\xi, \xi}$  de sorte que  $\xi \in P^\#$ . Alors, on a pour chaque  $x \in M$ ,

$$\omega_{\Delta^{it}\xi, \Delta^{it}\xi}(x) = \langle x\Delta^{it}\xi | \Delta^{it}\xi \rangle = \langle \Delta^{-it}x\Delta^{it}\xi | \xi \rangle = \psi \cdot \sigma_{-t}^\varphi(x) = \psi(x) ,$$

de telle façon que  $\psi = \omega_{\Delta^{it}\xi, \Delta^{it}\xi}(x)$ . Mais il est évident que  $\Delta^{it}P^\# = P^\#$ . Par conséquent, l'unicité de  $\xi$  implique que  $\xi = \Delta^{it}\xi$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ; ainsi (b) s'ensuit.

(b)  $\implies$  (c) Supposons que  $\Delta^{it}\xi = \xi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Rappelons la construction de  $h$  dans la preuve de la proposition 8.4. Alors l'opérateur  $h_0$  construit dans cette proposition commute avec  $\Delta^{it}$ , de sorte que l'extension de Friedrichs  $h$  de  $h_0$  et  $\Delta^{it}$  commutent. Par conséquent, toutes les projections spectrales de  $h$  commutent avec  $\Delta^{it}$ , ce qui signifie que  $\sigma_t^\varphi$  laisse toutes ces projections fixes ; par conséquent, elles appartiennent à  $M_\varphi$  d'après la proposition 8.7. Ainsi,  $h$  est affilié à  $M_\varphi$ .

L'équivalence de (d) et (a) découle du résultat plus général suivant, le théorème 8.11, et celle de (d) et (e) découle de la symétrie.

Et maintenant, nous allons prouver la dernière affirmation pour  $\sigma_t^\psi$ . Puisque  $\psi$  est fidèle,  $h$  est non singulière. Soit  $h = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$  la décomposition spectrale et soit  $e_n = \int_{1/n}^n de(\lambda)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Alors  $\{e_n\}$  converge fortement vers l'identité 1. Soit  $\mathcal{A}_0$  le sous-ensemble de  $\mathcal{A} = M\xi_0$  considéré dans la définition 5.3. Puisque  $e_n$  et  $\Delta^{it}$  commutent,  $\Delta^{it}e_n\xi_0 = e_n\xi_0 \in \mathcal{A}$ , de sorte que  $e_n\xi_0$  appartient à  $\mathcal{A}_0$ . Puisque  $\pi(e_n\xi_0) = e_n$ ,  $e_n\pi(\mathcal{A}_0)e_n$  est contenu dans  $\pi(\mathcal{A}_0)$ . Soit  $M_0 = \bigcup_{n=1}^\infty e_n\pi(\mathcal{A}_0)e_n$ . Alors  $M_0$  est une  $*$ -sous-algèbre  $\sigma$ -faiblement dense de  $M$  et pour chaque  $x \in M_0$ , les applications :  $t \mapsto \sigma_t^\varphi(x)$  et  $t \mapsto h^{it}xh^{-it}$  sont toutes deux étendues à des fonctions entières à valeurs dans  $M_0$ , dont les valeurs en  $a \in \mathbb{C}$  sont formellement notées  $\sigma_a^\varphi(x)$  et  $h^{ia}xh^{-ia}$  respectivement. Soient  $x$  et  $y$  des éléments arbitraires de  $M_0$ . Alors on a  $x = e_nxe_n$  et  $y = e_nye_n$  pour un certain  $n$ . Soit  $h_n = he_n \in M$ . Définissons une fonction entière  $F(a)$  par

$$F(a) = \langle h^{2ia}xh^{-2ia}\sigma_{-a}^\varphi(y)h\xi_0|h\xi_0 \rangle .$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle h^{2it}xh^{-2it}\sigma_{-t}^\varphi(y)h\xi_0|h\xi_0 \rangle = \psi(h^{2it}xh^{-2it}\sigma_{-t}^\varphi(y)) \\ &= \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it})y) \text{ par la } \sigma_t^\varphi\text{-invariance de } \psi ; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F(t+i) &= \langle h^{2i(t+i)} x h^{-2i(t+i)} \sigma_{-(t+i)}^\varphi(y) h \xi_0 | h \xi_0 \rangle \\
&= \langle h^{2i(t+i)} e_n x e_n h^{-2i(t+i)} \sigma_{-(t+i)}^\varphi(e_n y e_n) h \xi_0 | h \xi_0 \rangle \\
&= \langle \Delta^{-i(t+i)} e_n y e_n h \xi_0 | h^{2i(t-i)} e_n x^* e_n h^{-2i(t-i)} h \xi_0 \rangle \\
&= \langle J h^{2(it+1)} e_n x^* e_n h^{-2(it+1)} h \xi_0 | J \Delta^{-it+1} e_n y e_n h \xi_0 \rangle \\
&= \langle \Delta^{1/2} S h^{2(it+1)} e_n x^* e_n h^{-2(it+1)} h \xi_0 | \Delta^{-it-1} \Delta^{1/2} S e_n y e_n h \xi_0 \rangle \\
&= \langle \Delta^{1/2} h h^{2(it-1)} e_n x e_n h^{-2(it-1)} \xi_0 | \Delta^{-it-1/2} h_n y^* \xi_0 \rangle \\
&= \langle h_n^2 h^{2(it-1)} e_n x e_n h^{-2it} h_n^2 \xi_0 | \Delta^{-it} y^* \xi_0 \rangle \\
&= \langle h^{2it} e_n x e_n h^{-2it} h_n^2 \xi_0 | \Delta^{-it} y^* \xi_0 \rangle \\
&= \langle y \Delta^{it} h^{2it} x h^{-2it} h_n^2 \xi_0 | \xi_0 \rangle \\
&= \varphi(y \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}) h_n^2) \\
&= \varphi(h_n y \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}) h_n) \text{ par Proposition 8.7,} \\
&= \langle h_n y \Delta^{it} h^{2it} e_n x e_n h^{-2it} h_n \xi_0 | \xi_0 \rangle \\
&= \langle \Delta^{it} h^{2it} x h^{-2it} h \xi_0 | y^* h_n \xi_0 \rangle \\
&= \langle \Delta^{it} h^{2it} x h^{-2it} h \xi_0 | y^* h \xi_0 \rangle \\
&= \langle y \Delta^{it} h^{2it} x h^{-2it} h \xi_0 | h \xi_0 \rangle \\
&= \langle \psi(y \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it})) \rangle
\end{aligned}$$

Ainsi, cette fonction  $F(a)$  satisfait la condition :

$$F(t) = \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}) y) ;$$

$$F(t+i) = \psi(y \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it})) .$$

Supposons que  $x$  et  $y$  soient une paire arbitraire dans  $M$ . Alors il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$

dans  $M_0$  telles que

$$\begin{aligned} x\xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \xi_0, & x^* \xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* \xi_0, \\ xh\xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n h \xi_0, & x^* h \xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* h \xi_0 \\ y\xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \xi_0, & y^* \xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* \xi_0 \\ yh\xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n h \xi_0, & y^* h \xi_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* h \xi_0 \end{aligned}$$

Soit  $\{F_n\}$  la suite de fonctions entières telles que

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x_n h^{-2it}) y_n) ; \\ F_n(t+i) &= \psi(y_n \sigma_t^\varphi(h^{2it} x_n h^{-2it})) . \end{aligned}$$

Soit  $f(t) = \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}) y)$  et  $g(t) = \psi(y \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}))$ . Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t) - F_n(t)| &= |\psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it}) y) - \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x_n h^{-2it}) y_n)| \\ &\leq |\psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} (x - x_n) h^{-2it}) y)| + |\psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x_n h^{-2it}) (y - y_n))| \\ &\leq \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} (x - x_n) (x - x_n)^* h^{-2it}))^{1/2} \psi(y^* y)^{1/2} \\ &\quad + \psi(\sigma_t^\varphi(h^{2it} x_n x_n^* h^{-2it}))^{1/2} \psi((y - y_n)^* (y - y_n))^{1/2} \\ &= \psi(x - x_n) (x - x_n)^*^{1/2} \psi(y^* y)^{1/2} + \psi(x_n x_n^*)^{1/2} \psi(y - y_n)^* (y - y_n)^{1/2} \\ &= \|(x^* - x_n^*) h \xi_0\| \|y h \xi_0\| + \|x_n \xi_0\| \|(y - y_n) h \xi_0\| , \end{aligned}$$

de sorte que  $F_n(t)$  converge uniformément vers  $f(t)$ . De même,  $F_n(t+i)$  converge uniformément vers  $g(t)$ . Ainsi, d'après le théorème de Phragmen-Lindelöf,  $F_n(a)$  converge uniformément vers la fonction bornée  $F(a)$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$  et continue sur cette même bande, telle que  $F(t) = f(t)$  et  $F(t+i) = g(t)$ . Ainsi  $\psi$  satisfait la condition KMS pour le groupe d'automorphismes à un paramètre :  $x \mapsto \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, on obtient  $\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it} x h^{-2it})$ ,  $x \in M$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . C.Q.F.D.

**Corollaire 8.9.** *Dans la même situation que précédemment, si une fonctionnelle linéaire positive normale  $\psi$  de  $M$  satisfait la condition KMS pour  $\sigma_t^\varphi$ , alors  $\psi$  est de la forme  $\psi = \omega_{h\xi_0, h\xi_0}$  avec  $h$  un opérateur auto-adjoint positif affilié au centre de  $M$ .*

*Preuve.* Puisque  $\psi$  est invariant par  $\sigma_t^\varphi$ ,  $\psi$  satisfait les conditions du théorème 8.8. Par conséquent,  $\psi$  est de la forme  $\psi = \omega_{h\xi_0, h\xi_0}$  avec  $h$  un opérateur auto-adjoint positif affilié à  $M_\varphi$ . Nous affirmons que la projection support de  $\psi$ , qui est la projection de l'image de  $h$ , est centrale. En fait, si  $\psi(x^*x) = 0$ , alors la fonction  $\psi(\sigma_t^\varphi(x^*)x)$  s'annule identiquement par l'inégalité de Schwarz ; par conséquent,  $\psi(x\sigma_t^\varphi(x^*))$  s'annule également identiquement par la condition KMS. En particulier,  $\psi(xx^*) = 0$ . Ainsi, le noyau gauche de  $\psi$  est en fait un idéal bilatère. Par conséquent, la projection support  $z$  de  $\psi$  est centrale. En considérant uniquement  $Mz$ , nous pouvons supposer que  $\psi$  est

fidèle. Alors, à nouveau par le théorème 8.8,  $\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it})$  pour tout  $x \in M$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Mais par hypothèse,  $\sigma_t^\psi = \sigma_t^\varphi$ . Par conséquent, on obtient

$$\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it}) \ ;$$

donc  $x = h^{2it}xh^{-2it}$ , ce qui signifie que  $h$  est affilié au centre. C.Q.F.D.

**Corollaire 8.10.** *Supposons que  $M$  est de type III. Alors le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  de  $M$  associé à un état normal fidèle  $\varphi$  n'admet pas de fonctionnelle normale positive satisfaisant la condition KMS en  $\beta \neq 1$ .*

*Preuve.* Supposons que  $\psi$  soit une fonctionnelle linéaire normale positive satisfaisant la condition KMS en  $\beta$  pour  $\sigma_t^\varphi$ . Alors, comme dans la démonstration du corollaire 8.9, nous pouvons supposer que  $\psi$  est fidèle. Alors on obtient  $\sigma_t^\psi = \sigma_{\beta t}^\varphi$  par hypothèse. D'autre part, le théorème 8.8 dit que  $\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it})$ ,  $x \in M$ , avec  $h$  un opérateur auto-adjoint positif affilié à  $M_\varphi$ . Par conséquent, on obtient

$$\sigma_{\beta t}^\varphi(x) = \sigma_t^\varphi(h^{2it}xh^{-2it}), \quad x \in M \ ,$$

de sorte que

$$\sigma_{t(\beta-1)}^\varphi = h^{2it}xh^{-2it}, \quad x \in M \ .$$

Donc si  $\beta \neq 1$ , alors

$$\sigma_t^\varphi(x) = h^{2it/(\beta-1)}xh^{-2it/(\beta-1)}, \quad x \in M \ ,$$

de sorte que le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$  est intérieur. Alors le théorème 8.2 dit que  $M$  est semi-finie. Ceci contredit l'hypothèse. C.Q.F.D.

**Théorème 8.11.** *Soit  $\sigma$  un automorphisme de  $M$ .*

- (a) *Si  $\sigma$  laisse  $\varphi$  invariant, alors  $\sigma$  commute avec le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t^\varphi$ .*
- (b) *Réciproquement, si  $\sigma$  commute avec  $\sigma_t^\varphi$  et si  $\sigma$  laisse le centre de  $M$  fixe élément par élément, alors  $\sigma$  laisse  $\varphi$  invariant.*

*Preuve.* Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $M$ . Soit  $F_{x,y}(a)$  une fonction holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im a \leq 1$ , et continue sur cette même bande, telle que

$$F_{x,y}(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(x)y) \ ; F(t+i) = \varphi(y\sigma_t^\varphi(x)).$$

Alors on a

$$F_{\sigma(x),\sigma(y)}(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(\sigma(x))\sigma(y)) = \varphi \cdot \sigma(\sigma^{-1}\sigma_t^\varphi\sigma(x)y) \ ;$$

similairement

$$F_{\sigma(x),\sigma(y)}(t+i) = \varphi \cdot \sigma(y\sigma^{-1}\sigma_t^\varphi\sigma(x)) \ .$$

Par conséquent, on obtient

$$\sigma_t^{\varphi \cdot \sigma} = \sigma^{-1}\sigma_t^\varphi\sigma \ .$$

Donc si  $\varphi = \varphi \cdot \sigma$ , alors  $\sigma$  et  $\sigma_t^\varphi$  doivent commuter.

Supposons que  $\sigma$  laisse le centre de  $M$  fixe élément par élément et commute avec  $\sigma_t^\varphi$ . Soit  $\psi = \varphi \cdot \sigma$ . Alors nous avons montré que  $\sigma_t^\psi = \sigma^{-1} \sigma_t^\varphi \sigma = \sigma_t^\varphi$ . Par conséquent,  $\psi$  satisfait la condition KMS pour  $\sigma_t^\varphi$ , de sorte que  $\psi(x) = (xh\xi_0|\xi_0)$ ,  $x \in M$ , avec  $h$  un opérateur auto-adjoint positif affilié au centre  $Z$  de  $M$ .

Supposons  $h \neq 1$ . Alors il existe un élément positif non nul  $k$  dans  $Z$  tel que  $hk$  soit borné et  $h^2k^2 > k^2$  ou  $h^2k^2 < k^2$ . Alors on a

$$\|hk\xi_0\|^2 = \langle h^2k^2\xi_0|\xi_0 \rangle \neq \langle k^2\xi_0|\xi_0 \rangle = \|k\xi_0\|^2 ;$$

mais

$$\begin{aligned} \|hk\xi_0\|^2 &= \langle kh\xi_0|kh\xi_0 \rangle = \langle k^2h\xi_0|h\xi_0 \rangle \\ &= \psi(k^2) = \varphi \cdot \sigma(k^2) = \varphi(k^2) \\ &= \langle k^2\xi_0|\xi_0 \rangle = \|k\xi_0\|^2 . \end{aligned}$$

Ceci est impossible. Donc  $h = 1$ , ou de manière équivalente  $\varphi = \psi$ .

C.Q.F.D.

## 9. Notes

Une grande partie de la théorie présentée ici a été consacrée à démontrer l'existence de la symétrie entre une algèbre de von Neumann  $M$  et son commutant  $M'$ . L'existence d'une involution unitaire  $J$  qui établit la symétrie entre  $M$  et  $M'$  a été prédite depuis longtemps. On peut retracer son histoire jusqu'aux travaux de Murray-von Neumann dans les années 1930. En fait, ils ont montré en 1937 que si un facteur fini  $M$  sur  $\mathcal{K}$  admet un vecteur trace cyclique  $\xi_0$  (nécessairement séparant), alors l'involution :  $x\xi_0 \in M\xi_0 \mapsto x^*\xi_0 \in M\xi_0$  est étendue à une involution unitaire  $J$  avec  $JMJ = M'$ , [15]. Ce résultat a été généralisé par H.A. Dye en 1952, [8], aux algèbres de von Neumann finies avec un vecteur trace cyclique et séparant. Motivé par les travaux d'Ambrose [1], H. Nakano a introduit les algèbres de Hilbert en 1950, [17]. Ces algèbres ont fait l'objet de recherches plus approfondies par plusieurs auteurs entre 1951 et 1955, notamment J. Dixmier [5], R. Godement [9], R. Pallu de la Barrière [18], L. Pukanszky [21], I. E. Segal [22], O. Takenouchi [24] et ainsi de suite.

En étendant les travaux de Dye sur le théorème de Radon-Nikodym non commutatif à la théorie de l'intégration non commutative, i.e. Segal a montré en 1953, [22], que (a) l'algèbre de von Neumann à gauche  $L(A)$  et l'algèbre de von Neumann à droite  $R(A)$  d'une algèbre de Hilbert sont des commutants l'une de l'autre ; (b) l'involution dans  $A$  est étendue à une involution unitaire  $J$  avec  $JL(A)J = R(A)$  ; (c)  $L(A)$ , donc  $R(A)$ , est semi-finie ; (d) toute algèbre de von Neumann semi-finie est isomorphe à l'algèbre de von Neumann à gauche d'une certaine algèbre de Hilbert ; (e) Le préduel  $M$  d'une algèbre de von Neumann semi-finie est représenté comme l'espace de Banach  $L^1(M, \tau)$  de tous les opérateurs intégrables par rapport à une trace fidèle, semi-finie et normale  $\tau$  sur  $M$ . R. Godement a également démontré (a), (c) et (d) peu après Segal, [8]. J. Dixmier a vérifié (e) de manière abstraite, en développant la  $L^p$ -théorie, [6].

Généralisant la notion d'algèbre de Hilbert, J. Dixmier a introduit les quasi-algèbres de Hilbert et a démontré en 1952, [5], l'énoncé (a) pour les quasi-algèbres de Hilbert ainsi qu'un critère de

semi-finitude de l'algèbre de von Neumann à gauche d'une quasi-algèbre de Hilbert sous certaines hypothèses techniques. Le caractère standard de  $L(A)$ , c'est-à-dire l'énoncé (b), n'a pas été mentionné (bien qu'il soit trivial de déduire le caractère standard de ses résultats). De plus, il a démontré dans le même article que l'algèbre de von Neumann obtenue par la construction dite de l'espace de mesure de groupe est l'algèbre de von Neumann à gauche d'une quasi-algèbre de Hilbert. Les hypothèses techniques pour le critère de semi-finitude ont été ultérieurement levées par L. Pukanszky en 1955, [20].

Dans les travaux de Dixmier et de Pukanszky, l'opérateur modulaire  $\Delta$ , ou plus précisément  $\Delta^{1/2}$  et  $\Delta^{-1/2}$ , n'a pas reçu une attention particulière. Ils le considéraient comme un simple terme d'ajustement de l'involution plutôt que comme l'objet fondamental de la théorie. C'est Tomita qui a considéré  $\Delta^{1/2}$  comme la valeur absolue de l'involution de  $M$  dans la structure de l'espace de Hilbert. Il a découvert ce fait dès 1959 [29] et a soulevé plusieurs questions importantes. Mais personne n'a approfondi son idée pourtant prometteuse (en partie à cause de la complexité des notations de son article). Finalement, en 1967, Tomita est parvenu à démontrer notre théorème 5.8 ainsi que le théorème de commutation pour le produit tensoriel des algèbres de von Neumann [30, 31]. La théorie développée dans les sections 1 à 5 lui est entièrement due.

Au moment où les travaux de Tomita ont paru, R. Haag, N.M. Hugenholtz et M. Winnink [10] ont apporté une contribution très importante de la mécanique statistique quantique à la théorie des représentations standard des algèbres d'opérateurs. Ils ont montré que, étant donnée une  $C^*$ -algèbre munie d'un groupe d'automorphismes à un paramètre, la représentation cyclique de cette algèbre induite par un état satisfaisant la condition de Kubo-Martin-Schwinger est standard. En comparant les travaux de Tomita et les résultats de Haag, Hugenholtz et Winnink, M. Takesaki a constaté que la condition KMS est l'essence des représentations standard [25]. Un exposé technique des théorèmes 8.1 et 8.2 se trouve dans les travaux de Dixmier [5] et Pukanszky [20].

Le théorème 6.2 a été démontré indépendamment par Takesaki [25] et Winnink [36]. La démonstration présentée dans cette note a été donnée à l'auteur par Hugenholtz lors de la conférence.

Les espérances conditionnelles dans les algèbres d'opérateurs ont été abordées pour la première fois par M. Nakamura et T. Turumaru en 1954 [15], qui ont résumé les propriétés fondamentales des espérances conditionnelles usuelles en théorie des probabilités. Voir les propriétés (7.1) à (7.8) ci-dessus. Un objet similaire a été abordé par Dixmier un peu plus tôt [6]. Umegaki a repris ce sujet dans ses articles suivants [33] et a étudié en détail les espérances conditionnelles pour une algèbre de von Neumann à trace finie. Tomiyama a également travaillé sur ce sujet, d'un point de vue légèrement différent [32, 33].

Les résultats de la section 8 se trouvent principalement dans les travaux de Takesaki, [25,26,27]. Une partie du théorème 8.5, à savoir l'existence d'un tel  $h$  dans (b), a été conjecturée par J. Dixmier dans la première édition de [4], p. 63, et démontrée plus tard par S. Sakai, [21]. F. Perdrizet a donné un exemple [19] dans lequel l'opérateur auto-adjoint positif  $h$  dans l'énoncé (8.5) du théorème 8.5 n'est pas unique, alors que  $\xi$  est unique. Le théorème 8.11 est dû à R. Herman et M. Takesaki, [11].

Bien sûr, la théorie présentée ici n'est pas complète. Il y a plusieurs points à considérer : par exemple,

quelle est la dépendance du groupe d'automorphismes modulaires par rapport à l'état normal fidèle qui le détermine? L'application  $\varphi \mapsto \sigma_t^\varphi$  est-elle continue dans un sens quelconque? Existe-t-il une relation entre les groupes d'automorphismes modulaires et le type algébrique des algèbres de von Neumann? Etc., etc., ... L'auteur espère que ces notes contribueront au développement ultérieur de la théorie.

## Références

- [1] Ambrose, W., "The  $L^2$ -system of a Unimodular Group I", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65, 27-48, (1949).
- [2] Combes, F., "Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche", *Compositio Math.*, 23, 49-77, (1971).
- [3] ———, "Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann", *Bull. Soc. Math. France*, 99, 73-112, (1971).
- [4] Dixmier, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris 2ème édition, (1969).
- [5] ———, "Algèbres quasi-unitaires", *Comm. Math. Helv.*, 26, 275-322, (1952); voir aussi son résumé, C.R. Acad. Sci., Paris, 233, 837-839, (1951).
- [6] ———, "Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs", *Bull. Soc. Math. France*, 81, 9-39, (1953).
- [7] Dunford, N., and Schwartz, J. T., *Linear Operators II*, Interscience Publications, New York, (1963).
- [8] Dye, H. A., "The Radon-Nikodym Theorem for Finite Rings of Operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72, 243-280, (1952).
- [9] Godement, R., "Théorie des caractères, I. Algèbres unitaires", *Ann. Math.*, 59, 47-62, (1954).
- [10] Haag, R., Hugenholtz, N., and Winnink, M., "On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics", *Comm. Math. Phys.*, 5, 215-236, (1967).
- [11] Herman, R., and Takesaki, M., "States and Automorphism Groups of Operator Algebras", *Comm. Math. Phys.*, 19, 142-160, (1970).
- [12] Hille, E., and Phillips, R., "Functional Analysis and Semi-groups", *Amer. Math. Colloquium Publication*, 31, (1957).
- [13] Hugenholtz, N., and Wieringa, J., "On Locally Normal States in Quantum Statistical Mechanics", *Comm. Math. Phys.*, 11, 183-197, (1969).

- [14] Kastler, D., Pool, J., and Thue Poulsen, E., “Quasi-unitary Algebras attached to Temperature States in Statistical Mechanics, a comment on the work of Haag, Hugenholtz and Winnink”, *Comm. Math. Phys.*, 12, 175-192, (1969).
- [15] Murray, F. J., and von Neumann, J., “On Rings of Operators”, *Ann. Math.*, 37, 116-229, (1936), II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41, 208-248, (1937).
- [16] Nakamura, M., and Turumaru, T., “Expectations in an Operator Algebra”, *Tōhoku Math. J.*, 6, 182-188, (1954).
- [17] Nakano, H., “Hilbert Algebras”, *Tōhoku Math. J.*, 2, 4-23, (1950).
- [18] de la Barrière, Pallu., “Algèbres unitaires et espaces de Ambrose”, *C.R. Acad. Sci.*, 233, 997-999, (1951).
- [19] Perdrizet, F., “Éléments positifs relativement à une algèbre hilbertienne à gauche”, à paraître.
- [20] Pukanszky, L., “On the Theory of Quasi-unitary Algebras”, *Math. Szeged*, 16, 103-121, (1955).
- [21] Sakai, S., “A Radon-Nikodym Theorem in  $W^*$ -algebras”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71, 149-151, (1965).
- [22] Segal, I.E., “A Non-commutative Extension of Abstract Integration”, *Ann. Math.*, 57, 401-457, (1953).
- [23] Sirugue, M., and Winnink, M., “Constraints Imposed Upon a State of a System that Satisfies the K.M.S. Boundary Condition”, à paraître.
- [24] Takenouchi, O., “On the Maximal Hilbert Algebras”, *Tōhoku Math. J.*, 3, 123-131, (1951).
- [25] Takesaki, M., *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, (Lecture Notes), Springer, 128, (1970).
- [26] ———, “Disjointness of the KMS-States of Different Temperatures”, *Comm. Math. Phys.*, 17, 33-41, (1970).
- [27] ———, “Conditional Expectations in von Neumann Algebras”, à paraître dans *J. Functional Analysis*.
- [28] ———, *The Theory of Operator Algebras*, (Lecture Notes), UCLA, (1969/1970).
- [29] Tomita, M., “Spectral Theory of Operator Algebras I”, *Math. J. Okayama Univ.*, 9, 63-98, (1959).
- [30] ———, “Quasi-standard von Neumann Algebras”, (note miméographiée). (1967).
- [31] ———, “Standard Forms of von Neumann Algebras”, *The Vth Functional Analysis Symposium of the Math. Soc. of Japan, Sendai.*, (1967).
- [32] Tomiyama, J., “On the Projection of Norm One in  $W^*$ -algebras”, *Proc. Japan Acad.*, 33, 608-612, (1957).
- [33] ———, *Tensor Products and Projections of Norm one in von Neumann Algebras*, (Lecture Notes), University of Copenhagen, (1970/71).
- [34] Umegaki, H., “Conditional Expectation in Operator Algebras I”, *Tōhoku Math. J.*, 6, 177-181, (1954) ; II, *Tōhoku Math. J.*, 8, 86-100, (1956) ; III, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 11, 51-64, (1959) ; IV, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 14, 59-85, (1962).

- [35] Winnink, M., “An Application of  $C^*$ -algebras to Quantum Statistical Mechanics of Systems in Equilibrium”, *Thèse*, Université de Groningue, (1968).
- [36] Winnink, M., “Algebraic Aspects of the Kubo-Martin-Schwinger Condition”, *Cargèse Lecture in Phys.*, Volume 4, 235-255, Gordon and Beach Publishers, New York, (1969).