

Tout nombre impair supérieur à 1 est la somme d'au plus cinq nombres premiers

Terence Tao

Résumé

Nous prouvons que tout nombre impair N supérieur à 1 peut s'exprimer comme la somme d'au plus cinq nombres premiers, améliorant le résultat de Ramaré selon lequel tout nombre naturel pair peut s'exprimer comme la somme d'au plus six nombres premiers. Nous suivons la méthode du cercle de Hardy-Littlewood et Vinogradov, ainsi que l'identité de Vaughan ; nos techniques supplémentaires, qui peuvent présenter un intérêt pour d'autres problèmes de type Goldbach, incluent l'utilisation de sommes exponentielles lissées et l'optimisation des paramètres de l'identité de Vaughan pour économiser ou réduire certaines pertes logarithmiques, l'utilisation de multiples échelles suivant certaines idées de Bourgain, et l'utilisation du principe d'incertitude de Montgomery et du grand crible pour améliorer les estimations L^2 sur les arcs majeurs. Notre argument repose sur certains travaux numériques antérieurs, à savoir la vérification par Richstein de la conjecture de Goldbach paire jusqu'à 4×10^{14} , et la vérification par van de Lune et (indépendamment) par Wedeniwski de l'hypothèse de Riemann jusqu'à la hauteur 3.29×10^9 .

1. Introduction

Deux des conjectures les plus connues en théorie additive des nombres sont les conjectures de Goldbach paire et impaire, que nous formulons comme suit ¹ :

[Conjecture de Goldbach paire] Tout nombre naturel pair x peut s'exprimer comme la somme d'au plus deux nombres premiers.

[Conjecture de Goldbach impaire] Tout nombre impair x supérieur à 1 peut s'exprimer comme la somme d'au plus trois nombres premiers.

Il a été établi de manière célèbre par Vinogradov [47], en utilisant la méthode du cercle de Hardy-Littlewood, que la conjecture de Goldbach impaire est vraie pour tout impair x suffisamment grand. L'argument de Vinogradov peut être rendu effectif, et divers seuils explicites pour “suffisamment grand” ont été donnés dans la littérature ; en particulier, Chen et Wang [5] ont établi la conjecture de Goldbach impaire pour tout $x \geq \exp(\exp(11.503)) \approx \exp(99012)$, et Liu & Wang [24] ont ensuite étendu ce résultat à l'intervalle $x \geq \exp(3100)$. À l'autre extrême, en combinant la vérification numérique par Richstein [41] de la conjecture de Goldbach paire pour $x \leq 4 \times 10^{14}$ avec des

Traduction de cet article arxiv <https://arxiv.org/pdf/1201.6656>.

1. NdT : Les notes de bas de page originales sont numérotées et reportées ici.

intervalles courts effectifs contenant des nombres premiers (basés sur une vérification numérique de l'hypothèse de Riemann par van de Lune et Wedeniwski [50]), Ramaré et Saouter [40] ont vérifié la conjecture de Goldbach impaire pour $n \leq 1.13 \times 10^{22} \approx \exp(28)$. En utilisant des vérifications numériques ultérieures de la conjecture de Goldbach paire et de l'hypothèse de Riemann, il est possible d'augmenter quelque peu ce seuil inférieur, mais il existe encore un écart très significatif entre les seuils inférieur et supérieur pour lesquels la conjecture de Goldbach impaire est connue². Pour expliquer la raison de cela, rappelons d'abord brièvement comment les théorèmes de type Vinogradov sont prouvés. Pour représenter un nombre x comme somme de trois nombres premiers, il suffit d'obtenir une minoration suffisamment non triviale pour la somme

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = x}} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) \Lambda(n_3)$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt (voir la Section 2 pour les définitions). Par analyse de Fourier, nous pouvons réécrire cette expression comme l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S(x, \alpha)^3 e(-x\alpha) d\alpha \quad (1.1)$$

où $e(x) = e^{2\pi i x}$ et $S(x, \alpha)$ est la somme exponentielle

$$S(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha).$$

L'objectif est alors d'obtenir des estimations suffisamment précises sur $S(x, \alpha)$ pour x grand. En utilisant le théorème d'approximation de Dirichlet, on peut approximer $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ pour un certain entier naturel $1 \leq q \leq Q$, un certain entier a avec $(a, q) = 1$, et un certain β avec $|\beta| \leq \frac{1}{qQ}$, où Q est un seuil (quelque peu proche de N) à choisir plus tard. En gros, on divise alors en le cas des arcs majeurs lorsque q est petit, et le cas des arcs mineurs lorsque q est grand (en pratique, on peut aussi subdiviser ces cas en d'autres cas selon les tailles précises de q et β). Dans le cas des arcs majeurs, la somme $S(x, \alpha)$ peut être approchée par des sommes telles que

$$S(x, a/q) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(an/q),$$

qui peuvent être contrôlées par une version appropriée du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, comme le théorème de Siegel-Walfisz. Dans le cas des arcs mineurs, on peut plutôt suivre les méthodes de Vinogradov et utiliser des identités de sommes de diviseurs tronquées (comme (des variantes de) l'identité de Vaughan, voir le Lemme 4.11 ci-dessous) pour réécrire $S(x, \alpha)$ en diverses sommes de “type I” telles que

$$\sum_{d \leq U} \mu(d) \sum_{n \leq x/d} \log n e(\alpha dn)$$

et des sommes de “type II” telles que

$$\sum_{d > U} \sum_{w > V} \mu(d) \left(\sum_{\substack{b|w \\ b > V}} \Lambda(b) \right) e(\alpha dw) \quad (1.2)$$

2. NdT : La note de bas de page originale renvoie à une discussion sur les vérifications numériques et les travaux de Helfgott.

que l'on estime ensuite par des outils standards de sommes exponentielles linéaires et bilinéaires, comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Une estimation typique dans le cas des arcs mineurs prend la forme

$$|S(x, \alpha)| \ll \left(\frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{x/q}} + x^{4/5} \right) \log^3 x; \quad (1.3)$$

voir par exemple [19, Théorème 13.6]. Une version effective de cette estimation (avec des puissances logarithmiques légèrement différentes) a été donnée par Chen & Wang [6]; voir (1.13) ci-dessous.

On ne peut pas espérer obtenir une borne pour $S(x, \alpha)$ meilleure que $\frac{x\sqrt{\varphi(q)}}{q}$ sans faire de progrès sur le problème du zéro de Siegel (afin de décorréler Λ du caractère quadratique de conducteur q); voir [35] pour une discussion plus approfondie. Dans le même esprit, on ne doit pas s'attendre à obtenir une borne meilleure que $\frac{x}{\sqrt{x/q}}$ à moins d'exploiter un terme d'erreur non trivial dans le

théorème des nombres premiers pour les progressions arithmétiques (ou de manière équivalente, si l'on montre que les fonctions L n'ont pas de zéro sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$), car on doit décorréler Λ des caractères archimédiens n^{it} avec t comparable à x/q , (ou des caractères combinés $\chi(n)n^{it}$).

Si l'on combine (1.3) avec la borne L^2

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S(x, \alpha)|^2 d\alpha \ll x \log x \quad (1.4)$$

découlant de l'identité de Plancherel et du théorème des nombres premiers, on peut obtenir des estimations satisfaisantes pour tous les arcs mineurs avec $q \gg \log^8 x$ (en supposant que Q a été choisi significativement inférieur à $x/\log^8 x$). Pour terminer la preuve du théorème de Vinogradov, on a donc besoin de bons théorèmes des nombres premiers dans les progressions arithmétiques dont le module q peut être aussi grand que $\log^8 x$. Bien qu'il existe des versions effectives explicites de tels théorèmes (voir par ex. [27], [23], [39], [11], [20]), leur terme d'erreur décroît très lentement (et est sensible à la possibilité d'un zéro de Siegel pour un module exceptionnel q); en particulier, des erreurs de la forme $O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$ pour une constante explicite $c > 0$ modérément petite sont typiques. De telles erreurs peuvent éventuellement surmonter les pertes logarithmiques telles que $\log x$, mais seulement pour des x extrêmement grands, par exemple pour x beaucoup plus grand que 10^{100} , ce qui peut être considéré comme la raison principale pour laquelle les seuils des théorèmes de type Vinogradov sont si grands.

Il est donc intéressant de réduire les pertes logarithmiques dans (1.3), en particulier pour des x de taille modérée comme $x \sim 10^{30}$, car cela réduirait l'intervalle des modules q à vérifier dans le cas des arcs majeurs, permettant à des théorèmes des nombres premiers plus forts dans les progressions arithmétiques d'entrer en jeu. En particulier, le travail numérique de Platt [33] a établi des régions sans zéro pour les fonctions L de Dirichlet de conducteur jusqu'à 10^5 (s'appuyant sur des travaux antérieurs de Rumely [39] qui a obtenu des résultats similaires jusqu'au conducteur 10^2), et il est probable que ces résultats seraient utiles dans de futurs travaux sur les problèmes de type Goldbach. Plusieurs améliorations ou variantes de (1.3) sont déjà connues dans la littérature. Par exemple, avant l'introduction de l'identité de Vaughan dans [46], Vinogradov [48] avait déjà établi une borne de la forme

$$|S(x, \alpha)| \ll \left(\frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{x/q}} + \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}\right) \right) \log^{11/2} x$$

en criblant les petits nombres premiers. Cela a été amélioré par Chen [4] et Daboussi [7] pour obtenir

$$|S(x, \alpha)| \ll \left(\frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{x/q}} + \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}\right) \right) \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}$$

et les constantes ont été rendues explicites (avec une légère dégradation des exposants logarithmiques) par Daboussi et Rivat [8]. Malheureusement, en raison de la décroissance lente du terme $\exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x})$, cette estimation n'est non triviale que pour $x \geq 10^{184}$ (voir [8, §8]), et n'est donc pas d'une utilité directe pour des valeurs plus petites de x .

Dans [2], Buttkewitz a obtenu la borne

$$|S(x, \alpha)| \ll_A \frac{x}{\sqrt{q}} \log^{1/4} x + \frac{x}{x/q} \log \log \log x + \frac{x}{\log^A x} \quad (1.5)$$

pour tout $A \geq 1$ (en supposant β extrêmement petit), en utilisant l'estimation de Lavrik [22] sur le terme d'erreur moyen dans les problèmes de type nombres premiers jumeaux, mais les constantes ici sont inefficaces (car l'estimation de Lavrik utilise le théorème de Siegel-Walfisz). Enfin, dans le régime “d'arcs mineurs faibles” $\log q \leq \frac{1}{50} \log^{1/3} x$, Ramaré [37] a utilisé le crible de Bombieri pour obtenir une borne effective de la forme

$$|S(x, \alpha)| \ll \frac{x\sqrt{q}}{\varphi(q)} \quad (1.6)$$

qui, comme mentionné précédemment, est une borne effective essentiellement optimale en l'absence de progrès sur le problème du zéro de Siegel. Malheureusement, les constantes dans [37] ne sont pas calculées explicitement et semblent beaucoup trop grandes pour être utiles pour des valeurs de x telles que 10^{30} .

Dans cet article, nous ne travaillerons pas directement avec les sommes $S(x, \alpha)$, mais avec les sommes lissées

$$S_{\eta, q_0}(x, \alpha) \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n, q_0)=1} \eta(n/x)$$

pour certaines fonctions (continues par morceaux) lisses $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et un module q_0 . Le module q_0 n'a qu'une importance technique mineure et doit être ignoré lors d'une première lecture (voir le Lemme 4.1 pour une version précise de cette affirmation). Pour des constantes explicites, nous travaillerons souvent avec un choix spécifique de fonction de coupure η , à savoir la fonction de coupure

$$\eta_0(t) 4 (\log 2 - |\log 2t|)_+, \quad (1.7)$$

qui est supportée sur $[1/4, 1]$. L'utilisation de fonctions de coupure lisses pour améliorer le comportement des sommes exponentielles est bien sûr bien établie dans la littérature (en effet, le travail original de Hardy et Littlewood [16] sur les problèmes de type Goldbach utilisait déjà des sommes lissées). La raison de ce choix spécifique de fonction de coupure est que l'on a l'identité

$$\eta_0(dw/x) = 4 \int_0^\infty \mathbf{1}_{[\frac{w}{2W}, \frac{w}{W}]}(d) \mathbf{1}_{[\frac{w}{2}, W]}(w) \frac{dW}{W} \quad (1.8)$$

pour tout $d, w, x > 0$, ce qui sera pratique pour factoriser les sommes de type II sous une forme maniable. Dans certains cas, nous prendrons $q_0 = 2$, afin de restreindre toutes les sommes aux nombres impairs, plutôt qu'à tous les nombres naturels ; cela a pour effet d'économiser un facteur

deux dans les constantes explicites. En raison de cela, cependant, il devient naturel d'approximer 4α par un rationnel a/q , plutôt que α lui-même.

Notre résultat principal sur les sommes exponentielles peut être énoncé comme suit.

[Estimation de somme exponentielle] Soit $x \geq 10^{20}$ un nombre réel, et soit $4\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ pour un certain entier naturel $100 \leq q \leq x/100$ avec $(a, q) = 1$ et un certain $\beta \in [-1/q^2, 1/q^2]$. Soit q_0 un entier naturel tel que tous les facteurs premiers de q_0 ne dépassent pas $\sqrt{x}$. Alors

$$|S_{\eta_0, q_0}(x, \alpha)| \leq \left(0.14 \frac{x}{\sqrt{q}} + 0.64 \frac{x}{\sqrt{x/q}} + 0.15x^{4/5} \right) \log x (\log x + 11.3) \quad (1.9)$$

Si $q \leq x^{1/3}$, on a le raffinement

$$|S_{\eta_0, q_0}(x, \alpha)| \leq 0.5 \frac{x}{q} (\log 2x)(\log 2x + 15) + 0.31 \frac{x}{\sqrt{q}} \log q (\log q + 8.9) \quad (1.10)$$

et de même lorsque $q \geq x^{2/3}$, on a le raffinement

$$|S_{\eta_0, q_0}(x, \alpha)| \leq 3.12 \frac{x}{x/q} (\log 2x)(\log q + 8) + 1.19 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \log \frac{x}{q} \left(\log \frac{x}{q} + 2.3 \right). \quad (1.11)$$

Si $q \geq x^{2/3}$ et $a = \pm 1$, on a le raffinement supplémentaire

$$|S_{\eta_0, q_0}(x, \alpha)| \leq 9.73 \frac{x}{(x/q)^2} \log^2 x + 1.2 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \log \frac{x}{q} \left(\log \frac{x}{q} + 2.4 \right). \quad (1.12)$$

La première estimation (1.9) est essentiellement une version lissée de l'estimation standard (1.3), la nature lipschitzienne de la fonction de coupure η_0 étant responsable de l'économie d'un facteur logarithmique, et sera prouvée essentiellement par la même méthode (c'est-à-dire l'identité de Vaughan, suivie d'estimations de sommes linéaires et bilinéaires de type Vinogradov); on peut la comparer par exemple avec l'estimation explicite

$$|S_{1_{[0,1]}, 1}(x, 4\alpha)| \leq 0.177 \frac{x}{\sqrt{q}} \log^3 x + 0.08 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \log^{3.5} x + 3.8x^{4/5} \log^{2.2} x \quad (1.13)$$

de Chen & Wang [6], réécrite dans notre notation. En pratique, pour x de l'ordre de 10^{30} ou plus, l'estimation (1.3) améliore l'estimation de Chen-Wang d'environ un à deux ordres de grandeur, bien que ce soit pour une version lissée de la somme considérée dans [6].

L'estimation (1.9) est non triviale dans le régime $\log^4 x \ll q \ll x/\log^4 x$. Le point clé, cependant, est que l'on peut obtenir une amélioration supplémentaire par rapport à (1.9) dans les régimes les plus importants lorsque q est proche de 1 ou de x , en réduisant l'argument du logarithme (ou en élevant le dénominateur au carré); en effet, (1.9) combiné avec (1.10), (1.11) est maintenant non trivial dans le plus grand intervalle $\log^2 x \ll q \ll x/\log^2 x$, et avec (1.12) on peut étendre le seuil supérieur de cet intervalle de $x/\log^2 x$ à $x/\log x$, au moins lorsque $a = \pm 1$.

Les bornes du Théorème 1.3 sont essentiellement obtenues en optimisant les paramètres de coupure U, V dans l'identité de Vaughan, et (dans le cas de (1.12)) une deuxième intégration par parties, exploitant le fait que la dérivée de η_0 a une variation totale bornée. Asymptotiquement, les bornes ici sont inférieures à celles de (1.5), (1.6), mais contrairement à ces estimations, les constantes ici sont

suffisamment raisonnables pour que les bornes soient utiles pour des valeurs de x de taille moyenne, par exemple pour x entre 10^{30} et 10^{1300} . Il est possible d'améliorer encore les bornes des sommes exponentielles dans ces plages en éliminant ou en réduisant davantage les pertes logarithmiques (et nous n'avons pas cherché à optimiser complètement toutes les constantes explicites), mais les bornes indiquées ci-dessus seront suffisantes pour nos applications.

Nous prouverons en fait une version légèrement plus précise (mais plus technique) du Théorème 1.3, avec deux paramètres supplémentaires U et V que l'on est libre d'optimiser ; voir le Théorème 5.1 ci-dessous.

Comme application de ces bornes sur les sommes exponentielles, nous établissons le résultat suivant : [Tout nombre impair supérieur à 1 est somme d'au plus cinq nombres premiers] Tout nombre impair x supérieur à 1 peut s'exprimer comme la somme d'au plus cinq nombres premiers.

Ceci améliore légèrement un résultat antérieur de Ramaré [35], qui a montré (par une méthode tout à fait différente) que tout nombre naturel pair peut s'exprimer comme la somme d'au plus six nombres premiers. En particulier, comme corollaire de ce résultat, nous pouvons abaisser la borne supérieure de la constante de Shnirelman (le plus petit nombre k tel que tous les nombres naturels supérieurs à 1 peuvent s'exprimer comme la somme d'au plus k nombres premiers) de sept à six (notons que la conjecture de Goldbach paire impliquerait que cette constante est en fait trois, et est en fait presque équivalente à cette affirmation). Nous remarquons que le Théorème 1.4 a également été établi sous l'hypothèse de l'hypothèse de Riemann par Kaniecki [21] (en effet, en combinant son argument avec le travail numérique dans [41], on peut obtenir l'affirmation plus forte que tout nombre naturel pair est la somme d'au plus quatre nombres premiers).

Notre preuve du Théorème 1.4 établit également que tout entier x supérieur à 8.7×10^{36} peut s'exprimer comme la somme de trois nombres premiers et d'un nombre naturel compris entre 2 et 4×10^{14} ; voir le Théorème 8.2 ci-dessous.

Pour prouver le Théorème 1.4, nous aurons également besoin de nous appuyer sur deux résultats vérifiés numériquement en plus du Théorème 1.3 :

[Vérification numérique de l'hypothèse de Riemann] Soit $T_0 3.29 \times 10^9$. Alors tous les zéros de la fonction zêta de Riemann ζ dans la bande $\{s : 0 < \operatorname{Re}(s) < 1; 0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T_0\}$ se trouvent sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. De plus, il y a au plus 10^{10} zéros dans cette bande.

Démonstration. Ceci a été réalisé indépendamment par van de Lune (non publié), par Wedeniwski [50], par Gourdon [14], et par Platt [34]. En effet, les résultats de Wedeniwski permettent de prendre T_0 aussi grand que 5.72×10^{10} , et les résultats de Gourdon permettent de prendre T_0 aussi grand que 2.44×10^{12} ; en utilisant l'arithmétique des intervalles, Platt a également obtenu ce résultat avec T_0 aussi grand que 3.06×10^{10} . (Bien sûr, dans ces derniers résultats, il y aura plus de 10^{10} zéros). Cependant, nous utiliserons la valeur plus conservative de $T_0 = 3.29 \times 10^9$ dans cet article car elle suffit pour nos besoins et a été vérifiée par quatre calculs numériques indépendants. $\square$

[Vérification numérique de la conjecture de Goldbach paire] Soit $N_0 4 \times 10^{14}$. Alors tout nombre pair compris entre 4 et N_0 est la somme de deux nombres premiers.

Démonstration. C'est le résultat principal de Richstein [41]. Une vérification ultérieure (non publiée) de cette conjecture par le projet de calcul distribué de Oliveira e Silva [32] permet de prendre N_0 aussi grand que 2.6×10^{18} (avec la valeur $N_0 = 10^{17}$ doublement vérifiée), mais nous utiliserons à nouveau la valeur plus conservative de $N_0 = 4 \times 10^{14}$ dans cet article car elle suffit pour nos besoins et a été vérifiée par trois calculs numériques indépendants. $\square$

La preuve du Théorème 1.4 est donnée dans la Section 8 et procède selon la méthode du cercle avec des sommes lissées comme discuté précédemment, mais avec quelques raffinements techniques supplémentaires que nous discutons maintenant. Le premier raffinement est de tirer parti du Théorème 1.6 pour réduire le problème des cinq nombres premiers au problème de la représentation d'un nombre x comme la somme de trois nombres premiers n_1, n_2, n_3 et d'un nombre compris entre 2 et N_0 . En ce qui concerne la méthode du cercle, cela restreint effectivement la variable de fréquence α à l'arc $\{\alpha : \|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \ll 1/N_0\}$. À l'autre extrémité du spectre, en utilisant le Théorème 1.5 et la formule explicite de von Mangoldt, on peut contrôler de manière assez précise la contribution de l'arc majeur $\{\alpha : \|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \ll T_0/x\}$; voir la Proposition 7.2. Cela laisse donc seulement l'“arc mineur”

$$\frac{T_0}{x} \ll \|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \ll \frac{1}{N_0} \quad (1.14)$$

qui reste à contrôler.

En utilisant le Théorème 1.6 et le Théorème 1.5 (ou plus précisément, un théorème des nombres premiers effectif dans les intervalles courts dérivé du Théorème 1.5 dû à Ramaré et Saouter [40]), nous pourrions supposer que x est modérément grand (et plus précisément, que $x \geq 8.7 \times 10^{36}$). En utilisant des théorèmes de type Vinogradov existants, nous pouvons également placer une grande borne supérieure sur x ; nous utiliserons la borne la plus forte de la littérature, à savoir la borne $x \leq \exp(3100)$ de Liu & Wang [24]. En particulier, $\log x$ est relativement petit par rapport aux quantités N_0 et T_0 , ce qui permet d'absorber un nombre limité de puissances de $\log x$ dans les estimations.

Il reste à obtenir de bonnes estimations L^2 et L^∞ sur la région des arcs mineurs (1.14). Nous utiliserons bien sûr le Théorème 1.3 pour les estimations L^∞ . Une application directe de l'identité de Plancherel coûterait un facteur $\log x$ dans les estimations L^2 , ce qui s'avère inacceptable. On peut utiliser le principe d'incertitude de Montgomery [28] pour réduire cette perte à environ $2 \frac{\log x}{\log N_0}$ (voir le Corollaire 4.7), mais il s'avère encore plus efficace d'utiliser une estimation de grand crible de Siebert [45] sur le nombre de paires de nombres premiers $(p, p+h)$ inférieures à x pour différents h afin d'obtenir une estimation L^2 qui ne perd qu'un facteur 8 (voir la Proposition 4.10).

Afin de presque éliminer certaines pertes “archimédiennes” supplémentaires résultant de la convolution de diverses fonctions de coupure η sur la droite réelle $\mathbb{R}$, nous utiliserons une astuce de Bourgain [3] et restreindrons l'un des trois termes de la somme n_1, n_2, n_3 à un ordre de grandeur significativement plus petit (de magnitude x/K au lieu de x pour un certain K , que nous fixerons à 10^3 , afin d'être confortablement éloigné de 1 et de T_0). En estimant les sommes exponentielles associées à n_1, n_2 en L^2 et la somme associée à n_3 en L^∞ , on peut éviter presque toutes les pertes archimédiennes.

Il s'avère que la combinaison de toutes ces astuces, combinée à l'estimation de la somme exponentielle et aux valeurs numériques de N_0 et T_0 , est suffisante pour établir le Théorème 1.4. Cependant, il existe une dernière astuce qui pourrait être utilisée pour réduire davantage certains termes d'erreur, à savoir faire varier K sur un intervalle (par exemple de 10^3 à 10^6) au lieu de le fixer, et faire la moyenne sur ce paramètre. Cela s'avère conduire à une économie supplémentaire (d'environ un ordre de grandeur) dans le cas des arcs mineurs faibles lorsque α est légèrement supérieur à T_0/x . Bien que nous n'utilisions pas réellement cette astuce ici car elle n'est pas nécessaire, elle pourrait être utile dans d'autres contextes, et en particulier pour améliorer le seuil supérieur connu pour le théorème de Vinogradov.

Remerciements

L'auteur est très redevable à Ben Green et Harald Helfgott pour plusieurs discussions sur les problèmes de type Goldbach, et à Julia Wolf, Westin King, Mark Kerstein, et plusieurs lecteurs anonymes de son blog pour les corrections. L'auteur est particulièrement redevable au rapporteur anonyme pour ses commentaires détaillés, ses corrections et ses suggestions. L'auteur est soutenu par la subvention NSF DMS-0649473.

2. Notation

Toutes les sommations dans cet article porteront sur les nombres naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ sauf indication contraire, à l'exception des sommes sur l'indice p , qui sont toujours comprises comme portant sur les nombres premiers.

Nous utilisons (a, b) pour désigner le plus grand commun diviseur de deux nombres naturels, et $[a, b]$ pour le plus petit commun multiple. Nous écrivons $a|b$ pour désigner l'assertion que a divise b .

Étant donné un énoncé E , nous utilisons $\mathbf{1}_E$ pour désigner son indicatrice, ainsi $\mathbf{1}_E$ vaut 1 lorsque E est vraie et 0 sinon. Ainsi, par exemple, $\mathbf{1}_{(n,q)=1}$ vaut 1 lorsque n est premier avec q et 0 sinon. Nous utiliserons les fonctions arithmétiques standard suivantes. Si n est un nombre naturel, alors

- $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt de n , définie comme égale à $\log p$ lorsque n est une puissance d'un nombre premier p , et nulle sinon.
- $\mu(n)$ est la fonction de Möbius de n , définie comme égale à $(-1)^k$ lorsque n est le produit de k nombres premiers distincts, et nulle sinon.
- $\varphi(n)$ est l'indicatrice d'Euler de n , définie comme le nombre de classes de résidus modulo n qui sont premières avec n .
- $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n .

Étant donné deux fonctions arithmétiques $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, nous définissons le produit de convolution de Dirichlet $f * g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

ainsi par exemple $\mu * \mathbf{1}(n) = \mathbf{1}_{n=0}$, $\Lambda * \mathbf{1}(n) = \log(n)$, et $\mu * \log(n) = \Lambda(n)$.

Étant donné un réel positif Q , nous définissons également la primorielle $Q_\#$ de Q comme le produit de tous les nombres premiers jusqu'à Q :

$$Q_\# = \prod_{p \leq Q} p.$$

Ainsi, par exemple, $\mathbf{1}_{(n, Q_\#)=1}$ vaut 1 précisément lorsque n n'a pas de facteurs premiers inférieurs ou égaux à Q .

Nous utilisons les normes L^p habituelles

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

pour $1 \leq p < \infty$, avec $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ désignant le supremum essentiel de f . De même pour d'autres domaines que $\mathbb{R}$ qui ont une mesure de Lebesgue évidente ; nous définissons les normes ℓ^p pour les domaines discrets (tels que les entiers $\mathbb{Z}$) de la manière habituelle.

Nous utilisons $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour désigner le cercle unité. Par abus de notation, toute fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ est également interprétée comme une fonction sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ainsi par exemple nous pouvons définir $|\sin(\pi\alpha)|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous notons $\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ la distance à l'entier le plus proche pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et cela descend également à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous enregistrons les inégalités élémentaires

$$2\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq |\sin(\pi\alpha)| \leq \pi\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq |\tan(\pi\alpha)|, \quad (2.1)$$

valables pour tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De même, si $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, nous considérons $\frac{a}{q}$ comme un élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Lorsque l'on considère un quotient $\frac{X}{Y}$ avec un dénominateur non négatif Y , nous adoptons la convention que $\frac{X}{Y} = +\infty$ lorsque Y est nul. Ainsi par exemple $\frac{1}{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}}$ est égal à $+\infty$ lorsque α est un entier.

Nous utiliserons occasionnellement la notation asymptotique habituelle $X = O(Y)$ ou $X \ll Y$ pour désigner l'estimation $|X| \leq CY$ pour une constante C non spécifiée. Cependant, comme nous avons besoin de bornes explicites, nous utiliserons plus fréquemment (suivant Ramaré [35]) la notation asymptotique exacte $X = \mathcal{O}^*(Y)$ pour désigner l'estimation $|X| \leq Y$. Ainsi, par exemple, $X = Y + \mathcal{O}^*(Z)$ est synonyme de $|X - Y| \leq Z$.

Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction lisse, nous utilisons F', F'' pour désigner les dérivées première et seconde de F , et $F^{(k)}$ pour désigner la dérivée k -ième pour tout $k \geq 0$.

Si x est un nombre réel, on note $e(x)e^{2\pi ix}$, on note $x_+ \max(x, 0)$, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x . Nous interprétons l'opération $x \mapsto x_+$ comme ayant priorité sur l'exponentiation, ainsi par exemple x_+^2 désigne la quantité $\max(x, 0)^2$ plutôt que $\max(x^2, 0)$.

Si E est un ensemble fini, nous utilisons $|E|$ pour désigner son cardinal. Si I est un intervalle, nous utilisons $|I|$ pour désigner sa longueur. Nous utiliserons également occasionnellement les translations $I + x\{y + x : y \in I\}$ et les dilatations $\lambda I\{\lambda y : y \in I\}$ d'un tel intervalle.

La fonction logarithme naturel $\log$ est prioritaire sur l'addition et la soustraction, mais pas sur la multiplication ou la division ; ainsi par exemple

$$\log 2x + 15 = (\log(2x)) + 15.$$

3. Estimations de sommes exponentielles

Nous enregistrons maintenant quelques estimations sur les sommes exponentielles linéaires telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n)e(\alpha n)$$

pour diverses fonctions lisses $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, ainsi que sur les sommes exponentielles bilinéaires telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_n b_m e(\alpha n m)$$

pour diverses suites $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$. Ces bornes sont standards (du moins si l'on ne s'intéresse qu'aux bornes à des constantes multiplicatives près), mais nous aurons besoin de rendre toutes les

constantes explicites. De plus, afin d'économiser un facteur deux environ dans les bornes explicites, nous restreindrons fréquemment la sommation aux entiers impairs en insérant des poids tels que $\mathbf{1}_{(n,2)=1}$, et nous aurons donc besoin de développer des variantes des bornes standard à cette fin. Nous commençons par quelques bornes standard sur les sommes exponentielles linéaires avec des fonctions de coupure lisses.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse à support compact. Alors nous avons les bornes

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \int_{\mathbb{R}} F(y) dy + \mathcal{O}^* \left(\frac{1}{2} \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) \quad (3.1)$$

et

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \right| \leq \sum_n |F(n)| \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (3.2)$$

et

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \right| \leq \frac{1}{|2 \sin(\pi \alpha)|^k} \|F^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (3.3)$$

pour tout entier naturel $k \geq 1$.

Démonstration. Ces bornes apparaissent dans [13] et dans [29, Lemme 1.1], mais nous reproduisons la preuve ici pour la commodité du lecteur. D'après le théorème fondamental du calcul, on a

$$F(n) = F(y) + \mathcal{O}^* \left(\int_n^{n+1/2} |F'(t)| dt \right)$$

pour tout $y \in [n, n + 1/2]$ et

$$F(n) = F(y) + \mathcal{O}^* \left(\int_{n-1/2}^n |F'(t)| dt \right)$$

pour tout $y \in [n - 1/2, n]$; en faisant la moyenne sur y , on conclut que

$$F(n) = \int_{n-1/2}^{n+1/2} F(y) dy + \frac{1}{2} \mathcal{O}^* \left(\int_{n-1/2}^{n+1/2} |F'(t)| dt \right).$$

En sommant sur n , on obtient (3.1). En prenant les normes ℓ^1 à la place, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |F(n)| \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

ce qui donne (3.2).

Obtenons maintenant le cas $k = 1$ de (3.3). On peut supposer $\alpha \neq 0$. Par sommation par parties, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (F(n+1) - F(n)) e(\alpha n) = (1 - e(-\alpha)) \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n)$$

et ainsi

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \right| = \frac{1}{2|\sin(\pi \alpha)|} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (F(n+1) - F(n)) e(\alpha n) \right|. \quad (3.4)$$

Puisque $|F(n+1) - F(n)| \leq \int_0^1 |F'(n+t)| dt$, on obtient le cas $k = 1$ de (3.3). Pour obtenir les cas supérieurs, on observe à partir de (3.4), du théorème fondamental du calcul $F(n+1) - F(n) = \int_0^1 F'(n+t) dt$ et de l'inégalité de Minkowski que

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \right| \leq \frac{1}{2|\sin(\pi\alpha)|} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F'(n+t) e(\alpha n) \right|$$

pour un certain $0 \leq t < 1$. On peut maintenant déduire (3.3) pour k général du cas $k = 1$ par induction. $\square$

On peut économiser un facteur deux en se restreignant aux nombres impairs : Avec les mêmes hypothèses que le Lemme 3.1, on a

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n,2)=1} \right| \leq \frac{1}{2} \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

et

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n,2)=1} \right| \leq \frac{1}{2|\sin(2\pi\alpha)|^k} \|F^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. On peut réécrire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n,2)=1} = e(\alpha) \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2n+1) e(2\alpha n).$$

En appliquant le lemme précédent avec α remplacé par 2α , et $F(x)$ remplacé par $F(2x+1)$, on obtient l'énoncé. $\square$

Nous enregistrons également une variante continue :

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse à support compact. Alors on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(y) e(\alpha y) dy \right| \leq \frac{\|F^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(2\pi|\alpha|)^k}$$

pour tout $k \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. L'affirmation est triviale pour $k = 0$. Pour k supérieur, on peut supposer $\alpha \neq 0$. Par intégration par parties, on a

$$\int_{\mathbb{R}} F(y) e(\alpha y) dy = -\frac{1}{2\pi i \alpha} \int_{\mathbb{R}} F'(y) e(\alpha y) dy,$$

et l'affirmation s'ensuit alors par induction. $\square$

Afin de sommer les bornes découlant du Corollaire 3.2 (en particulier lorsque $k = 1$), le lemme suivant est utile.

[Lemme de type Vinogradov] Soit $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ pour un certain $\beta = \mathcal{O}^*(1/q^2)$. Alors pour tout $x < y$, $A, B > 0$, et $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{x < n \leq y} \min \left(A, \frac{B}{|\sin(\pi \alpha n + \theta)|} \right) \leq \left(\left\lfloor \frac{y-x}{q} \right\rfloor + 1 \right) \left(2A + \frac{2}{\pi} B q \log 4q \right).$$

Démonstration. On peut normaliser $B = 1$. Par subdivision de l'intervalle $[x, y]$, il suffit de montrer que

$$\sum_{x < n \leq x+q} \min \left(A, \frac{1}{|\sin(\pi \alpha n + \theta)|} \right) \leq 2A + \frac{2}{\pi} q \log 4q$$

pour tout x . L'affirmation découle alors de [8, Lemme 1]. (Strictement parlant, le déphasage θ n'est pas présent dans l'énoncé de ce lemme, mais la preuve du lemme est inchangée avec ce déphasage. Alternativement, on peut perturber α pour qu'il soit irrationnel, puis par le théorème de Kronecker on peut obtenir un ensemble dense de déphasages en décalant l'intervalle $[x, y]$ d'un entier, et l'affirmation pour θ général découle alors par un argument de passage à la limite.) $\square$

Une fois de plus, on peut économiser un facteur deux en se restreignant aux n impairs : Soit $2\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ pour un certain $\beta = \mathcal{O}^*(1/q^2)$. Alors pour tout $x < y$, $A, B > 0$, et $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{x < n \leq y} \min \left(A, \frac{B}{|\sin(\pi \alpha n + \theta)|} \right) \mathbf{1}_{(n,2)=1} \leq \left(\left\lfloor \frac{y-x}{2q} \right\rfloor + 1 \right) \left(2A + \frac{2}{\pi} Bq \log 4q \right).$$

Démonstration. En écrivant $n = 2m + 1$, l'expression du membre de gauche est

$$\sum_{(x-1)/2 < m \leq (y-1)/2} \min \left(A, \frac{B}{|\sin(2\pi \alpha m + \pi \alpha + \theta)|} \right).$$

L'affirmation découle alors du Lemme 3.5. $\square$

Passons maintenant aux estimations bilinéaires. Un outil clé ici est

[Inégalité du grand crible] Soient $\xi_1, \dots, \xi_R \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que $\|\xi_i - \xi_j\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \delta$ pour tout $1 \leq i < j \leq R$ et un certain $\delta > 0$. Soit $I = [N_1, N_2]$ un intervalle de longueur $|I| = N_2 - N_1 \geq 1$. Alors on a

$$\sum_{i=1}^R \left| \sum_{n \in I \cap \mathbb{Z}} a_n e(\xi_i n) \right|^2 \leq (|I| + \delta^{-1}) \|(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2$$

pour toute suite à valeurs complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Démonstration. Voir [30, Théorème 3] (en notant que le nombre de points entiers dans I est au plus $|I| + 1$). $\square$

En se spécialisant aux ξ_j qui sont des multiples consécutifs de α et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut

[Cas particulier de l'inégalité du grand crible] Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles de longueur au moins 1, et soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors on a

$$\left| \sum_{\substack{n \in I \cap \mathbb{Z} \\ m \in J \cap \mathbb{Z}}} a_n b_m e(nm\alpha) \right| \leq \left(|I| + \frac{1}{\inf_{1 \leq j \leq |J|} \|j\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} \right)^{1/2} \|(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \|(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

pour toutes suites à valeurs complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Encore une fois, on peut obtenir une économie d'un facteur 2 dans le terme principal en restreignant n, m à des nombres impairs :

[Restriction aux nombres impairs] Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles de longueur au moins 2, et soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors on a

$$\left| \sum_{\substack{n \in I \cap \mathbb{Z} \\ m \in J \cap \mathbb{Z}}} a_n \mathbf{1}_{(n,2)=1} b_m \mathbf{1}_{(m,2)=1} e(nm\alpha) \right| \leq \left(\frac{1}{2}|I| + \frac{1}{\inf_{1 \leq j \leq \frac{1}{2}|J|} \|4j\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} \right)^{1/2} \| (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \| (b_m)_{m \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

pour toutes suites à valeurs complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Démonstration. On peut réécrire le membre de gauche comme

$$\left| \sum_{\substack{n \in \frac{1}{2}I - \frac{1}{2} \\ m \in \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}}} \tilde{a}_n \tilde{b}_m e(4nm\alpha) \right|,$$

où $\tilde{a}_n a_{2n+1} e(2n\alpha)$ et $\tilde{b}_m b_{2m+1} e(2m\alpha)$, et l'affirmation découle alors du Corollaire 3.7. $\square$

Le corollaire ci-dessus est utile chaque fois que les $4j\alpha$ pour $1 \leq j \leq \frac{1}{2}|J|$ restent éloignés de l'origine. Lorsque J est grand, ce n'est pas toujours le cas, mais on peut bien sûr remédier à cela par un argument de subdivision :

[Subdivision] Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles de longueur au moins 2, et soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Soit $M \geq 1$. Alors on a

$$\left| \sum_{\substack{n \in I \cap \mathbb{Z} \\ m \in J \cap \mathbb{Z}}} a_n \mathbf{1}_{(n,2)=1} b_m \mathbf{1}_{(m,2)=1} e(nm\alpha) \right| \leq \left(\frac{1}{2}|I| + \frac{1}{\inf_{1 \leq j \leq M} \|4j\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} \right)^{1/2} \left(\left\lfloor \frac{J}{2M} \right\rfloor + 1 \right)^{1/2} \| (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \| (b_m)_{m \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

pour toutes suites à valeurs complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Démonstration. On subdivise J en intervalles $J_1, \dots, J_k$ de longueur $2M$, où $k \lfloor \frac{J}{2M} \rfloor + 1$. L'affirmation découle alors en appliquant le Corollaire 3.8 à chaque sous-intervalle, en sommant, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

4. Bornes de base sur $S_{\eta,q}(x, \alpha)$

Dans tous les lemmes de cette section, $x \geq 1$ est un nombre réel, $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une fréquence, $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction mesurable bornée non négative supportée dans $[0, 1]$, et $q \geq 1$ est un nombre naturel. Dans certains lemmes, nous ferons également l'hypothèse supplémentaire que η est lisse, bien que dans les applications on puisse souvent assouplir cette exigence de régularité par un argument de passage à la limite standard. Dans certains cas, nous aurons également besoin que η s'annule près de zéro.

Le but de cette section est de rassembler quelques estimations de base pour manipuler les sommes exponentielles

$$S_{\eta,q}(x, \alpha) \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n,q)=1} \eta(n/x) \quad (4.1)$$

qui sont déjà apparues dans l'introduction.

Nous faisons d'abord la remarque facile que $S_{\eta,q}(x, \alpha)$ dépend à peine du paramètre q .

On a

$$S_{\eta,q}(x, \alpha) = S_{\eta,1}(x, \alpha) + \mathcal{O}^* \left(\omega(q) \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \log x \right).$$

En particulier, si le plus grand facteur premier de q est au plus $\sqrt{x}$, alors

$$S_{\eta,q}(x, \alpha) = S_{\eta,1}(x, \alpha) + \mathcal{O}^* \left(2.52\sqrt{x} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right).$$

Démonstration. On a

$$|S_{\eta,q}(x, \alpha) - S_{\eta,1}(x, \alpha)| \leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q) > 1}} \Lambda(n).$$

Notons que si $\Lambda(n)$ est non nul et $(n, q) > 1$, alors n est une puissance d'un nombre premier p divisant q ; ainsi

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q) > 1}} \Lambda(n) = \sum_{p|q} \log p \sum_{j: p^j \leq x} 1.$$

Puisque $\sum_{j: p^j \leq x} 1 \leq \frac{\log x}{\log p}$, la première affirmation s'ensuit. Pour la seconde affirmation, observons que

$$\omega(q) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \leq 2.52 \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

où la dernière inégalité découle de [43, Corollaire 1]. $\square$

Ensuite, nous faisons une observation simple de sommation par parties qui permet de remplacer η par la fonction de coupure brutalement tronquée $\mathbf{1}_{[0,1]}$ si désiré.

Si η est lisse, alors on a

$$|S_{\eta,q}(x, \alpha)| \leq \|\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{y \leq x} |S_{\mathbf{1}_{[0,1]},q}(y, \alpha)|.$$

Démonstration. Puisque $\eta(n/x) = -\frac{1}{x} \int_0^x \eta'(y/x) \mathbf{1}_{n \leq y} dy$ pour tout $n \leq x$, on a

$$S_{\eta,q}(x, \alpha) = -\frac{1}{x} \int_0^x \eta'(y/x) \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{n \leq y} \mathbf{1}_{(n,q)=1} dy$$

et ainsi

$$|S_{\eta,q}(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |\eta'(y/x)| |S_{\mathbf{1}_{[0,1]},q}(y, \alpha)| dy,$$

et l'affirmation s'ensuit. $\square$

On a trivialement

$$|S_{\eta,q}(x, \alpha)| \leq S_{\eta,q}(x, 0) \tag{4.2}$$

et nous considérons maintenant l'estimation de la quantité $S_{\eta,q}(x, 0)$.

On a

$$S_{\eta,q}(x, 0) \leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} S_{\mathbf{1}_{[0,1]},1}(x, 0) \leq 1.04 \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} x. \tag{4.3}$$

Si η est lisse et supportée sur $[c, 1]$ pour un certain $c > 0$ avec $cx \geq 10^8$, alors

$$S_{\eta,1}(x, 0) = \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})} x + \mathcal{O}^* \left(\frac{1}{40 \log cx} \|\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} x \right). \tag{4.4}$$

Démonstration. La première inégalité de (4.3) est triviale, et l'inégalité finale de (4.3) découle de [43, Théorème 12] (en effet, on peut remplacer la constante 1.04 par la constante légèrement plus petite 1.03883).

Pour (4.4), on raisonne comme dans le Lemme 4.2 et on écrit

$$S_{\eta,1}(x,0) = -\frac{1}{x} \int_{cx}^x \eta'(y/x) \sum_{n \leq y} \Lambda(n) dy.$$

D'après [44, Théorème 7] (et l'hypothèse $cx \geq 10^8$), on a

$$\sum_{n \leq y} \Lambda(n) = y + \mathcal{O}^* \left(\frac{y}{40 \log cx} \right),$$

et donc

$$S_{\eta,1}(x,0) = -\frac{1}{x} \int_{cx}^x \eta'(y/x) y dy + \mathcal{O}^* \left(\frac{1}{x} \frac{1}{40 \log cx} \int_{cx}^x |\eta'(y/x)| y dy \right).$$

En utilisant la borne grossière

$$\int_{cx}^x |\eta'(y/x)| y dy \leq \|\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} x,$$

l'affirmation s'ensuit. □

Comme Λ et η sont réels, on a la symétrie auto-adjointe

$$S_{\eta,q}(x, -\alpha) = \overline{S_{\eta,q}(x, \alpha)}. \quad (4.5)$$

De plus, puisque $e(n(\alpha + 1/2)) = -e(n\alpha)$ lorsque n est impair, on a l'anti-symétrie

$$S_{\eta,q}(x, \alpha + 1/2) = -S_{\eta,q}(x, \alpha) \quad (4.6)$$

lorsque q est pair. Plus généralement, nous avons l'inégalité suivante de Montgomery [28] : [Principe d'incertitude de Montgomery] Pour tout q_0 divisant q , on a

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/q_0\mathbb{Z} \\ (a, q_0)=1}} \left| S_{\eta,q} \left(x, \alpha + \frac{a}{q_0} \right) \right|^2 \geq \frac{\mu(q_0)^2}{\varphi(q_0)} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2.$$

Démonstration. On peut bien sûr prendre q_0 sans facteur carré. Soit $a_n \Lambda(n) e(\alpha n) \mathbf{1}_{(n,q)=1} \eta(n/x)$, $S(a/q_0) \sum_n a_n e(an/q_0)$, et $Z \sum_n a_n$, alors l'inégalité se lit

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/q_0\mathbb{Z} \\ (a, q_0)=1}} |S(a/q_0)|^2 \geq \frac{1}{\prod_{p|q_0} (p-1)} |Z|^2.$$

Mais cela découle de [28] (en particulier l'équation (10) et le dernier affiché de la Section 3, et en posant $\omega(p) = 1$ pour tout $p|q_0$). Une autre preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [19, Lemme 7.15]. □

Considérons maintenant les estimations L^2 sur $S_{\eta,q}(x, \alpha)$. Nous avons une estimation globale :
[Estimation L^2 globale] On a

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq S_{\eta^2,q}(x, 0) \log x.$$

Démonstration. D'après l'identité de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha = \sum_n \eta(n/x)^2 \Lambda(n)^2 \mathbf{1}_{(n,q)=1}.$$

En majorant $\Lambda(n)^2 \leq \Lambda(n) \log x$ sur le support de $\eta(n/x)^2$, on obtient l'affirmation. $\square$

[Estimation L^2 locale] Soient $Q, R \geq 1$, et soit $\Sigma \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble

$$\Sigma \bigcup_{q_0 \leq Q} \bigcup_{(a_0, q_0)=1} \left[\frac{a_0}{q_0} - \frac{1}{2Q^2 R^2}, \frac{a_0}{q_0} + \frac{1}{2Q^2 R^2} \right].$$

Si $R_\# | q$, alors

$$\int_{\Sigma} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq \left(\prod_{p \leq Q} \frac{p}{p-1} \right) \frac{\log x}{\log R} S_{\eta^2,q}(x, 0). \quad (4.7)$$

Démonstration. D'après le Lemme 4.4, on a

$$\frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)} \int_{\Sigma} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq \sum_{\substack{a_1 \in \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \\ (a_1, q_1)=1}} \int_{\Sigma + \frac{a_1}{q_1}} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha$$

pour tout q_1 . En sommant sur tous les $q_1 \leq R$ premiers avec $Q_\#$ et en réarrangeant, on obtient la borne

$$\int_{\Sigma} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq \frac{\sum_{\substack{q_1 \leq R \\ (q_1, Q_\#)=1}} \sum_{\substack{a_1 \in \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \\ (a_1, q_1)=1}} \int_{\Sigma + \frac{a_1}{q_1}} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha}{\sum_{\substack{q_1 \leq R \\ (q_1, Q_\#)=1}} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)}}.$$

Posons

$$G(R) \sum_{q_1 \leq R} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)}.$$

On observe que

$$G(R) \leq \left(\sum_{\substack{q_1 \leq R \\ (q_1, Q_\#)=1}} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)} \right) \left(\prod_{p \leq Q} 1 + \frac{1}{\varphi(p)} \right)$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sum_{\substack{q_1 \leq R \\ (q_1, Q_\#)=1}} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)}} \leq \frac{\prod_{p \leq Q} \frac{p}{p-1}}{G(R)}.$$

De plus, d'après [26] ou [31, Lemme 3], on a $G(R) \geq \log R + 1.07$ pour $R \geq 6$, donc par calcul direct pour $1 \leq R \leq 6$, on a $G(R) \geq \log R$ pour $R \geq 1$.

Pour conclure la preuve, il suffit donc (compte tenu du Lemme 4.5) de montrer que les ensembles $\Sigma + \frac{a_1}{q_1}$ sont disjoints à des ensembles de mesure nulle près lorsque a_1, q_1 varient dans l'intervalle indiqué. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors $\Sigma + \frac{a_1}{q_1}$ et $\Sigma + \frac{a'_1}{q'_1}$ se coupent en un ensemble de mesure positive pour des a_1, q_1 et a'_1, q'_1 distincts dans l'intervalle indiqué. Ainsi, on a

$$\left| \frac{a_0}{q_0} + \frac{a_1}{q_1} - \frac{a'_0}{q'_0} - \frac{a'_1}{q'_1} \right| < \frac{1}{Q^2 R^2}$$

pour un certain $q_0, q'_0 \leq Q$ avec $(a_0, q_0) = (a'_0, q'_0) = 1$. Le membre de gauche est une fraction avec un dénominateur d'au plus $Q^2 R^2$, et donc s'annule. Puisque $q_1 q'_1$ est premier avec $q_0 q'_0$, on conclut que $\frac{a_1}{q_1} = \frac{a'_1}{q'_1}$, contradiction. L'affirmation s'ensuit. $\square$

Comme l'a fait remarquer le rapporteur anonyme, une version légèrement plus forte du Lemme 4.6 (économisant un facteur e^γ asymptotiquement) peut également être établie en modifiant la preuve de [38, Théorème 5] ; l'idée principale est de décomposer en caractères de Dirichlet, comme dans [1].

Il existe plusieurs bornes effectives sur l'expression $\prod_{p \leq Q} \frac{p}{p-1}$ apparaissant dans le Lemme 4.6 ; voir [43, Théorème 8], [10], [12, Théorème 6.12]. Cependant, dans cet article, nous n'aurons besoin que du cas $Q = 1$, et donc nous n'utiliserons pas le lemme ci-dessus ici. En spécialisant le Lemme 4.6 au cas $Q = 1$, on conclut

Si $0 < r < 1/2$ et $\sqrt{1/2r}|q$, on a

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq r} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq \frac{2}{1 - \frac{\log(2rx)}{\log x}} S_{\eta^2,q}(x, 0).$$

On peut compléter cette borne supérieure par une borne inférieure :

Proposition 1. *Soit η lisse et $0 \leq r \leq 1/2$. Alors*

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq r} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \geq \frac{\left(S_{\eta^2,q}(x, 0) - \frac{1}{\pi^2 r x} \|\eta' \eta' + \eta \eta''\|_{L^1(\mathbb{R})} S_{\eta,q}(x, 0) \right)_+^2}{\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 x + \|\eta \eta'\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

Démonstration. D'après la formule de Parseval, on a

$$S_{\eta^2,q}(x, 0) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S_{\eta,q}(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha$$

où $F(\alpha) = \sum_n \eta(n/x) e(-\alpha n)$. En particulier,

$$\left| \int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq r} S_{\eta,q}(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha \right| \geq S_{\eta^2,q}(x, 0) - S_{\eta,q}(x, 0) \int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} > r} |F(\alpha)| d\alpha$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\|\alpha\| \leq r} |S_{\eta,q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \geq \frac{\left(S_{\eta^2,q}(x, 0) - S_{\eta,q}(x, 0) \int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} > r} |F(\alpha)| d\alpha \right)_+^2}{\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |F(\alpha)|^2 d\alpha}.$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |F(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_n \eta(n/x)^2$$

et donc par (3.1)

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |F(\alpha)|^2 d\alpha = \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 x + \mathcal{O}^* \left(\|\eta\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \right).$$

De même, d'après (3.3) (avec $k = 2$), on a

$$|F(\alpha)| \leq \frac{1}{2x|\sin(\pi\alpha)|^2} \|\eta'\eta' + \eta\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

pour tout α et donc

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq r} |F(\alpha)| d\alpha \leq \frac{\cot(\pi r)}{\pi x} \|\eta'\eta' + \eta\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En majorant $\cot(\pi r) \leq \frac{1}{\pi r}$, l'affirmation s'ensuit. $\square$

On peut nettoyer les termes d'erreur comme suit :

Soit η lisse et supportée sur $[c, 1]$ pour un certain $c > 0$, et supposons que $\frac{1}{2x} \leq r \leq 1/2$ et $q = \sqrt{x_\#}$.

On normalise $\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Supposons de plus que

$$cx \geq 10^8 \quad (4.8)$$

$$x \geq 10^4 \|\eta\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (4.9)$$

$$\log(cx) \geq 5 \|\eta\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (4.10)$$

$$x \geq 10^8 \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 \quad (4.11)$$

$$rx \geq 20 \|\eta'\eta' + \eta\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (4.12)$$

Alors on a

$$S_{\eta^2, q}(x, 0) = x(1 + \mathcal{O}^*(0.02)) \quad (4.13)$$

et

$$\int_{\|\alpha\| \leq r} |S_{\eta, q}(x, \alpha)|^2 d\alpha \geq 0.94x. \quad (4.14)$$

Démonstration. D'après le Lemme 4.3 et (4.8), (4.10), on a

$$S_{\eta^2, 1}(x, 0) = x(1 + \mathcal{O}^*(0.01))$$

et par le Lemme 4.1 et (4.11), on conclut (4.13).

Notons la quantité $\int_{\|\alpha\| \leq r} |S_{\eta, q}(x, \alpha)|^2 d\alpha$ par A . Par la Proposition 4.8, (4.9) et le Lemme 4.3, on a

$$A \geq 0.999 \frac{1}{\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} x \left(S_{\eta^2, q}(x, 0) - \frac{1.04}{\pi^2 r} \|\eta'\eta' + \eta\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)_+^2.$$

Par (4.12), (4.13), on a

$$\frac{1.04}{\pi^2 r} \|\eta'\eta' + \eta\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 0.01 S_{\eta^2, q}(x, 0)$$

et donc

$$A \geq 0.97 \frac{1}{x} S_{\eta^2, q}(x, 0)^2$$

et donc par (4.13)

$$A \geq 0.94x,$$

ce qui est (4.14). $\square$

L'estimation du Corollaire 4.7 est assez précise lorsque r est petit (de taille proche de $1/x$), mais pas lorsque r est grand. Pour cela, nous avons une estimation alternative :

Proposition 2 (Estimation L^2 mésoscopique). *Supposons que $q = \sqrt{x_\#}$. Soit $H \geq 10^2$, et écrivons $D_H(\alpha) \sum_{h=1}^H e(h\alpha)$ pour le noyau de type Dirichlet. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S_{\eta, q}(x, \alpha)|^2 |D_H(\alpha)|^2 d\alpha \leq (1 + \epsilon) \times 8H^2 x \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2,$$

où ϵ est la quantité

$$\epsilon \frac{0.13 \log x}{H} + \frac{\left(e^\gamma \log \log(2H) + \frac{2.507}{\log \log(2H)}\right) \log(9H)}{2H}. \quad (4.15)$$

Démonstration. On peut normaliser $\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Par l'identité de Plancherel, on peut écrire le membre de gauche comme

$$\sum_{h=1}^H \sum_{h'=1}^H \sum_n \Lambda(n) \eta(n/x) \mathbf{1}_{(n, q)=1} \Lambda(n + h' - h) \eta((n + h' - h)/x) \mathbf{1}_{(n+h'-h, q)=1}.$$

La contribution diagonale $h = h'$ peut être bornée par

$$H \sum_n \Lambda(n) \eta(n/x) \log x$$

qui, d'après le Lemme 4.3, est bornée par $1.04Hx \log x$. Considérons maintenant la contribution hors diagonale $h \neq h'$. Comme $\Lambda(n) \mathbf{1}_{(n, q)=1}$ est supportée sur les nombres premiers impairs p inférieurs ou égaux à x , on se restreint à la contribution lorsque $h - h'$ est pair, et on peut borner cette contribution par

$$\sum_{h'=1}^H \sum_{\substack{1 \leq h \leq H \\ h \neq h' \\ 2|h-h'}} \log^2 x |\{p \leq x : p + h - h' \text{ premier}, p + h - h' \leq x\}|,$$

ce qui, par le principe des tiroirs, est borné par

$$H \sum_{\substack{1 \leq h \leq H \\ h \neq h' \\ 2|h-h'}} \log^2 x |\{p \leq x : p + h - h' \text{ premier}, p + h - h' \leq x\}|, \quad (4.16)$$

pour un certain $1 \leq h' \leq H$, que l'on fixe maintenant. En appliquant le résultat principal de Siebert [45], on a

$$|\{p \leq x : p + h - h' \text{ premier}, p + h - h' \leq x\}| \leq 8\mathfrak{S}_2 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{\substack{p|h-h' \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2},$$

où $8\mathfrak{S}_2 2 \prod_{p>2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2})$ est la constante des nombres premiers jumeaux. On peut donc borner (4.16) par

$$8\mathfrak{S}_2 Hx \sum_{\substack{1 \leq h \leq H \\ h \neq h' \\ 2|h-h'}} \prod_{\substack{p|h-h' \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

Si l'on note f la fonction multiplicative

$$f(n) \mathbf{1}_{(n,2)=1} \mu^2(n) \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \frac{1}{p-2},$$

alors on a

$$\prod_{\substack{p|h-h' \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} = \sum_{\substack{1 \leq n \leq H \\ (n,2)=1 \\ n|h-h'}} f(n)$$

lorsque $1 \leq h, h' \leq H$ avec $h \neq h'$, donc on peut borner l'expression précédente par

$$8\mathfrak{S}_2 Hx \sum_{\substack{1 \leq n \leq H \\ (n,2)=1}} f(n) \sum_{\substack{1 \leq h \leq H \\ 2n|h-h'}} 1.$$

On peut borner

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq H \\ 2n|h-h'}} 1 \leq \frac{H}{2n} + 1 \quad (4.17)$$

donc (4.16) est alors bornée par

$$8\mathfrak{S}_2 Hx \left(H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2n} + \sum_{1 \leq n \leq H} f(n) \right).$$

En évaluant le produit eulérien, on voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2n} = \frac{1}{2} \prod_p (1 + f(p)) = \frac{1}{\mathfrak{S}_2}.$$

Pour évaluer la somme sur f , on observe que

$$f(n) = \mathbf{1}_{(n,2)=1} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \frac{2n}{\varphi(2n)} \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)^{-1}.$$

On peut borner

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_2} \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)^{-1} \leq \frac{1}{\mathfrak{S}_2}$$

et d'après [43, Théorème 15], on a

$$\frac{2n}{\varphi(2n)} \leq e^\gamma \log \log(2n) + \frac{2.507}{\log \log(2n)}.$$

Puisque $n \leq H$ et $H \geq 10^2$, on conclut que

$$\frac{2n}{\varphi(2n)} \leq e^\gamma \log \log(2H) + \frac{2.507}{\log \log(2H)}$$

pour tout $1 \leq n \leq H$ avec $(n, 2) = 1$ (les cas où n est si petit que $e^\gamma \log \log(2n) + \frac{2.507}{\log \log(2n)}$ peut dépasser $e^\gamma \log \log(2H) + \frac{2.507}{\log \log(2H)}$, et en particulier $n = 1, 3, 5$, peuvent être vérifiés à la main). Ainsi, on peut borner

$$\mathfrak{S}_2 \sum_{1 \leq n \leq H} f(n) \leq \left(e^\gamma \log \log(2H) + \frac{2.507}{\log \log(2H)} \right) \sum_{\substack{n \leq H \\ (n, 2) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}.$$

Puisque $\varphi(n) = \varphi(2n)$ lorsque n est impair, on a

$$\sum_{\substack{n \leq H \\ (n, 2) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \leq H} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

et donc d'après [35, Lemme 3.5], on a

$$\sum_{\substack{n \leq H \\ (n, 2) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2} (\log(2H) + 1.4709) \leq \frac{1}{2} \log(9H).$$

En combinant toutes ces estimations, on obtient l'affirmation. $\square$

Comme l'a observé le rapporteur anonyme, lorsque H est un entier, le second terme dans (4.15) peut être supprimé en utilisant [36, Lemme 5.1] comme substitut de (4.17) (et en conservant la somme sur h' , plutôt qu'en ne travaillant qu'avec le pire cas h').

Pour traiter $S_{\eta, q}(x, \alpha)$ sur les arcs mineurs, nous suivons l'approche standard de Vinogradov en décomposant cette expression en sommes linéaires (ou “de type I”) et bilinéaires (ou “de type II”). Nous utiliserons la variante suivante de l'identité de Vaughan [46], que nous formulons comme suit : [Une variante de l'identité de Vaughan] Soient $U, V \geq 1$. Alors pour toute fonction $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ supportée sur l'intervalle (V, UV^2) , on a

$$\left| \sum_n \Lambda(n) F(n) \right| \leq T_I + T_{II},$$

où T_I est la somme de type I

$$T_I \sum_{d \leq UV} \left| \sum_n (\log n + c_d \log d) F(dn) \right|$$

pour des coefficients complexes c_d (dépendant de F) avec $|c_d| \leq 1$, et T_{II} est la somme de type II

$$T_{II} \left| \sum_{d > U} \sum_{w > V} \mu(d) g(w) F(dw) \right|,$$

où $g(w)$ est la fonction

$$g(w) \sum_{\substack{b|w \\ b > V}} \Lambda(b) - \frac{1}{2} \log w.$$

Démonstration. On décompose $\mu = \mu \mathbf{1}_{\leq U} + \mu \mathbf{1}_{> U}$ et $\Lambda = \Lambda \mathbf{1}_{\leq V} + \Lambda \mathbf{1}_{> V}$, où $\mathbf{1}_{\leq U}(n) \mathbf{1}_{n \leq U}$, et de même pour $\mathbf{1}_{> U}$, $\mathbf{1}_{\leq V}$, $\mathbf{1}_{> V}$. On a alors

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mu * \Lambda * \mathbf{1} \\ &= \mu \mathbf{1}_{\leq U} * \Lambda * \mathbf{1} - \mu \mathbf{1}_{\leq U} * \Lambda \mathbf{1}_{\leq V} * \mathbf{1} + \mu \mathbf{1}_{> U} * \Lambda \mathbf{1}_{> V} * \mathbf{1} + \mu * \Lambda \mathbf{1}_{\leq V} * \mathbf{1} \\ &= \mu \mathbf{1}_{\leq U} * \log - \mu \mathbf{1}_{\leq U} * \Lambda \mathbf{1}_{\leq V} * \mathbf{1} + \mu \mathbf{1}_{> U} * \Lambda \mathbf{1}_{> V} * \mathbf{1} + \Lambda \mathbf{1}_{\leq V} \end{aligned} \quad (4.18)$$

On somme ceci contre F , en notant que F s'annule sur le support du dernier terme $\Lambda \mathbf{1}_{\leq V}$, pour conclure que

$$\sum_n \Lambda(n) F(n) = \sum_{d \leq U} \mu(d) \sum_n (\log n) F(dn) - \sum_{d \leq UV} f(d) \sum_n F(dn) + \sum_{d > U} \sum_{w > V} \mu(d) \left(g(w) + \frac{1}{2} \log w \right) F(dw)$$

où

$$f(d) = \sum_{\substack{b|d \\ d/U \leq b \leq V}} \mu \left(\frac{d}{b} \right) \Lambda(b).$$

On observe que lorsque $d > U$ et $w > V$, alors le terme $\mu(d) (\frac{1}{2} \log w) F(dw)$ s'annule à moins que $U < d \leq UV$. On peut donc borner

$$\left| \sum_n \Lambda(n) F(n) \right| = \sum_{d \leq UV} \left| \sum_n (\log n) F(dn) \right| + \sum_{d \leq UV} |f(d)| \left| \sum_n F(dn) \right| + \left| \sum_{d > U} \sum_{w > V} \mu(d) g(w) F(dw) \right|.$$

Notons que

$$|f(d)| \leq \sum_{b|d} \Lambda(b) = \log d.$$

Puisque

$$\left| \sum_n (\log n) F(dn) \right| + \left| \sum_n F(dn) \right| \log d = \left| \sum_n (\log n + c_d \log d) F(dn) \right|$$

pour une certaine constante complexe c_d avec $|c_d| = 1$, on obtient l'affirmation. $\square$

Notons que comme

$$0 \leq \sum_{\substack{b|w \\ b > V}} \Lambda(b) \leq \sum_{b|w} \Lambda(b) = \log w,$$

on a la borne

$$|g(w)| \leq \frac{1}{2} \log w. \quad (4.19)$$

5. Arcs mineurs

Nous prouvons maintenant l'estimation de somme exponentielle suivante, qui sera ensuite utilisée dans la section suivante pour dériver le Théorème 1.3 :

[Borne pour les sommes sur les arcs mineurs] Soit $4\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ pour un certain entier naturel $q \geq 4$ avec $(a, q) = 1$ et un certain $\beta = \mathcal{O}^*(1/q^2)$. Soient $1 < U, V < x$, et supposons que nous ayons les hypothèses

$$\begin{aligned} UV &\leq x/4 \\ UV^2 &\geq x \\ U, V &\geq 40. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
|S_{\eta_0,2}(x, \alpha)| &\leq 0.5 \frac{x}{q} (\log x) \log \left(\frac{2UV}{q} + 4 \right) + 0.89 \left(UV + \frac{5}{2}q \right) (8 + \log q) \log(2x) \\
&+ \left(0.1 \frac{x}{\sqrt{q}} + 0.39 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \left(\log \frac{x}{UV} \right) \log \frac{Vx}{U} \\
&+ \left(0.55 \frac{x}{\sqrt{U}} + 0.78 \frac{x}{\sqrt{V}} \right) \log \frac{x}{U}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

De plus, si $a = \pm 1$ et $UV < q - 1$, alors on peut remplacer le terme (5.4) dans l'estimation ci-dessus par

$$\frac{96}{\pi^2} \frac{x}{(x/q)^2} \log(4x) \log \frac{4eq}{\pi}. \tag{5.7}$$

Nous prouvons maintenant le Théorème 5.1. Par le Lemme 4.11, on a

$$|S_{\eta_0,2}(x, \alpha)| \leq T_I + T_{II},$$

où T_I est la somme de type I

$$T_I \sum_{\substack{d \leq UV \\ (d,2)=1}} \left| \sum_{\substack{n \\ (n,2)=1}} (\log n + c_d \log d) e(\alpha dn) \eta_0(dn/x) \right|$$

et T_{II} est la somme de type II

$$T_{II} \left| \sum_{\substack{d > U \\ (d,2)=1}} \sum_{\substack{w > V \\ (w,2)=1}} \mu(d) g(w) e(\alpha dw) \eta_0(dw/x) \right|.$$

5.1. Estimation de la somme de type I

Nous bornons d'abord la somme de type I T_I . Nous commençons par estimer un seul terme

$$\left| \sum_n (\log n + c_d \log d) e(dn\alpha) \eta_0(dn/x) \mathbf{1}_{(n,2)=1} \right|. \tag{5.8}$$

Par le Corollaire 3.2, on peut borner cette expression par

$$\min \left(\frac{1}{2} \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})}, \frac{\|F''\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2|\sin(2\pi d\alpha)|}, \frac{\|F''\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2|\sin(2\pi d\alpha)|^2} \right)$$

où $F(y) = F_d(y) \eta_0(dy/x) (\log y + c_d \log d)$. On a

$$F'(y) = \frac{d}{x} \eta'_0(dy/x) (\log y + c_d \log d) + \frac{\eta_0(dy/x)}{y}$$

et

$$F''(y) = \frac{d^2}{x^2} \eta''_0(dy/x) (\log y + c_d \log d) + 2 \frac{d}{x} \frac{\eta'_0(dy/x)}{y} - \frac{\eta_0(dy/x)}{y^2}.$$

Strictement parlant, F n'est pas infiniment lisse, et donc le Corollaire 3.2 ne peut pas être appliqué directement ; cependant, on peut effectuer la procédure standard de mollification de η_0 (et donc de

F) d'une quantité infinitésimale afin de rendre toutes les dérivées ici bien définies, puis effectuer un argument de passage à la limite. Plutôt que de présenter cet argument de routine explicitement, nous abuserons de la notation et supposerons que η_0 a été infinitésimalement mollifiée (alternativement, on peut interpréter les dérivées ici au sens des distributions, et remplacer la norme L^1 par la norme de variation totale dans le cas où l'expression à l'intérieur de la norme devient une mesure signée au lieu d'une fonction absolument intégrable).

Puisque $d \leq U$ et η est supportée sur $[1/4, 1]$, $\eta(dy/x)$ est supportée sur $[x/4d, x/d]$. En particulier, $|\log y + c_d \log d| \leq \log x$. On a donc

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\eta_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{x}{d} \log x \\ \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\eta'_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \log x + \|\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \log 4 \\ \|F''\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\eta''_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{d}{x} \log x + 2 \|\eta'_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d}{x} \log 4 + \|\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{4d}{x}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Des calculs de routine utilisant (1.7) montrent que

$$\begin{aligned} \|\eta_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &= 1 \\ \|\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= 4 \log 2 \\ \|\eta'_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &= 8 \log 2 \\ \|\eta'_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= 16 \\ \|\eta''_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &= 48. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Notons que $\|\eta'_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ et $\|\eta''_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ peuvent également être interprétées comme la variation totale des fonctions η_0 et η'_0 respectivement, ce qui peut être un calcul plus facile (en particulier puisque η''_0 n'est pas une fonction avant mollification, mais n'est qu'une mesure signée). En insérant ces bornes, on conclut que

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \frac{x}{d} \log x \\ \|F'\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq 8(\log 2) \log 2x \\ \|F''\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq 48 \frac{d}{x} \log 4x. \end{aligned}$$

On conclut que

$$T_I \leq \sum_{\substack{d \leq UV \\ (d,2)=1}} \min \left(\frac{1}{2} \frac{x}{d} \log x + 4(\log 2) \log 2x, \frac{4(\log 2) \log 2x}{|\sin(2\pi d\alpha)|}, \frac{d}{x} \frac{24 \log 4x}{|\sin(2\pi d\alpha)|^2} \right). \quad (5.14)$$

On contrôle d'abord la contribution à (5.14) lorsque $d \leq q/2$. Dans ce cas, d n'est pas divisible par q ; comme $(a, q) = 1$, cela implique que ad n'est pas divisible par q non plus. On a donc

$$\|4d\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \|ad/q\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} - d|\beta| \geq \frac{1}{q} - \frac{q/2}{q^2} = \frac{1}{2q} \quad (5.15)$$

et donc

$$\frac{1}{|\sin(2\pi d\alpha)|} \leq \frac{1}{|\sin(\pi/4q)|} \leq 2q \quad (5.16)$$

grâce à (2.1). Ainsi, la contribution ici (5.14) des termes $d \leq q/2$ est bornée par

$$4(\log 2) \log 2x \sum_{\substack{d \leq q/2 \\ (d,2)=1}} \min \left(2q, \frac{1}{|\sin(2\pi d\alpha)|} \right).$$

Par le Corollaire 3.5, on a

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ -q/2 \leq d \leq q/2 \\ (d,2)=1}} \min \left(2q, \frac{1}{|\sin(2\pi d\alpha)|} \right) \leq \frac{2}{\pi} q \log 4q + 4q$$

donc par symétrie, on peut ainsi borner la contribution des termes $d \leq q/2$ à (5.14) par

$$2 \log 2 \log 2x \left(\frac{2}{\pi} q \log 4q + 4q \right).$$

Considérons maintenant la contribution à (5.14) d'un bloc de la forme $2jq + \frac{q}{2} < d \leq 2(j+1)q + \frac{q}{2}$ pour un entier naturel j avec $j \leq \frac{UV}{2q} - \frac{1}{4}$. Cette contribution peut être bornée par

$$\sum_{\substack{2jq + \frac{q}{2} < d \leq 2(j+1)q + \frac{q}{2} \\ (d,2)=1}} \min \left(\frac{1}{2} \frac{x}{2jq + \frac{q}{2}} \log x + 4(\log 2) \log 2x, \frac{4(\log 2) \log 2x}{|\sin(2\pi d\alpha)|} \right),$$

ce qui, par le Corollaire 3.5, est borné par

$$\frac{x}{2jq + \frac{q}{2}} \log x + 8(\log 2) \log 2x + 4(\log 2) \log 2x \frac{2}{\pi} q \log 4q,$$

que l'on peut borner grossièrement par

$$\frac{x}{2jq + \frac{q}{2}} \log x + 4(\log 2) \log 2x \left(\frac{2}{\pi} q \log 4q + 4q \right).$$

En combinant toutes les contributions à (5.14), on obtient la borne

$$T_I \leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{UV}{2q} - \frac{1}{4}} \frac{x}{2jq + \frac{q}{2}} \log x + \left(\frac{UV}{2q} + \frac{5}{4} \right) \left(\frac{2}{\pi} q \log 4q + 4q \right) \times 4(\log 2) \log 2x.$$

Par le test de l'intégrale, on a

$$\sum_{0 \leq j \leq \frac{UV}{2q} - \frac{1}{4}} \frac{x}{2jq + \frac{q}{2}} \leq \frac{1}{2q} \int_{q/2}^{UV+2q} \frac{x}{y} dy = \frac{x}{2q} \log \left(\frac{2UV}{q} + 4 \right)$$

et donc

$$T_I \leq \frac{x}{2q} \log \left(\frac{2UV}{q} + 4 \right) \log x + \left(\frac{UV}{2q} + \frac{5}{4} \right) \left(\frac{2}{\pi} q \log 4q + 4q \right) \times 4(\log 2) \log 2x.$$

On peut écrire

$$\frac{2}{\pi}q \log 4q + 4q \leq \frac{2}{\pi}q(8 + \log q)$$

et

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} \times 4 \log 2 \leq 0.89$$

et donc

$$T_I \leq 0.5 \frac{x}{q} \log \left(\frac{2UV}{q} + 4 \right) \log x + 0.89 \left(UV + \frac{5}{2}q \right) (8 + \log q) \log x, \quad (5.17)$$

ce qui donne le terme (5.4).

Supposons maintenant que $a = \pm 1$ et $UV < q-1$. Par la symétrie (4.5), on peut prendre $a = 1$, ainsi $\alpha = \frac{1}{4q} + \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{4q^2}\right) \leq \frac{1}{4(q-1)}$. En particulier, pour $d \leq UV$, on a $d \leq q-2$ et donc $0 < 2\pi d\alpha < \pi/2$. En particulier, on a

$$\sin(2\pi d\alpha) \geq \sin\left(\frac{2\pi d}{4(q-1)}\right).$$

D'après (5.14), on conclut que

$$T_I \leq \frac{24 \log 4x}{x} \sum_{d=1}^{q-2} d \cos \text{éc}^2 \frac{\pi d}{2(q-1)}.$$

La fonction $d \mapsto d \cos \text{éc}^2 \frac{\pi d}{2(q-1)}$ est convexe sur $[0, \pi]$ (en effet, les deux facteurs le sont déjà), et donc par la règle du trapèze

$$T_I \leq \frac{24 \log 4x}{x} \int_{1/2}^{q-3/2} y \cos \text{éc}^2 \frac{\pi y}{2(q-1)} dy.$$

En utilisant la primitive

$$\int y \cos \text{éc}^2 y dy = \log |\sin y| - y \cot y,$$

on peut évaluer le membre de droite comme

$$\left(\frac{2(q-1)}{\pi} \right)^2 \frac{24 \log 4x}{x} (\log |\sin y| - y \cot y) \Bigg|_{y=\pi/4(q-1)}^{y=\pi/2-\pi/4(q-1)}.$$

La fonction $y \cot y$ varie entre 0 et 1 sur $[0, \pi/2]$, et donc

$$T_I \leq \left(\frac{2(q-1)}{\pi} \right)^2 \frac{24 \log 4x}{x} \left(\log \cot \frac{\pi}{4(q-1)} + 1 \right),$$

ce qui, en majorant $\cot \frac{\pi}{4(q-1)} \leq \frac{4(q-1)}{\pi} \leq \frac{4q}{\pi}$ et $\frac{2(q-1)}{\pi} \leq \frac{2q}{\pi}$, donne

$$T_I \leq \frac{96}{\pi^2} \frac{x}{(x/q)^2} \log(4x) \log \left(\frac{4eq}{\pi} \right), \quad (5.18)$$

ce qui est la contribution alternative (5.7).

5.2. Estimation de la somme de type II

Nous contrôlons maintenant T_{II} . D'après (1.8) et l'inégalité triangulaire, on a donc

$$T_{II} \leq 4 \int_0^\infty F(W) \frac{dW}{W}, \quad (5.19)$$

où

$$F(W) \left| \sum_{d>U} \sum_{w>V} \mu(d) \mathbf{1}_{(d,2)=1} \mathbf{1}_{[x/2W, x/W]}(d) g(w) \mathbf{1}_{(w,2)=1} \mathbf{1}_{[W/2, W]}(w) e(\alpha dw) \right|.$$

On observe que $F(W)$ s'annule à moins que

$$V \leq W \leq \frac{x}{U}, \quad (5.20)$$

et on se restreint désormais à ce régime.

D'après (5.20), (5.3), on voit que les intervalles $[x/2W, x/W]$ et $[W/2, W]$ ont tous deux une longueur d'au moins 2. Nous appliquons maintenant le Corollaire 3.9 avec $Mq/2$ et utilisons (4.19) pour borner

$$F(W) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{W}{2} + \frac{1}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2Wq} + 1 \right)^{1/2} A^{1/2} B^{1/2}, \quad (5.21)$$

où

$$\begin{aligned} \delta &= \inf_{1 \leq j \leq q/2} \|4j\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \\ A &= \sum_{d \in [x/2W, x/W]} \mathbf{1}_{(d,2)=1} \\ B &= \sum_{w \in [W/2, W]} \mathbf{1}_{(w,2)=1} \log^2 w. \end{aligned}$$

D'après le calcul (5.15), on a

$$\delta \geq \frac{1}{2q}. \quad (5.22)$$

Bornons maintenant A et B . On a clairement

$$|A| \leq \frac{x}{4W} + 1.$$

De même, pour B , on borne $\log^2 w$ par $\log^2 W$, et on conclut que

$$|B| \leq \left(\frac{W}{4} + 1 \right) \log^2 W.$$

D'après (5.3), (5.20), on a donc

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{1.1}{4} \frac{x}{W} \\ |B| &\leq \frac{1.1}{4} W \log^2 W, \end{aligned}$$

et donc

$$F(W) \leq \frac{1.1}{8} \left(\frac{W}{4} + 2q \right)^{1/2} \left(\frac{x}{2Wq} + 1 \right)^{1/2} x^{1/2} \log W.$$

En majorant grossièrement $(a + b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}$, on a donc

$$F(W) \leq \frac{1.1}{8} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{1}{2} \sqrt{xW} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{W}} + \sqrt{2} \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \log W.$$

On intègre cette expression sur (5.20) par rapport à la mesure $\frac{4dW}{W}$ pour borner (5.19). Pour simplifier un peu les calculs au prix d'une légère dégradation des constantes numériques, on borne $\log W$ grossièrement par $\log \frac{x}{U}$ pour les deux termes du milieu pour $F(W)$. Puisque

$$4 \int_{V \leq W \leq \frac{x}{U}} \frac{dW}{W} = 2 \log \frac{x}{UV} \log \frac{Vx}{U},$$

on obtient ainsi la borne

$$T_{II} \leq \frac{1.1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{q}} + \sqrt{2} \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \log \frac{x}{UV} \log \frac{Vx}{U} + 1.1 \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{U}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{V}} \right) \log \frac{x}{U}.$$

En combinant ceci avec (5.17) et (5.18), on obtient l'affirmation.

Lorsque β est très petit (de l'ordre de $O(1/x)$ ou moins), on peut éliminer la majeure partie du terme $0.5 \frac{x}{q} \log x \log(\frac{2UV}{q} + 4)$ dans (5.4) en travaillant avec $S_{\eta,q}(x, \alpha) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)} S_{\eta,q}(x, \beta)$ au lieu de $S_{\eta,2}(x, \alpha)$, ce qui remplace effectivement la phase $e(\alpha n)$ par la phase variante $(e(an/q) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)})e(\beta n) \mathbf{1}_{(n,q)=1}$. Le but principal de ce remplacement est de supprimer la composante non annulante de la somme de type I (qui, pour de petites valeurs de β , se produit lorsque d est divisible par q), qui générerait sinon le terme de type $\frac{x}{q} \log^2 x$ dans (1.10). Une telle amélioration pourrait être utile dans des travaux ultérieurs sur les problèmes de type Goldbach, mais nous ne la poursuivons pas ici.

6. Preuve du Théorème 1.3

Dans cette section, nous utilisons le Théorème 5.1 pour établir le Théorème 1.3, essentiellement en appliquant des valeurs spécifiques de U et V . Avec plus d'efforts, on pourrait optimiser U et V plus soigneusement que cela n'est fait ci-dessous, ce qui améliorerait les valeurs numériques du Théorème 1.3 d'une quantité modeste, mais nous ne le ferons pas ici afin de garder l'exposition aussi simple que possible.

Nous commençons par (1.9). Nous appliquons le Théorème 5.1 avec

$$U \frac{1}{4} x^{2/5}, \quad V \frac{1}{2} x^{2/5}.$$

Les hypothèses du Théorème 5.1 sont facilement vérifiées, et on obtient

$$\begin{aligned} |S_{\eta_0,2}(x, \alpha)| &\leq 0.5 \frac{x}{q} \log x \log(6) + 0.89 \left(\frac{7}{2} q \right) (8 + \log q) \log(2x) \\ &\quad + \left(0.1 \frac{x}{\sqrt{q}} + 0.39 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \times \frac{8}{5} \log^2 x + \left(0.55 \frac{x}{\sqrt{x^{2/5}}} + 0.78 \frac{x}{\sqrt{x^{2/5}}} \right) \log x \end{aligned}$$

ce qui, après un peu d'algèbre et en utilisant les hypothèses $10^{20} \leq x$ et $100 \leq q \leq x/100$, donne l'estimation (1.9) (en remplaçant $S_{\eta,2}$ par S_{η,q_0} via le Lemme 4.1, et en majorant les constantes par 0.14, 0.64, 0.15).

Pour prouver (1.10), nous utilisons le choix

$$U \frac{1}{2}q, \quad V \frac{x}{2q}.$$

Les hypothèses du Théorème 5.1 sont vérifiées car $q \leq x^{1/3}$ et $x \geq 10^{20}$. On obtient alors

$$|S_{\eta,2}(x, \alpha)| \leq \frac{x}{q} \log(2x) [0.5 \log \left(\frac{2x}{q^2} + 4 \right) + 0.9(8 + \log q)] + (0.301 \log^2 q + 2.66 \log q) \frac{x}{\sqrt{q}}.$$

Puisque

$$0.5 \log \left(\frac{2x}{q^2} + 4 \right) + 0.9(8 + \log q) \leq 0.5(\log(2x + 4q^2) + 14.4) \leq 0.5(\log(2x) + 15)$$

(en utilisant les hypothèses $q \leq x^{1/3}$ et $x \geq 10^{20}$) et

$$0.301 \log^2 q + 2.66 \log q \leq 0.301 \log q (\log q + 8.9),$$

on obtient l'affirmation (1.10), après avoir utilisé le Lemme 4.1 pour remplacer $S_{\eta,2}(x, \alpha)$ par $S_{\eta,q_0}(x, \alpha)$ (et remplacé 0.301 par 0.31).

Passons maintenant à la preuve de (1.11). Ici, nous utilisons le choix

$$U \frac{x}{(x/q)^2}; \quad V x/q.$$

Encore une fois, les hypothèses du Théorème 5.1 sont facilement vérifiées, et on conclut que

$$|S_{\eta,2}(x, \alpha)| \leq 0.5 \frac{x}{q} \log x \log 6 + 0.89 \left(\frac{7}{2}q \right) (8 + \log q) \log(2x) \\ + \left(0.1 \frac{x}{\sqrt{q}} + 0.39 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \times 3 \log^2 \frac{x}{q} + \left(0.55 \frac{x}{\sqrt{x/(x/q)^2}} + 0.78 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \times 2 \log \frac{x}{q}.$$

Puisque $q \geq x^{2/3}$ et $x \geq 10^{20}$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{x/(x/q)^2}} \leq \frac{x}{\sqrt{x/q}}$$

et

$$\frac{x}{\sqrt{q}} \leq 0.001 \frac{x}{\sqrt{x/q}}$$

et

$$\frac{x}{q} \leq 0.001q$$

et donc

$$|S_{\eta,2}(x, \alpha)| \leq 3.12q(8 + \log q) \log(2x) + \left(1.181 \log^2 \frac{x}{q} + 2.66 \log \frac{x}{q} \right) \frac{x}{\sqrt{x/q}}.$$

En écrivant

$$1.181 \log^2 \frac{x}{q} + 2.66 \log \frac{x}{q} \leq 1.181 \log \frac{x}{q} \left(\log \frac{x}{q} + 2.3 \right),$$

on obtient l'affirmation (1.11), après avoir utilisé le Lemme 4.1 pour remplacer $S_{\eta,2}(x, \alpha)$ par $S_{\eta,q_0}(x, \alpha)$ (et remplacé 1.181 par 1.19).

Enfin, nous établissons (1.12). Ici, nous utilisons le choix

$$U \frac{x}{(1.02x/q)^2}; \quad V 1.02x/q$$

pour garantir que $UV < q - 1$. Nous pouvons maintenant utiliser le terme (5.7) et conclure que

$$|S_{\eta,2}(x, \alpha)| \leq \frac{96}{\pi^2} \frac{x}{(x/q)^2} \log(4x) \log \frac{4eq}{\pi} + \left(0.1 \frac{x}{\sqrt{q}} + 0.39 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \right) \times 3 \log^2(1.02x/q) + \left(0.55 \frac{x}{\sqrt{x/(1.02x/q)^2}} + 0.78 \frac{x}{\sqrt{1.02x/q}} \right) \times 2 \log(1.02x/q).$$

On peut borner

$$\log \frac{4eq}{\pi} \leq \log(x/4)$$

et donc

$$\log(4x) \log(x/4) \leq \log^2 x.$$

De plus, comme $q \geq x^{1/3}$ et $x \geq 10^{20}$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{x/(1.02x/q)^2}} \leq 1.02 \frac{x}{\sqrt{x/q}}$$

et

$$\frac{x}{\sqrt{q}} \leq 0.001 \frac{x}{\sqrt{x/q}},$$

et donc

$$|S_{\eta,2}(x, \alpha)| \leq \frac{96}{\pi^2} \frac{x}{(x/q)^2} \log^2 x + 1.19 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \log^2(1.02x/q) + 2.67 \frac{x}{\sqrt{x/q}} \log(1.02x/q).$$

Les deux derniers termes peuvent être bornés par $\left(1.19 \log \frac{1.02x}{q}\right) \times \left(\log \frac{1.02x}{q} + 2.3\right)$. Puisque

$$1.19 \log \frac{1.02x}{q} \leq 1.2 \log \frac{x}{q}$$

et

$$\log \frac{1.02x}{q} + 2.3 \leq \log \frac{x}{q} + 2.35$$

et

$$\frac{96}{\pi^2} \leq 9.73,$$

l'affirmation (1.12) s'ensuit, après avoir utilisé le Lemme 4.1 pour remplacer $S_{\eta,2}(x, \alpha)$ par $S_{\eta,q_0}(x, \alpha)$ (et remplacé 2.35 par 2.4).

7. Estimation des arcs majeurs

Dans cette section, nous utilisons le Théorème 1.5 pour contrôler les sommes exponentielles dans le régime des “arcs majeurs” $\alpha = O(T_0/x)$. Pour relier la fonction de von Mangoldt aux zéros de la fonction zêta, nous utilisons l'identité standard suivante :

Proposition 3 (Formule explicite de von Mangoldt). *Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse à support compact supportée dans $[2, +\infty)$. Alors*

$$\sum_n \Lambda(n) \eta(n) = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{1}{x^3 - x}\right) \eta(y) dy - \sum_{\rho} \int_{\mathbb{R}} \eta(y) y^{\rho-1} dy, \quad (7.1)$$

où ρ parcourt les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann.

Démonstration. Voir, par exemple, [19, §5.5]. □

Proposition 4 (Sommes sur les arcs majeurs). *Soit T_0 comme dans le Théorème 1.5. Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction lisse non négative supportée sur $[c, c']$, et soit $x, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $cx \geq 10^3$ et*

$$|\alpha| \leq \frac{T_0}{4\pi c'x}. \quad (7.2)$$

Alors

$$\left| S_{\eta,1}(x, \alpha) - x \int_{\mathbb{R}} \eta(y) e(\alpha xy) dy \right| \leq A \frac{\log T_0}{3T_0} x + 2.01 c^{-1/2} x^{1/2} N(T_0) \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad (7.3)$$

où A est la quantité

$$A60 \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})} + 32c' \|\eta'\|_{L^1(\mathbb{R})} + 4(c')^2 \|\eta''\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (7.4)$$

et $N(T_0)$ est le nombre de zéros de ζ dans la bande $\{0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T_0\}$.

Démonstration. On a

$$S_{\eta,1}(x, \alpha) = \sum_n \Lambda(n) \eta(n/x) e(\alpha n).$$

En appliquant (7.1), on conclut que le membre de gauche de (7.3) est borné par

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^3 - y} \eta(y/x) dy + \sum_{\rho} \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(y/x) e(\alpha y) y^{\rho-1} dy \right|.$$

Le premier terme est $\mathcal{O}^*(2c^{-3}x^{-2} \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})})$. Passons maintenant à la seconde somme. On écrit $\rho = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

On considère d'abord la contribution de ces zéros avec $|t| \leq T_0$. Par hypothèse, $\sigma = 1/2$ pour ces zéros, et on peut borner cette portion de la somme par

$$\sum_{\rho: |t| \leq T_0} \int_{\mathbb{R}} \eta(y/x) y^{-1/2} dy,$$

que l'on peut borner à son tour par

$$2c^{-1/2} x^{1/2} N(T_0) \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Comme $T_0 \geq 10^3$ et $cx \geq 10^3$, on peut clairement absorber le terme d'erreur beaucoup plus petit $2c^{-3}x^{-2} \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})}$ dans ce terme en augmentant le facteur 2 à 2.01.

Enfin, on considère les termes avec $|t| > T_0$. On peut réécrire une intégrale unique

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \eta(y/x) e(\alpha y) y^{\rho-1} dy \right| \quad (7.5)$$

comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{i(2\pi\alpha y + t \log y)} dy \right|,$$

où $f(y)\eta(y/x)y^{\sigma-1}$. Puisque

$$e^{i(2\pi\alpha y + t \log y)} = \frac{1}{i(2\pi\alpha + t/y)} \frac{d}{dy} e^{i(2\pi\alpha y + t \log y)}$$

avec le dénominateur non nul sur le support de $\eta(y/x)$ grâce à (7.2), on peut intégrer par parties et écrire l'intégrale précédente comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\pi\alpha + t/y} f(y) \right) e^{i(2\pi\alpha y + t \log y)} dy \right|.$$

Une deuxième intégration par parties réécrit alors l'expression ci-dessus comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\pi\alpha + t/y} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\pi\alpha + t/y} f(y) \right) \right) e^{i(2\pi\alpha y + t \log y)} dy \right|,$$

que l'on borne alors par

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\pi\alpha + t/y} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\pi\alpha + t/y} f(y) \right) \right) \right| dy.$$

L'expression à l'intérieur de la valeur absolue peut être développée comme

$$\frac{t^2/y^4 - 4\pi\alpha t/y^3}{(2\pi\alpha + t/y)^4} f(y) + \frac{3t/y^2}{(2\pi\alpha + t/y)^3} f'(y) + \frac{1}{(2\pi\alpha + t/y)^2} f''(y).$$

Sur le support de f , on a $y \leq c'x$. D'après (7.2), on peut donc minorer

$$|2\pi\alpha + t/y| \geq \frac{|t|}{2y}$$

et majorer

$$|t^2/y^4 - 4\pi\alpha t/y^3| \leq \frac{2t^2}{y^4},$$

et donc l'intégrale précédente peut être bornée par

$$\frac{32}{t^2} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy + \frac{24}{t^2} \int_{\mathbb{R}} y |f'(y)| dy + \frac{4}{t^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 |f''(y)| dy.$$

Puisque $0 \leq \sigma \leq 1$, on a les bornes grossières

$$|f(y)| \leq \eta(y/x)$$

$$|f'(y)| \leq \frac{1}{x} |\eta'(y/x)| + \frac{1}{y} \eta(y/x)$$

$$|f''(y)| \leq \frac{1}{x^2} |\eta''(y/x)| + \frac{2}{xy} |\eta'(y/x)| + \frac{1}{y^2} \eta(y/x)$$

et donc (en majorant y par $c'x$) on peut borner (7.5) par

$$A \frac{x}{t^2},$$

où A est la quantité définie en (7.4). D'après [40, Lemme 2], on peut borner

$$\sum_{\rho: |t| \geq T_0} \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\pi T_0} \left(\log \frac{T_0}{2\pi} + 1 \right) + \frac{1.34}{T_0^2} \left(2 \log \frac{T_0}{2\pi} + 1 \right),$$

ce qui, sous l'hypothèse $T_0 \geq 10^3$, peut être majoré par

$$\frac{\log T_0}{3T_0}.$$

L'affirmation s'ensuit alors. □

8. Sommes de cinq nombres premiers

Dans cette section, nous établissons le Théorème 1.4. Nous rappelons le résultat suivant de Ramaré et Saouter :

[Théorème de Ramaré-Saouter] Si $x \geq 1.1 \times 10^{10}$ est un nombre réel, alors il existe au moins un nombre premier $p \leq x$ tel que $x - p \leq \frac{x}{2.8 \times 10^7}$.

Démonstration. Voir [40, Théorème 3]. L'un des principaux outils utilisés dans la preuve est le Théorème 1.5. En utilisant les vérifications numériques plus récentes de l'hypothèse de Riemann, on peut améliorer ce résultat ; voir [18]. Cependant, nous n'aurons pas besoin de le faire ici. □

En combinant le résultat ci-dessus avec le Théorème 1.6, on voit que

- Tout nombre impair compris entre 3 et $(2.8 \times 10^7)N_0$ est la somme d'au plus trois nombres premiers.
- Tout nombre pair compris entre 2 et $(2.8 \times 10^7)^2 N_0$ est la somme d'au plus quatre nombres premiers.
- Tout nombre impair compris entre 3 et $(2.8 \times 10^7)^3 N_0$ est la somme d'au plus cinq nombres premiers.

En particulier, le Théorème 1.4 est vrai jusqu'à $(2.8 \times 10^7)^3 N_0 \geq 8.7 \times 10^{36}$. Ainsi, il suffit de vérifier le Théorème 1.4 pour les nombres impairs supérieurs à 8.7×10^{36} .

D'autre part, dans [24], il est montré que tout nombre impair supérieur à $\exp(3100)$ est la somme de trois nombres premiers. Il suffira donc de montrer que

[Théorème 8.2] Soit $8.7 \times 10^{36} \leq x \leq \exp(3100)$ un entier. Alors il existe un entier dans l'intervalle $[x - N_0, x - 2]$ qui est la somme de trois nombres premiers impairs.

Nous établissons ce théorème par la méthode du cercle.

Fixons x comme ci-dessus. Nous aurons besoin d'une fonction de coupure symétrique, lipschitzienne, normalisée dans L^2 , η_1 , proche de $\mathbf{1}_{[0,1]}$. Pour fixer les idées, nous prendrons

$$\eta_1(t)(1 - 10 \operatorname{dist}(t, [0.2, 0.8]))_+,$$

qui est supportée sur $[0.1, 0.9]$ et obéit à la symétrie

$$\eta_1(1-t) = \eta_1(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (8.1)$$

Pour référence future, nous enregistrons quelques normes de η_1 (après avoir effectué une mollification infinitésimale) :

$$\|\eta_1\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (8.2)$$

$$\|\eta_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1 \quad (8.3)$$

$$\|\eta_1\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{7}{10} \quad (8.4)$$

$$\|\eta'_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 10 \quad (8.5)$$

$$\|\eta'_1\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2 \quad (8.6)$$

$$\|\eta_1 \eta'_1\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1 \quad (8.7)$$

$$\|\eta''_1\|_{L^1(\mathbb{R})} = 40 \quad (8.8)$$

$$\|\eta'_1 \eta'_1 + \eta_1 \eta''_1\|_{L^1(\mathbb{R})} = 40. \quad (8.9)$$

Pour un paramètre $K \geq 1$ à choisir plus tard, nous considérerons la quantité

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq N_0/3} \Lambda(n_1) \mathbf{1}_{(n_1, \sqrt{x_\#})=1} \eta_1(n_1/x) \Lambda(n_2) \mathbf{1}_{(n_2, \sqrt{x_\#})=1} \eta_1(n_2/x) \Lambda(n_3) \mathbf{1}_{(n_3, \sqrt{x/K_\#})=1} \eta_0(K n_3/x) \\ & \quad \times \mathbf{1}_{x=n_1+n_2+n_3+h_1+h_2+h_3}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

On observe que le terme de la somme n'est non nul que lorsque n_1, n_2, n_3 sont des nombres premiers impairs (de magnitudes respectivement inférieures à x, x , et x/K) avec $n_1 + n_2 + n_3 \in [x - N_0, x - 2]$. Ainsi, pour prouver le Théorème 8.2, il suffit de montrer que la quantité (8.10) est strictement positive. En appliquant l'heuristique des nombres premiers $\Lambda \approx 1$ et (8.2), on s'attend à ce que la quantité (8.10) soit de taille approximativement $\frac{2}{3} x^3 K^{-1} (N_0/3)^3$.

Notons que nous avons rendu le troisième nombre premier n_3 un peu plus petit que les deux autres. Cette astuce, due à l'origine à Bourgain [3], aide à éliminer certaines pertes associées à la convolution des fonctions de coupure η_1, η_0 .

Par analyse de Fourier, on peut réécrire (8.10) comme

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S_{\eta_1, \sqrt{x_\#}}(x, \alpha)^2 S_{\eta_0, \sqrt{x/K_\#}}(x/K, \alpha) D_{N_0/3}(\alpha)^3 e(-x\alpha) d\alpha, \quad (8.11)$$

où $D_{N_0/3}(\alpha)$ est le noyau de type Dirichlet

$$D_{N_0/3}(\alpha) = \sum_{1 \leq n \leq N_0/3} e(n\alpha).$$

Il suffit donc de montrer que cette expression est non nulle pour un certain K . Il s'avère qu'il y a un gain à obtenir (d'environ un ordre de grandeur) dans le régime des arcs mineurs faibles lorsque α est légèrement supérieur à T_0/x , en intégrant K sur un intervalle à l'intérieur de $[1, T_0]$ bien séparé des deux extrémités ; par exemple, on pourrait intégrer K de 10^3 à 10^6 . Un tel gain pourrait être

utile pour de futurs travaux sur les problèmes de type Goldbach ; cependant, pour le problème qui nous occupe, il sera suffisant de sélectionner une seule valeur de K , à savoir

$$K10^3.$$

Comme mentionné précédemment, la taille attendue de la quantité (8.11) est approximativement $\frac{2}{3} \frac{x^2}{K} (N_0/3)^3$. Cette heuristique peut être étayée par l'estimation des arcs majeurs suivante :

Proposition 5 (Estimation des arcs fortement majeurs). *On a*

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} S_{\eta_1, \sqrt{x}}(x, \alpha)^2 S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha) D_{N_0/3}(\alpha)^3 e(-x\alpha) d\alpha = \frac{x^2}{K} (N_0/3)^3 \left(\frac{2}{3} + \mathcal{O}^*(0.1) \right). \quad (8.12)$$

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$D_{N_0/3}(\alpha) = (N_0/3) \left(1 + \mathcal{O}^* \left(2\pi (N_0/3) \|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \right) \right) = (N_0/3) \left(1 + \mathcal{O}^* \left(\frac{N_0 T_0}{5.4x} \right) \right)$$

lorsque $\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}$. Puisque $N_0 = 4 \times 10^{14}$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$, et $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, on conclut que

$$D_{N_0/3}(\alpha) = (N_0/3) \left(1 + \mathcal{O}^* \left(10^{-10} \right) \right) \quad (8.13)$$

(avec beaucoup de marge). De plus, d'après la Proposition 7.2, pour α dans l'intervalle $[-\frac{T_0}{3.6\pi x}, \frac{T_0}{3.6\pi x}]$ (et en fait pour tout α dans l'intervalle plus large $[-\frac{KT_0}{4\pi x}, \frac{KT_0}{4\pi x}]$), on a

$$S_{\eta_0,1}(x/K, \alpha) = \frac{x}{K} \hat{\eta}_0(\alpha x/K) + \mathcal{O}^* \left(A_2 \frac{\log T_0}{3T_0} \frac{x}{K} + 2.01 x^{1/2} K^{-1/2} N(T_0) \|\eta_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \right),$$

où $\hat{\eta}_0(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \eta_0(y) e(\alpha xy) dy$ et

$$A_2 60 \|\eta_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + 32 \|\eta'_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + 4 \|\eta''_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

D'après (5.9), (5.11), (5.13), on a

$$A_2 = 252 + 256 \log 2 \leq 330,$$

et avec $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, $K = 10^3$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$, et $N(T_0) \leq 10^{10}$, on conclut que

$$S_{\eta_0,1}(x/K, \alpha) = \frac{x}{K} \left(\hat{\eta}_0(\alpha x/K) + \mathcal{O}^* \left(10^{-6} \right) \right).$$

Par le Lemme 4.1 et (8.13) (et en bornant $\hat{\eta}_0(\alpha x)$ par $\mathcal{O}^*(1)$ chaque fois que nécessaire), on a alors

$$S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha) D_{N_0/3}(\alpha)^3 = \frac{x(N_0/3)^3}{K} \left(\hat{\eta}_0(\alpha x) + \mathcal{O}^* \left(1.1 \times 10^{-6} \right) \right).$$

Considérons la contribution du terme d'erreur $\frac{x(N_0/3)^3}{K} \mathcal{O}^*(1.1 \times 10^{-6})$ à (8.12). Par le Corollaire 4.7, on peut borner cette contribution en magnitude par

$$1.1 \times 10^{-6} \frac{x(N_0/3)^3}{K} \frac{2}{1 - \frac{\log(2T_0/3\pi)}{\log x}} S_{\eta_1^2, \sqrt{x}}(x, 0),$$

ce qui, d'après le Lemme 4.3 et les bornes $T_0 = 3.29 \times 10^9$, $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, peut être majoré sans risque par

$$10^{-3} \frac{x^2 (N_0/3)^3}{K}.$$

Ainsi, il suffira de montrer que

$$\int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} S_{\eta_1, \sqrt{x}}(x, \alpha)^2 \hat{\eta}_0(\alpha x/K) e(-x\alpha) d\alpha = x \left(\frac{2}{3} + \mathcal{O}^*(0.09) \right). \quad (8.14)$$

Nous appliquons à nouveau la Proposition 7.2 pour obtenir

$$S_{\eta_1, 1}(x, \alpha) = x \hat{\eta}_1(\alpha x) + \mathcal{O}^* \left(A_1 \frac{\log T_0}{3T_0} x + 2.01 c_1^{-1/2} x^{1/2} N(T_0) \|\eta_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \right),$$

où $\hat{\eta}_1(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \eta_1(y) e(\alpha xy) dy$ et

$$A_1 60 \|\eta_1\|_{L^1(\mathbb{R})} + 32 c_1' \|\eta_1'\|_{L^1(\mathbb{R})} + 4(c_1')^2 \|\eta_1''\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

avec $c_1 0.1$, $c_1' = 0.9$. D'après (8.4), (8.6), (8.8), on a

$$A_1 = 229.2,$$

et avec $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$, et $N(T_0) \leq 10^{10}$, on conclut que

$$S_{\eta_1, 1}(x, \alpha) = x \left(\hat{\eta}_1(\alpha x) + \mathcal{O}^*(10^{-6}) \right).$$

En bornant $\hat{\eta}_0$ par $\mathcal{O}^*(1)$, on peut donc exprimer le membre de gauche de (8.14) comme la somme du terme principal

$$x^2 \int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} \hat{\eta}_1(\alpha x)^2 \hat{\eta}_0(\alpha x/K) e(-x\alpha) d\alpha$$

et des deux termes d'erreur

$$\mathcal{O}^* \left(10^{-6} x \int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, 1}(x, \alpha)| d\alpha \right) \quad (8.15)$$

et

$$\mathcal{O}^* \left(10^{-6} x^2 \int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |\hat{\eta}_1(\alpha x)| d\alpha \right). \quad (8.16)$$

Nous estimons d'abord (8.15). D'après le Corollaire 4.7 et le Lemme 4.3, on a

$$\int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, 1}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leq \frac{2}{1 - \frac{\log(2T_0/3.6\pi)}{\log x}} \times 4 \log 2 \times 1.04x,$$

et donc par Cauchy-Schwarz, on peut borner (8.15) par

$$10^{-6} x \sqrt{\frac{T_0}{3.6\pi}} \left(\frac{2}{1 - \frac{\log(2T_0/3.6\pi)}{\log x}} \times 4 \log 2 \times 1.04 \right)^{1/2};$$

comme $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$, on peut borner (8.15) par $0.02x$. Une borne similaire (en fait légèrement meilleure) est obtenue pour (8.16) (en utilisant le théorème de Plancherel à la place du Corollaire 4.7). On conclut qu'il suffit de montrer que

$$\int_{|\alpha| \leq \frac{T_0}{3.6\pi x}} \hat{\eta}_1(\alpha x)^2 \hat{\eta}_0(\alpha x/K) e(-x\alpha) d\alpha = \frac{1}{x} (1 + \mathcal{O}^*(0.05)).$$

Par le Lemme 3.3, on a

$$|\hat{\eta}_1(\alpha x)| \leq \frac{\|\eta'_1\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2\pi|\alpha|} = \frac{1}{\pi|\alpha|};$$

à partir de ceci et du choix $T_0 = 3.29 \times 10^9$, on vérifie facilement que

$$\int_{|\alpha| \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}} \hat{\eta}_1(\alpha x)^2 \hat{\eta}_0(\alpha x/K) e(-x\alpha) d\alpha = \mathcal{O}^*\left(0.01 \frac{1}{x}\right),$$

et il reste donc à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\eta}_1(\alpha x)^2 \hat{\eta}_0(\alpha x/K) e(-x\alpha) d\alpha = \frac{1}{x} (1 + \mathcal{O}^*(0.04)).$$

Le membre de gauche peut s'exprimer comme

$$\frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \eta_1(s) \eta_1(1 - s - t/K) \eta_0(t) ds dt;$$

comme η_0 a une norme L^1 de 1, il suffit donc de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_1(s) \eta_1(1 - s - t/K) ds = 1 + \mathcal{O}^*(0.04)$$

pour tout $t = \mathcal{O}^*(1)$. D'après (8.1) et (8.5), on a

$$\eta_1(1 - s - t/K) = \eta_1(s) + \mathcal{O}^*(10/K),$$

et donc (d'après (8.4) et la normalisation L^1 de η_0)

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_1(s) \eta_1(1 - s - t/K) ds = 1 + \mathcal{O}^*(10/K).$$

Puisque $K = 10^3$, l'affirmation s'ensuit. □

Compte tenu de la proposition ci-dessus, il suffit de montrer que

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}}(x, \alpha)|^2 |S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha)| |D_{N_0/3}(\alpha)|^3 d\alpha \leq 0.56 \frac{x^2}{K} (N_0/3)^2.$$

Nous avons l'estimation L^2 suivante :

Proposition 6 (Estimation L^2). *On a*

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}}(x, \alpha)|^2 |D_{N_0/3}(\alpha)|^2 d\alpha \leq 7.09 (N_0/3)^2 x.$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.10, on a

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}_\#}(x, \alpha)|^2 |D_{N_0/3}(\alpha)|^2 d\alpha \leq 8H^2 x \left(1 + \frac{0.13 \log x}{H} + \frac{(e^\gamma \log \log(2H) + \frac{2.507}{\log \log(2H)}) \log(9H)}{2H} \right),$$

où $H \lfloor N_0/3 \rfloor$. Comme $\log x \leq 3100$ et $N_0 = 4 \times 10^{14}$, un bref calcul montre alors que

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}_\#}(x, \alpha)|^2 |D_{N_0/3}(\alpha)|^2 d\alpha \leq 8.001(N_0/3)^2 x.$$

Par ailleurs, d'après le Corollaire 4.8 (en utilisant les valeurs $x \geq 8.7 \times 10^{36}$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$, $c = 0.1$ et les estimations (8.3), (8.7), (8.9) pour vérifier les hypothèses de ce corollaire), on a

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}_\#}(x, \alpha)|^2 d\alpha \geq 0.92x,$$

et donc par (8.13)

$$\int_{\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}} |S_{\eta_1, \sqrt{x}_\#}(x, \alpha)|^2 |D_{N_0/3}(\alpha)|^2 d\alpha \geq 0.919(N_0/3)^2 x.$$

En soustrayant, on obtient la borne. □

Compte tenu de cette proposition et de l'inégalité de Hölder, il suffit de montrer l'estimation L^∞ suivante :

$$|S_{\eta_0, \sqrt{x/K}_\#}(x/K, \alpha)| |D_{N_0/3}(\alpha)| \leq 0.078x(N_0/3) \frac{x}{K} \quad (8.18)$$

lorsque $\|\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}$; en comparant ceci avec le Lemme 4.3, on voit qu'il faut battre les bornes "triviales" de ce lemme par un facteur d'environ 13. Par la symétrie de conjugaison (4.5), on peut supposer que

$$\frac{T_0}{3.6\pi x} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

On considère d'abord le cas du régime des arcs faiblement majeurs

$$\frac{T_0}{3.6\pi x} < \alpha \leq \frac{KT_0}{4\pi x}.$$

D'après les calculs de la preuve de la Proposition 8.3, on a

$$S_{\eta_0, \sqrt{x/K}_\#}(x/K, \alpha) = \frac{x}{K} \left(\hat{\eta}_0(\alpha x/K) + \mathcal{O}^*(1.1 \times 10^{-6}) \right)$$

dans ce régime, donc par la borne triviale $|D_{N_0/3}(\alpha)| \leq (N_0/3)$, il suffit de montrer que

$$|\hat{\eta}_0(\alpha x/K)| \leq 0.077.$$

Par le Lemme 3.3, on a

$$|\hat{\eta}_0(\alpha x/K)| \leq \frac{\|\eta'_0\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2\pi|\alpha|x/K}.$$

Puisque $\alpha \geq \frac{T_0}{3.6\pi x}$, on conclut de (5.10) que

$$|\hat{\eta}_0(\alpha x/K)| \leq \frac{7.2K \log 2}{T_0},$$

et l'affirmation s'ensuit (avec beaucoup de marge) d'après les choix $K = 10^3$, $T_0 = 3.29 \times 10^9$. Ensuite, on observe d'après le Lemme 4.3 et (5.11) (et la borne inférieure $x/K \geq 8.7 \times 10^{33}$) que

$$|S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha)| \leq S_{\eta_0, 1}(x/K, 0) \leq 1.01 \frac{x}{K};$$

en combinant ceci avec la borne grossière

$$|D_{N_0/3}(\alpha)| \leq \frac{2}{|1 - e(\alpha)|} = \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|} \leq \frac{1}{2\alpha}$$

(d'après (2.1)), on a

$$|S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha)| |D_{N_0/3}(\alpha)| \leq \frac{1.01}{2\alpha} \frac{x}{K},$$

ce qui donne (8.18) dès que

$$\alpha \geq \frac{20}{N_0},$$

et donc on peut supposer que

$$\frac{KT_0}{3.6\pi x} \leq \alpha < \frac{20}{N_0}. \quad (8.19)$$

Dans ce régime, on utilise la borne grossière $|D_{N_0/3}(\alpha)| \leq N_0/3$, et on se ramène à montrer que

$$|S_{\eta_0, \sqrt{x/K}}(x/K, \alpha)| \leq 0.078x. \quad (8.20)$$

D'après le Théorème 1.3 (en particulier l'estimation (1.11) ou (1.12)), en prenant $q = \lfloor 1/(4\alpha) \rfloor$, on peut montrer que cette estimation est satisfaite pour tout α dans l'intervalle (8.19), en utilisant les grandes valeurs de x , K , T_0 , N_0 . Les calculs numériques, bien que fastidieux, montrent que la borne est respectée avec une marge confortable. Ceci achève la preuve du Théorème 8.2 et donc du Théorème 1.4.

Références

- [BD68] E. Bombieri, H. Davenport, *On the large sieve method*, Abh. aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an Edmund Landau, Deut. Verlag Wiss., Berlin, 1122, 1968.
- [But11] Y. Buttkewitz, *Exponential sums over primes and the prime twin problem*, Acta Math. Hungar. 131 (2011), no. 1-2, 46-58.
- [Bou99] J. Bourgain, *On triples in arithmetic progression*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), no. 5, 968-984.
- [Che85] J. Chen, *On the estimation of some trigonometric sums and their applications* (Chinese), Scientia Sinica 28 (1985), 449-458.
- [CW89] J. R. Chen and T. Z. Wang, *On odd Goldbach problem*, Acta Math. Sinica 32 (1989), 702-718.
- [CW94] J. Chen, T. Wang, *Estimation of linear trigonometric sums with primes* (Chinese), Acta Mathematica Sinica 37 (1994), 25-31.

- [Dab96] H. Daboussi, *Effective estimates of exponential sums over primes*, Analytic Number Theory, Vol. 1, Progr. Math. 138, Birkhäuser, Boston 1996, 231-244.
- [DR00] H. Daboussi, J. Rivat, *Explicit upper bounds for exponential sums over primes*, Math. Computation 70 (2000), 431-447.
- [DETZ97] J.-M. Deshouillers, G. Effinger, H. te Riele, D. Zinoviev, *A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 99-104.
- [Dus99] P. Dusart, *Inégalités explicites pour $\psi(X)$, $\theta(X)$, $\pi(X)$ et les nombres premiers*, C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can., 21 (1999), 53-59.
- [Dus02] P. Dusart, *Estimates of $\theta(x; k, l)$ for large values of x* , Math. Comp. 71 (2002), no. 239, 1137-1168.
- [Dus10] P. Dusart, *Estimates of some functions over primes without R.H.*, preprint. arXiv :1002.0442.
- [Gal67] P. X. Gallagher, *The large sieve*, Mathematika, 14 (1967), 14-20.
- [GD04] X. Gourdon, P. Demichel, *The first 10^{13} zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height*, <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>, 2004.
- [GT06] B. Green, T. Tao, *Restriction theory of the Selberg sieve, with applications*, J. Théor. Nombres Bordeaux 18 (2006), no. 1, 147-182.
- [HL23] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio numerorum'; III : On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. 44 (1923), no. 1, 1-70.
- [HB92] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) 64 (1992), no. 2, 265-338.
- [Hel13] H. Helfgott, *Minor arcs for Goldbach's problem*, preprint.
- [IK04] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Kad08] H. Kadiri, *Short effective intervals containing primes in arithmetic progressions and the seven cubes problem*, Math. Comp. 77 (2008), no. 263, 1733-1748.
- [Kan95] L. Kaniecki, *On Šnirelman's constant under the Riemann hypothesis*, Acta Arith. 72 (1995), no. 4, 361-374.
- [Lav60] A. F. Lavrik, *On the twin prime hypothesis of the theory of primes by the method of I. M. Vinogradov*, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 700-702.
- [LT02a] M. Liu, T. Wang, *Distribution of zeros of Dirichlet L-functions and an explicit formula for $\psi(t, \chi)$* , Acta Arith. 102 (2002), no. 3, 261-293.
- [LT02b] M. Liu, T. Wang, *On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture*, Acta Arith. 105 (2002), no. 2, 133-175.
- [LRW86] J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV*, Math. Comp. 46 (1986), no. 174, 667-681.
- [LR65] J. E. van Lint, H. E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith., 11 (1965), 209-216.
- [McC84] K. McCurley, *Explicit estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions*, Math. Comp. 42 (1984), no. 165, 265-285.
- [Mon68] H. L. Montgomery, *A note on the large sieve*, J. London Math. Soc. 43 (1968), 93-98.
- [Mon71] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*. Lecture Notes in Mathematics (Berlin), 227 (1971), 178pp.
- [Mon78] H. Montgomery, *The analytic principle of the large sieve*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 4, 547-567.
- [MV73] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *The large sieve*, Mathematika 20 (1973), 119-134.
- [Sil] T. Oliveira e Silva, <http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html>
- [Pla11] D. Platt, *Computing degree 1 L-functions rigorously*, Ph.D. Thesis, University of Bristol, 2011.
- [Pla] D. Platt, *Computing $\pi(x)$ analytically*, preprint.
- [Ram95] O. Ramaré, *On Šnirelman's constant*, Ann. Scu. Norm. Pisa 22 (1995), 645-706.
- [Ram07] O. Ramaré, *Eigenvalues in the large sieve inequality*, Funct. Approximatio, Comment. Math., 37 (2007), 7-35.

- [Ram10] O. Ramaré, *On Bombieri's asymptotic sieve*, J. Number Theory 130 (2010), no. 5, 1155-1189.
- [RR01] O. Ramaré, I. M. Ruzsa, *Additive properties of dense subsets of sifted sequences*, J. Théorie N. Bordeaux, 13 (2001), 559-581.
- [RR96] O. Ramaré, R. Rumely, *Primes in arithmetic progressions*, Math. Comp. 65 (1996), no. 213, 397-425.
- [RS03] O. Ramaré, Y. Saouter, *Short effective intervals containing primes*, J. Number Theory 98 (2003), no. 1, 10-33.
- [Ric00] J. Richstein, *Verifying the Goldbach conjecture up to 4×10^{14}* , Mathematics of Computation 70 (2000), 1745-1749.
- [Ros41] J.B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. 63 (1941) 211-232.
- [RS62] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Ill. J. Math. 6 (1962), 64-94.
- [RS75] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$* , Collection of articles dedicated to Derrick Henry Lehmer on the occasion of his seventieth birthday. Math. Comp. 29 (1975), 243-269.
- [Sie76] H. Siebert, *Montgomery's weighted sieve for dimension two*, Monatshefte für Mathematik 82 (1976), 327-336.
- [Vau77] R. C. Vaughan, *Sommes trigonométriques sur les nombres premiers*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser A. (1977), 981-983.
- [Vin37] I. M. Vinogradov, *Representation of an odd number as a sum of three primes*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS 15 (1937), 191-294.
- [Vin54] I. M. Vinogradov, *The Method of Trigonometric Sums in Number Theory*, Interscience Publ. (London, 1954).
- [War27] D. R. Ward, *Some series involving Euler's function*, London Math. Soc, 2 (1927), 210-214.
- [Wed03] S. Wedeniwski, *ZetaGrid - Computational verification of the Riemann Hypothesis*, Conference in Number Theory in Honour of Professor H.C. Williams, Banff, Alberta, Canada, May 2003.

UCLA DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LOS ANGELES, CA 90095-1596.