

La conjecture de Baum-Connes : un cours concis

Alain Valette¹

Résumé

Ce sont les notes légèrement remaniées d'un cours de 10 heures que j'ai donné à l'Institut Henri Poincaré en janvier-février 2025 dans le cadre du semestre thématique *Théorie des représentations et géométrie non commutative*.

1 Introduction/Préambule

La conjecture de Baum-Connes (c'est-à-dire la conjecture 2.1 ci-dessous) peut être vue comme une version équivariante par rapport à un groupe du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Son importance provient donc du fait que, comme Atiyah-Singer, elle relie deux domaines des mathématiques : la topologie et l'analyse. De plus, depuis son apparition en 1982², la conjecture de Baum-Connes a engendré beaucoup de mathématiques intéressantes !

Sur une note très personnelle, Baum-Connes me fascine depuis environ 45 ans, et des aspects de Baum-Connes ont été responsables de la majeure partie de ma trajectoire mathématique : de Baum-Connes à la K-moyennabilité, de la K-moyennabilité à la propriété (T) et à la propriété de Haagerup, de la propriété de Haagerup aux complexes cubiques $CAT(0)$, de la propriété (T) aux graphes expanseurs, des graphes expanseurs aux plongements dans les espaces de Hilbert et des espaces de Banach plus généraux.

C'est dire que j'ai accepté avec un immense plaisir, lorsque Pierre Clare m'a approché à l'automne 2024 avec l'idée de donner un cours d'introduction de 10 heures sur Baum-Connes au début du semestre IHP *Théorie des représentations et géométrie non commutative*. Je remercie les organisateurs du programme, Alexandre Afgoustidis, Anne-Marie Aubert, Pierre Clare, Jan Frahm, Angela Pasquale et Haluk Sengün, de m'avoir donné cette opportunité. Des remerciements particuliers sont dus à Pierre Clare qui m'a accompagné tout au long de la production de ce jeu de notes. Merci également au personnel de l'Institut Henri Poincaré, qui a rendu ces 2 semaines à Paris des plus agréables. Le cours a été un plaisir à enseigner, également en raison de l'attitude positive de l'auditoire, qui a posé de nombreuses questions excellentes. Espérons que ce jeu de notes conserve une partie de l'atmosphère informelle des cours. Comme le cours a été filmé, le lecteur peut aussi se référer aux vidéos disponibles sur

<https://www.carmin.tv/en/collections/2025-t1-representation-theory-and-noncommutative-geometry>.

1. L'auteur remercie l'Institut Henri Poincaré (UAR 839 CNRS-Sorbonne Université) et le LabEx CARMIN (ANR-10-LABX-59-01) pour leur soutien.

Référence : article arXiv <https://arxiv.com/pdf/2610.01802.pdf>

Traduction : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

2. Bien que publié en 2000, l'article [BC00] a circulé dès 1982 comme prépublication de l'IHES.

Une chose dont je n'étais pas certain avant le cours était le temps nécessaire pour expliquer les acteurs de la Conjecture 2.1, à savoir les deux membres de la conjecture plus l'application d'assemblage. Cela m'a pris 6 heures, correspondant aux sections 2 à 7 de ces notes. Les 3 heures suivantes ont été consacrées à la méthode de Dirac-dual Dirac et à l'approche récente de Nishikawa (sections 8 et 9). Enfin la dernière heure (correspondant à la section 10) a été consacrée à quelques exemples de groupes discrets pour lesquels l'application d'assemblage peut être décrite explicitement. En fait, le lecteur remarquera, tout au long des notes, un parti pris certain en faveur des groupes discrets, dû à mon goût pour la théorie géométrique des groupes.

Je ne peux terminer cette Introduction sans remercier Maria-Paula Gomez Aparicio et Pierre Julg, avec qui j'ai eu le plaisir de co-signer le long article de synthèse [GJV19], entièrement consacré à la conjecture de Baum-Connes et à ses descendants mathématiques. Il est clair que, sans cette formation, enseigner le cours à l'IHP aurait été bien plus difficile. Enfin, merci à Claudia Stadlmayr pour la production des figures en Tikz, et à un rapporteur extrêmement aimable pour une lecture attentive et un certain nombre de commentaires constructifs.

2 Qu'est-ce que la conjecture de Baum-Connes ?

Références pour cette section : [BC00, BCH94].

Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable (par exemple un groupe discret dénombrable, ou un groupe de Lie connexe).

Conjecture 2.1. (*la conjecture de Baum-Connes*) Pour $i = 0, 1$, l'application d'assemblage

$$\mu_G : K_i^G(\underline{EG}) \rightarrow K_i(C_r^*(G)) \quad (1)$$

est un isomorphisme.

Une bonne partie de ces notes sera consacrée à définir les objets de (1). Le membre de gauche $K_i^G(\underline{EG})$ est appelé la *K-homologie équivariante de l'espace classifiant des actions propres* de G , et est appelé le *côté géométrique* ou *topologique*. Le membre de droite $K_i(C_r^*(G))$ est appelé la *K-théorie analytique de la C^* -algèbre réduite* de G , et est appelé le *côté analytique*. L'application μ_G est aussi appelée l'*application indice*, ou l'*application de Baum-Connes*.

Plusieurs remarques s'imposent :

- $K_i^G(\underline{EG})$ et $K_i(C_r^*(G))$ sont des groupes abéliens, et μ_G est un homomorphisme de groupes.
- Il y a une conjecture par groupe G - le jeu consiste à la démontrer soit pour un groupe donné, soit pour une classe de groupes.
- En septembre 2026, aucun contre-exemple n'est connu.
- L'injectivité de μ_G est connue pour de nombreux groupes (par exemple les groupes linéaires dénombrables, voir [GHW05]).
- La conjecture 2.1 a été démontrée pour plusieurs classes importantes de groupes (par exemple les groupes de Lie connexes [CEN03], les groupes moyennables [HK01], les groupes hyperboliques de Gromov [La02]).
- La surjectivité de μ_G N'EST PAS connue pour $G = SL_3(\mathbb{Z})$.

- Ni l'injectivité ni la surjectivité ne sont connues pour le groupe de Burnside libre $B(d, n)$ (lorsqu'il est infini).
- La conjecture 2.1 a des applications intéressantes (deux d'entre elles seront discutées à la section 4 ci-dessous).

3 Le membre de droite de la Conjecture 2.1

3.1 C^* -algèbres de groupes réduites

Référence pour cette sous-section : [Dix96]

Rappelons que, pour f, g des fonctions sur G , le produit de convolution $f * g$ est défini par

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s) dt,$$

où $s \in G$ et dt désigne la mesure de Haar à gauche sur G . L'espace de Banach $L^1(G)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. La *représentation régulière gauche* λ_G de $L^1(G)$ sur $L^2(G)$ est la représentation par convolution à gauche :

$$\lambda_G(f)\xi = f * \xi \quad (f \in L^1(G), \xi \in L^2(G)).$$

Définition 3.1. La C^* -algèbre réduite $C_r^*(G)$ est l'adhérence en norme de $\lambda_G(L^1(G))$ dans les opérateurs bornés sur $L^2(G)$.

Exemple 3.2. Si G est abélien de dual de Pontryagin $\hat{G} := \text{Hom}(G, S^1)$, alors par transformée de Fourier $C_r^*(G)$ s'identifie à $C_0(\hat{G})$, les fonctions continues s'annulant à l'infini sur $\hat{G}$.

3.2 K-théorie pour les C^* -algèbres

Références pour cette sous-section : [Bl98, Ka78]

Notre but dans cette section est, pour une C^* -algèbre A , de définir des groupes abéliens $K_i(A)$ ($i = 0, 1$), covariants en A . Nous commençons par K_1 car la structure de groupe y est plus immédiatement apparente.

3.2.1 $K_1(A)$

Supposons d'abord que la C^* -algèbre A soit unifère. Soit $M_n(A)$ la C^* -algèbre des matrices n par n à coefficients dans A , et soit $U_n(A)$ son groupe unitaire, muni de la topologie de la norme. Notons $U_n(A)^0$ la composante connexe de l'identité de $U_n(A)$ - de sorte que $U_n(A)^0$ est un sous-groupe normal ouvert. Le plongement $U_n(A) \rightarrow U_{n+1}(A) : T \mapsto \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ induit un homomorphisme $U_n(A)/U_n(A)^0 \rightarrow U_{n+1}(A)/U_{n+1}(A)^0$ et nous définissons :

Définition 3.3. Pour A une C^* -algèbre unifère :

$$K_1(A) := \varinjlim U_n(A)/U_n(A)^0.$$

Par décomposition polaire, $U_n(A)$ est un rétracte par déformation du groupe inversible $GL_n(A)$, donc une définition équivalente est :

$$K_1(A) = \varinjlim GL_n(A)/GL_n(A)^0.$$

Observons que $S \in GL_m(A)$, $T \in GL_n(A)$ définissent le même élément dans $K_1(A)$ si et seulement si S, T sont *stablement homotopes*, c'est-à-dire s'il existe $N \geq \max\{m, n\}$ suffisamment grand tel que S, T soient homotopes dans $GL_N(A)$.

Exemple 3.4. 1. Pour $A = \mathbb{C}$, le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$ est connexe, donc $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

2. Pour $A = C(S^1)$, les fonctions continues sur le cercle, le nombre d'enroulement

$$w : GL_1(C(S^1)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

induit un isomorphisme $GL_1(C(S^1))/GL_1(C(S^1))^0 \simeq \mathbb{Z}$.

En composant avec le déterminant, nous avons que w_{odet} induit un isomorphisme $GL_n(C(S^1))/GL_n(C(S^1))^0 \simeq \mathbb{Z}$. Finalement $K_1(C(S^1)) = \mathbb{Z}$.

Définition 3.5. Pour A une C^* -algèbre non unifère : $K_1(A) := K_1(A^+)$ où A^+ désigne l'unitarisation de A .

Proposition 3.6. Le groupe $K_1(A)$ est abélien.

Preuve: On peut supposer A unifère. Pour $S \in U_n(A)$ formons $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \in U_{2n}(A)$. Alors

$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ est homotope à $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ dans $U_{2n}(A)$, car

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi t/2) & -\sin(\pi t/2) \\ \sin(\pi t/2) & \cos(\pi t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi t/2) & \sin(\pi t/2) \\ -\sin(\pi t/2) & \cos(\pi t/2) \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

est une homotopie entre elles.

Compte tenu de cela, pour $S, T \in U_n(A)$, nous avons que $\begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \in U_{2n}(A)$ est homotope à $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$, un produit de deux matrices qui commutent. Ceci montre que $K_1(A)$ est abélien. $\square$

3.2.2 $K_0(A)$

Une projection p dans une C^* -algèbre est un élément idempotent, auto-adjoint ($p = p^2 = p^*$). Notons $Proj(A)$ l'ensemble des projections dans la C^* -algèbre A . Nous dirons que deux projections p, q dans $M_n(A)$ sont *équivalentes* ($p \sim q$) s'il existe $x \in M_n(A)$ tel que $p = x^*x$ et $q = xx^*$.

Exercice 3.7. Vérifier que, si les projections $p, q \in M_n(A)$ sont unitairement conjuguées, alors $p \sim q$.

L'application $M_n(A) \rightarrow M_{n+1}(A) : T \mapsto \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un plongement (non unifié dans le cas où A a une unité!). Nous posons

$$M_\infty(A) := \varinjlim M_n(A).$$

L'ensemble $\text{Proj}(M_\infty(A))$ possède une addition donnée par la somme directe : pour $p \in M_m(A)$, $q \in M_n(A)$, alors $p \oplus q := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in M_{m+n}(A)$. Comme $p \oplus q$ est unitairement conjuguée à $q \oplus p$, nous voyons que $\text{Proj}(M_\infty(A))/\sim$ devient un monoïde commutatif.

Définition 3.8. Pour A une C^* -algèbre unifiée, $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck du monoïde commutatif $\text{Proj}(M_\infty(A))/\sim$.

Exemple 3.9. 1. Pour $A = \mathbb{C}$, une projection dans $M_\infty(\mathbb{C})$ est caractérisée à équivalence près par son rang, donc $\text{Proj}(M_\infty(\mathbb{C}))/\sim$ est isomorphe à $\mathbb{N}, +$. Donc $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

2. Si X est un espace compact³, et $A = C(X)$, la C^* -algèbre des fonctions continues sur X , alors par le théorème de Serre-Swan $K_0(C(X))$ s'identifie à $K^0(X)$, le groupe de Grothendieck du monoïde commutatif des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes sur X . En particulier, si X est contractile tout fibré vectoriel sur X est trivial et $K_0(C(X)) = \mathbb{Z}$.

3. Considérons $X = S^1$: bien sûr S^1 n'est pas contractile, cependant tout fibré vectoriel complexe sur S^1 est trivial⁴. En effet, soit E un fibré vectoriel complexe sur S^1 , disons de rang $n \geq 1$. Voyons S^1 comme le quotient de $[0, 1]$ en identifiant les extrémités, soit $p : [0, 1] \rightarrow S^1$ l'application quotient. Comme $[0, 1]$ est contractile, le fibré vectoriel tiré en arrière p^*E est trivial. Donc E est décrit par l'identification de la fibre en 0 avec la fibre en 1, c'est-à-dire par un certain élément $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Mais par connexité de $GL_n(\mathbb{C})$ nous pouvons homotoper A vers l'identité, rendant E isomorphe au fibré trivial. En conséquence $K_0(C(S^1)) = \mathbb{Z}$.

Remarque 3.10. Supposons que, au lieu de traiter avec des projections pour définir $K_0(A)$, nous relâchions la condition d'être auto-adjoint, et travaillions simplement avec des éléments idempotents. Soit donc $\text{Idem}(M_\infty(A))$ l'ensemble des idempotents dans $M_\infty(A)$; disons que les idempotents $e, f \in M_n(A)$ sont équivalents ($e \sim' f$) s'il existe $u, v \in M_n(A)$ tels que $e = vu$, $f = uv$. Nous affirmons que les monoïdes $\text{Proj}(M_\infty(A))/\sim$ et $\text{Idem}(M_\infty(A))/\sim'$ sont en fait les mêmes. La raison est que tout idempotent dans une C^* -algèbre unifiée est équivalent à une projection. Voici une courte preuve (tirée de [FM79]) : si $e \in A$ est idempotent, définissons un élément positif :

$$z = 1 + (e^* - e)^*(e'' - e) = 1 - (e^* - e)^2 = 1 - e - e^* + ee^* + e^*e.$$

Alors z est inversible et $ze = ez = ee^*e$. Donc z et z^{-1} commutent avec e et e^* . Posons alors

$$p := ee^*z^{-1}.$$

Alors $p \in \text{Proj}(A)$ (vérifier que $p = p^2$; en fait p est la projection support de e^*). Enfin $ep = p$ trivialement tandis que $pe = z^{-1}ee^*e = z^{-1}ze = e$, donc $e \sim' p$. Ainsi l'utilisation d'idempotents plutôt que de projections définit le même groupe $K_0(A)$. Cette remarque sera utile dans la Proposition 4.7.

3. Pour nous, être compact implique être séparé.

4. Ce ne serait pas vrai pour les fibrés vectoriels réels sur S^1 , comme le montre le ruban de Möbius ouvert.

Si A est une C^* -algèbre non unifère, soit $\epsilon : A^+ \rightarrow \mathbb{C}$ le morphisme canonique de l'unitarisation vers les nombres complexes.

Définition 3.11. *Pour A une C^* -algèbre non unifère, définissons*

$$K_0(A) := \ker[\epsilon_* : K_0(A^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}].$$

3.2.3 Propriétés des K-groupes

- (Fonctorialité) Pour $i = 0, 1$, l'assignation $A \rightarrow K_i(A)$ est un foncteur covariant, homotopiquement invariant, des C^* -algèbres vers les groupes abéliens.
- (Stabilité) Soit $\mathcal{K}$ l'algèbre des opérateurs compacts sur ℓ^2 . Si $p \in \mathcal{K}$ est une projection de rang 1, alors pour $i = 0, 1$ l'homomorphisme

$$A \rightarrow A \otimes \mathcal{K} : a \mapsto a \otimes p$$

induit un isomorphisme sur K_i .

- (Périodicité de Bott) Pour $i = 0, 1$, le groupe $K_i(A)$ est naturellement isomorphe à $K_{1-i}(A \otimes C_0(\mathbb{R}))$.
- (Suite exacte à 6 termes) Soit I un idéal bilatère fermé dans A . Alors il existe une suite exacte naturelle à 6 termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \rightarrow & K_0(A) & \rightarrow & K_0(A/I) \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ K_1(A/I) & \leftarrow & K_1(A) & \leftarrow & K_1(I) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont induites par l'inclusion $I \hookrightarrow A$ et l'application quotient $A \rightarrow A/I$.

4 Pourquoi la conjecture de Baum-Connes nous intéresse-t-elle ?

Dans cette section, G désignera un groupe discret dénombrable.

4.1 La conjecture de Kaplansky-Kadison

Conjecture 4.1. *(Kaplansky-Kadison, vers 1954) Si G est sans torsion, alors les seuls idempotents dans $C_r^*(G)$ sont 0 et 1.*

Exemple 4.2. *Supposons G abélien. Alors $\hat{G}$ est un groupe abélien compact, et $C_r^*(G) = C(\hat{G})$ (voir l'Exemple 3.2). Donc $C_r^*(G)$ n'a pas d'idempotent non trivial si et seulement si $\hat{G}$ est connexe ; par dualité de Pontryagin, cela se produit si et seulement si G est sans torsion.*

Exemple 4.3. *Supposons que G ait de la torsion, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ d'ordre fini $N \geq 2$. Alors $p_g := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_G(g^k)$ est une projection non triviale dans $C_r^*(G)$. Donc l'hypothèse de la Conjecture 4.1 est nécessaire.*

Définition 4.4. Soit A une C^* -algèbre. Une **trace** sur A est une fonctionnelle linéaire continue τ sur A telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in A$. Une trace τ est **positive** si $\tau(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$. Une trace positive τ est **fidèle** si $\tau(a^*a) = 0$ implique $a = 0$. Si A est unifiée, une trace τ est **normalisée** si $\tau(1_A) = 1$.

Exemple 4.5. Sur $C_r^*(G)$, nous avons la **trace canonique** $\tau_G(a) := \langle a(\delta_e) | \delta_e \rangle$ pour $a \in C_r^*(G)$. Elle est normalisée (clair), positive ($\tau_G(a^*a) = \|a(\delta_e)\|_2^2 \geq 0$), et fidèle. Pour vérifier cette dernière, soit ρ_G la représentation régulière droite de G sur $\ell^2(G)$, et observons que $\rho(G)$ commute avec $C_r^*(G)$. Alors, si $a \in C_r^*(G)$ est tel que $a(\delta_e) = 0$, nous avons pour tout $g \in G$:

$$0 = \rho(g^{-1})a(\delta_e) = a\rho(g^{-1})(\delta_e) = a(\delta_g);$$

donc a s'annule sur une base de $\ell^2(G)$, donc $a = 0$.

Exercice 4.6. Vérifier que τ_G est bien une trace sur $C_r^*(G)$.

Proposition 4.7. Soit A une C^* -algèbre d'unité 1_A , et τ une trace sur A .

1. Il existe un homomorphisme $\tau_* : K_0(A) \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\tau_*[1_A] = \tau(1_A)$.
2. Si τ est positive, alors $\tau_*(K_0(A)) \subset \mathbb{R}$.
3. Si τ est positive, fidèle, normalisée, et $\tau_*(K_0(A)) = \mathbb{Z}$, alors A n'a pas d'idempotent non trivial.

Preuve:

1. Définissons

$$Tr : M_n(A) \rightarrow A : a \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

L'application Tr s'étend à $M_\infty(A)$; observons que $\tau \circ Tr$ est une trace sur $M_\infty(A)$. Donc, pour $p \in Proj(M_\infty(A))$ nous pouvons définir $\tau_*[p] = (\tau \circ Tr)(p) \in \mathbb{C}$. Il est facile de vérifier que cette application est bien définie et additive sur $Proj(M_\infty(A))/\sim$, donc s'étend à l'homomorphisme souhaité τ_* .

2. Si τ est positive, alors pour $p \in Proj(M_\infty(A))$ nous avons $\tau_*[p] = (\tau \circ Tr)(p) = (\tau \circ Tr)(p^*p) \geq 0$.
3. Supposons que τ soit positive, fidèle, normalisée, avec $\tau_*(K_0(A)) = \mathbb{Z}$. Soit e un idempotent dans A . Par la Remarque 3.10, il existe $p \in Proj(A)$ tel que $e \sim' p$; observons que $\tau(e) = \tau(p)$. Il suffit donc de prouver que soit $p = 0$, soit $p = 1_A$. Or $\tau(p) = \tau(p^*p) \geq 0$, et de même pour $1 - \tau(p) = \tau(1_A - p)$. Donc $0 \leq \tau(p) \leq 1$. Comme $\tau(p)$ est un entier par hypothèse, nous avons $\tau(p) \in \{0, 1\}$. Si $0 = \tau(p) = \tau(p^*p)$, alors $p = 0$ par fidélité. Si $\tau(p) = 1$, remplaçons p par $1_A - p$ pour obtenir de même $p = 1_A$. $\square$

Conjecture 4.8. (Intégralité de la trace) Si G est sans torsion, alors

$$(\tau_G)_*(K_0(C_r^*(G))) = \mathbb{Z}.$$

Notons que, si $g \in G$ est d'ordre $N \geq 2$, alors $\tau_G(p_g) = \frac{1}{N}$ par l'Exemple 4.3. Donc l'hypothèse est aussi nécessaire dans la Conjecture 4.8. Compte tenu de la Proposition 4.7, la Conjecture 4.8 implique la Conjecture 4.1.

Proposition 4.9. *Si G est sans torsion, alors*

$$(\tau_G)_*(\mu_G(K_0^G(\underline{EG}))) = \mathbb{Z}.$$

De la Proposition 4.9 nous déduisons immédiatement :

Corollaire 4.10. *Si G est sans torsion et μ_G est surjective, alors la Conjecture 4.8 est vérifiée. En particulier, la Conjecture 2.1 implique la Conjecture 4.8.* $\square$

Esquisse de preuve de la Proposition 4.9 : Cette preuve permettra d'avoir une première intuition du membre de gauche de la Conjecture 2.1. Soit BG un espace classifiant pour G , c'est-à-dire un CW-complexe de groupe fondamental G tel que le revêtement universel $EG := \widetilde{BG}$ soit contractile⁵ ; un tel espace BG existe toujours et est unique à homotopie près ; voir aussi l'Exemple 5.7 ci-dessous. Comme G est sans torsion, nous pouvons prendre $\underline{EG} = EG$, et comme G agit librement sur EG nous avons

$$K_i^G(\underline{EG}) = K_i(BG)$$

pour $i = 0, 1$. Maintenant, comme nous le verrons dans la Définition 6.9 :

$$K_i(BG) = \lim_{X \subset BG} KK_i(C(X), \mathbb{C}),$$

où la limite est prise sur l'ensemble dirigé des sous-ensembles compacts X de BG , et KK_i désigne la K -théorie bivariante de Kasparov (voir la sous-section 7.1) ; pour A une C^* -algèbre, $K_i(A, \mathbb{C})$ est la K -homologie analytique de A , voir [HR00].

Par un résultat de P. Baum et R.G. Douglas [BD82], un élément $x \in KK_0(C(X), \mathbb{C})$ peut être décrit comme un quadruple (M, E, D, f) tel que

- M est une variété lisse fermée (c'est-à-dire compacte sans bord).
- $E = E^+ \oplus E^-$ est un fibré vectoriel lisse sur M .
- $D : C^\infty(M, E^\pm) \rightarrow C^\infty(M, E^\mp)$ est un opérateur différentiel elliptique agissant sur les sections lisses de $E^\pm$.
- $f : M \rightarrow X$ est une application continue.

À ce stade, nous observons que le triple (M, E, D) définit un élément $y \in KK_0(C(M), \mathbb{C})$ tel que $f_*(y) = x$. L'ellipticité de D garantit que les espaces $\text{Ker}(D)$ et $\text{Coker}(D)$ sont de dimension finie, donc nous avons l'indice de Fredholm (voir la Définition 6.1 ci-dessous) :

$$\text{Ind}(D) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(D) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(D)$$

qui définit l'application indice $\text{Ind} : KK_0(C(M), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Formons maintenant le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \rightarrow & EG \\ p \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & BG \end{array}$$

5. Les topologues disent aussi que BG est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$, ou un espace asphérique de groupe fondamental G .

de sorte que $\widetilde{M}$ soit une G -variété propre. Soit $\widetilde{E} := p^*E$ le fibré vectoriel tiré en arrière, et $\widetilde{D}$ le relevé de D , de sorte que $\widetilde{D}$ soit un opérateur différentiel elliptique G -invariant agissant sur les sections de $\widetilde{E}$. Comme $\widetilde{M}$ est non compact dès que G est infini, les théorèmes d'ellipticité classiques échouent, et $Ker(\widetilde{D})$, $Coker(\widetilde{D})$ sont généralement de dimension infinie. Cependant $Ker(\widetilde{D})$, $Coker(\widetilde{D})$ sont des modules sur $C_r^*(G)$ et c'est un résultat de A. Connes et H. Moscovici [CM82] que la différence formelle de ces modules fournit un élément bien défini $Ind_G(\widetilde{D})$, appelé le G -indice de $\widetilde{D}$, dans la K-théorie de la C^* -algèbre réduite⁶. De plus

$$Ind_G(\widetilde{D}) = \mu_G(x).$$

Par le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah (voir [At76]) :

$$(\tau_G)_*(Ind_G(\widetilde{D})) = Ind(D),$$

ce qui revient à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} KK_0(C(M), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_G} & K_0(C_r^*(G)) \\ Ind \downarrow & & \downarrow (\tau_G)_* \\ \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Le résultat est maintenant clair. □

4.2 Une conjecture de type groupe de Whitehead

Rappelons qu'un groupe ayant un espace classifiant de dimension finie est nécessairement sans torsion.

Conjecture 4.11. *Supposons que G admette un modèle de dimension 2 pour BG . Alors tout $T \in GL_n(A)$ inversible est stablement homotope à une matrice diagonale N par N*

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

pour un certain $N \geq n$ et un certain $g \in G$.

Cette conjecture est à nouveau une conséquence de la surjectivité dans la Conjecture 2.1.

Proposition 4.12. *Supposons que G admette un BG de dimension 2, et que μ_G soit surjective. Alors la Conjecture 4.11 est vérifiée.*

6. Bien que ce ne soit pas vrai, on peut moralement penser que $Ker(\widetilde{D})$, $Coker(\widetilde{D})$ sont des modules projectifs de type fini sur $C_r^*(G)$.

Esquisse de preuve : Comme G est discret, l'application canonique

$$G \rightarrow C_r^*(G) : g \mapsto \lambda_G(g)$$

plonge G dans le groupe unitaire $U_1(C_r^*(G))$. En composant avec l'application canonique $U_1(C_r^*(G)) \rightarrow K_1(C_r^*(G))$, et en utilisant la commutativité de K_1 (Proposition 3.6), nous obtenons l'application canonique $\iota : G/[G, G] \rightarrow K_1(C_r^*(G))$.

Comme G est sans torsion, comme dans la preuve de la Proposition 4.9, le membre de gauche de la Conjecture 2.1 peut être remplacé par $K_i(BG)$. Comme BG est de dimension 2, nous avons un caractère de Chern $Ch_* : K_1(BG) \rightarrow H_1(BG, \mathbb{Z})$ qui est un isomorphisme, où H_1 désigne l'homologie cellulaire usuelle. De plus le diagramme suivant est commutatif (voir par exemple [Ma02]) :

$$\begin{array}{ccc} K_1(BG) & \xrightarrow{\mu_G} & K_1(C_r^*(G)) \\ Ch_* \downarrow & & \uparrow \iota \\ H_1(BG, \mathbb{Z}) & = & G/[G, G] \end{array}$$

Comme Ch_* est un isomorphisme et μ_G est supposée surjective, l'application ι est surjective, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 4.13. *Le groupe de Whitehead classique d'un groupe discret G est défini par $Wh(G) := K_1^{alg}(\mathbb{Z}G)/\langle \pm g : g \in G \rangle$, où $K_1^{alg}(\mathbb{Z}G)$ désigne la K -théorie algébrique de l'anneau de groupe intègre de G . Définissons de manière similaire le groupe de Whitehead analytique de G par $Wh^{an}(G) := K_1(C_r^*(G))/Im(\iota)$; alors la Conjecture 4.11 est équivalente à l'annulation de $Wh^{an}(G)$ chaque fois que G admet un BG de dimension 2.*

5 Actions propres

Référence pour cette section : [BCH94].

Nous revenons ici à notre hypothèse standard sur G : un groupe localement compact, à base dénombrable.

5.1 Définition et exemples

Soit X un espace métrisable. Une *action* $G \curvearrowright X$ de G sur X est un homomorphisme de G vers le groupe des homéomorphismes de X tel que l'application d'action $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ soit continue.

Définition 5.1. *Une action $G \curvearrowright X$ est **propre** si pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage ouvert G -invariant U de x , un sous-groupe compact H de G et une application continue G -équivariante $f_x : U \rightarrow G/H$.*

Donc une action propre est une action localement modelée sur un espace homogène G/H avec isotropie compacte H .

- Exemple 5.2.** 1. Toute action d'un groupe compact G sur un espace quelconque X , est propre : prendre $U = X$, $H = G$ et f_x l'application constante vers l'espace à un point.
2. Soit D_∞ le groupe diédral infini, c'est-à-dire le groupe donné par la présentation

$$D_\infty = \langle s, t | s^2 = t^2 = e \rangle$$

(de sorte que D_∞ est le produit libre de deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Soit D_∞ agissant sur la droite réelle en posant $s(x) = -x$ (symétrie par rapport à 0) et $t(x) = 2 - x$ (symétrie par rapport à 1). Il y a maintenant trois cas :

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, nous pouvons prendre $U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $H = \{e\}$; alors, en notant U_x la composante connexe de x dans U , toute composante connexe de U est de la forme gU_x pour un unique $g \in D_\infty$. Donc nous pouvons prendre comme $f_x : U \rightarrow D_\infty$ l'application qui envoie gU_x sur g .
- Pour $x \in 2\mathbb{Z}$, supposons d'abord $x = 0$. Prenons alors $U = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$ et $H = \langle s \rangle$. Notons U_{2n} la composante connexe de U passant par $2n$; observons qu'il y a exactement deux éléments $g \in D_\infty$ tels que $gU_0 = U_{2n}$, à savoir $g = (ts)^n$ et $g = (ts)^n s$. Ceci définit l'application $f_0 : U \rightarrow D_\infty / \langle s \rangle$. Pour un $x \in 2\mathbb{Z}$ général, il suffit d'utiliser la conjugaison.
- Pour $x \in 2\mathbb{Z} + 1$, supposons d'abord $x = 1$, posons $U = \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{Z}$ et $H = \langle t \rangle$, et procédons de manière analogue.

3. Pour G discret, considérons un revêtement $\begin{matrix} X \\ \downarrow G \\ Y \end{matrix}$ de groupe G : la trivialité locale permet d'écrire X localement comme $V \times G$, où V est un ouvert de la base Y . Ici l'action $G \curvearrowright X$ est à la fois propre et libre.
4. Si X est un CW-complexe et $G \curvearrowright X$ est cellulaire, l'action est propre si et seulement si les stabilisateurs des sommets de X sont compacts.

5.2 L'espace classifiant des actions propres

Définition 5.3. [BCH94] Un exemple universel pour les G -actions propres est un G -espace propre $\underline{EG}$ tel que pour tout G -espace propre X il existe une application continue G -équivariante $f : X \rightarrow \underline{EG}$, et deux telles applications sont G -équivariamment homotopes.

En langage plus catégorique : $\underline{EG}$ est un objet final dans la catégorie des G -espaces propres et des applications G -équivariantes prises à G -homotopie équivariante près.

Si $\underline{EG}$, $(\underline{EG})'$ sont deux exemples universels pour les G -actions propres, soient $f : (\underline{EG})' \rightarrow \underline{EG}$ et $f' : \underline{EG} \rightarrow (\underline{EG})'$ les applications G -équivariantes données par la propriété universelle. Par unicité à homotopie près, $f \circ f'$ est homotope à l'identité de $\underline{EG}$, et $f' \circ f$ est homotope à l'identité de $(\underline{EG})'$. Donc $\underline{EG}$ est unique à G -homotopie équivariante près. Par un léger abus de terminologie, nous appelons $\underline{EG}$ "le" espace classifiant des actions propres de G .

Une caractérisation intrinsèque des exemples universels est donnée par le résultat suivant.

Proposition 5.4. Un G -espace propre Y est un exemple universel pour les G -actions propres si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout sous-groupe compact H de G , l'ensemble des points fixes Y^H est non vide.
2. Munissons $Y \times Y$ de l'action diagonale de G ; soient $p, p' : Y \times Y \rightarrow Y$ les deux projections. Alors p, p' sont G -équivairement homotopes.

Preuve de la nécessité : Si Y est un exemple universel, alors :

1. Si H est un sous-groupe compact, alors G/H est un G -espace propre, donc il existe une application G -équivariante $f : G/H \rightarrow Y$. Comme la classe eH est H -fixe dans G/H , nous avons $f(eH) \in Y^H$.
2. L'action diagonale de G sur $Y \times Y$ est propre. Comme les applications p, p' sont G -équivariantes, par la propriété universelle de Y elles doivent être G -équivairement homotopes. $\square$

Corollaire 5.5. *Si H est un sous-groupe fermé quelconque de G , alors $\underline{E}G$ est un exemple universel pour les H -actions propres.*

Proposition 5.6. *Tout groupe localement compact, à base dénombrable G admet un exemple universel pour les G -actions propres.*

Preuve lorsque G est discret, dénombrable : Définissons $\underline{E}G$ comme l'ensemble des mesures de probabilité à support fini sur G , avec la distance

$$d(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_\infty = \sup_{g \in G} |\mu(g) - \nu(g)|,$$

et l'action de G par translations à gauche. Il est clair qu'il s'agit d'un G -espace propre. Vérifions qu'il satisfait les deux conditions de la Proposition 5.4.

1. Si H est un sous-groupe fini de G , alors la probabilité uniforme sur H est H -fixe.
2. Pour $0 \leq t \leq 1$, l'application $(\mu, \nu) \mapsto (1 - t)\mu + t\nu$ fournit une homotopie G -équivariante entre p (en $t = 0$) et p' (en $t = 1$). $\square$

Exemple 5.7. 1. Si G est compact, alors on peut prendre $\underline{E}G$ réduit à un point. Pour anticiper sur l'Exemple 7.9, dans ce cas $K_0^G(\underline{E}G) = R(G)$, le groupe additif de l'anneau des représentations de G (de manière équivalente, le groupe abélien libre sur le dual $\hat{G}$) ; et $K_1^G(\underline{E}G) = 0$.

2. Si G est un groupe de Lie connexe, soit K un sous-groupe compact maximal de G (rappelons que K est unique à conjugaison près), nous pouvons prendre $\underline{E}G = G/K$. En particulier, si G est semi-simple de centre fini, G/K est l'espace symétrique riemannien associé à G .

3. Soit F un corps local non archimédien (par exemple $F = \mathbb{Q}_p$, les nombres p -adiques), et soit G un groupe algébrique semi-simple sur F (par exemple $G = SL_n(F)$). Alors nous pouvons prendre pour $\underline{E}G$ l'immeuble de Bruhat-Tits associé à G .

4. Soit G un groupe discret sans torsion, de sorte que toute action propre soit aussi libre. En notant EG un G -espace contractile libre⁷, nous pouvons prendre $\underline{E}G = EG$. En posant $BG := EG/G$, nous voyons que EG est le revêtement universel de BG , de sorte que BG est l'espace classifiant pour G . Alors $K_i^G(\underline{E}G) = K_i(BG)$ ($i = 0, 1$).

5. Soit G un groupe localement fini dénombrable, c'est-à-dire que G est une union croissante dénombrable de sous-groupes finis F_n , disons $G = \cup_{n \geq 0} F_n$. Alors $\underline{E}G$ peut être pris comme un arbre d'ensemble de sommets $\coprod_{n \geq 0} G/F_n$ et d'arêtes de la forme $\{gF_n, gF_{n+1}\}$, pour $g \in G$. Observons que cet arbre se fibrent sur $\mathbb{N}$.

7. Citant A. Connes : “ EG est un point sur lequel G agit librement !”

6 Le membre de gauche de la Conjecture 2.1

6.1 Motivation 1 : K-homologie vs. K-théorie

La K-théorie topologique est une théorie cohomologique sur les espaces. Pour un espace compact X , le groupe $K^0(X)$ est le groupe des différences formelles de classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes sur X , comme nous l'avons déjà vu dans l'Exemple 3.9 :

$$K^0(X) = \{[E] - [F] : E, F \text{ fibrés vectoriels sur } X\}.$$

Pour des raisons abstraites, à toute théorie cohomologique il correspond une homologie duale, définie par la dualité de Spanier-Whitehead. Le dual de la K-théorie est appelé la *K-homologie*.

Plus précisément, pour X un CW-complexe fini, on peut plonger X dans une sphère S^{2N} de dimension $2N$ pour $N \gg 0$, et on définit la K-homologie de X comme la K-théorie de $S^{2N} \setminus U$, où U est un voisinage tubulaire de X dans S^{2N} . Cependant cette définition n'est pas très satisfaisante, car il n'est pas clair qu'elle soit bien définie : en effet il faut vérifier que cette définition est indépendante de N et indépendante du choix du plongement ; de plus la fonctorialité n'est pas apparente. Par conséquent une définition plus intrinsèque est souhaitable.

6.2 Motivation 2 : $Ell(X)$ d'Atiyah

Atiyah [At70] a suggéré une construction directe de cycles en K-homologie.

6.2.1 Opérateurs de Fredholm

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (de dimension infinie, séparable) et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la C^* -algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$.

Définition 6.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un **opérateur de Fredholm** si l'image $Im(T)$ est fermée et les espaces $Ker(T)$ et $Coker(T) := \mathcal{H}/Im(T)$ sont de dimension finie. L'**indice** de T est alors défini par*

$$Ind(T) = \dim_{\mathbb{C}} Ker(T) - \dim_{\mathbb{C}} Coker(T).$$

De manière équivalente, un opérateur borné T est de Fredholm si T est inversible modulo les opérateurs compacts (théorème d'Atkinson). Si T est de Fredholm, alors $Coker(T)$ s'identifie à $Im(T)^{\perp} = Ker(T^*)$.

Notons $Fred(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm sur $\mathcal{H}$, muni de la topologie de la norme d'opérateur. Observons que, pour $S, T \in Fred(\mathcal{H})$, nous avons $S \oplus T \in Fred(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ et $Ind(S \oplus T) = Ind(S) + Ind(T)$. Pour un espace compact X , notons $[X, Fred(\mathcal{H})]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \rightarrow Fred(\mathcal{H})$. En composant la somme directe avec une identification quelconque $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}$, nous munissons $[X, Fred(\mathcal{H})]$ d'une structure de monoïde commutatif.

Théorème 6.2. (Atiyah) *Pour X compact, $K^0(X) \simeq [X, Fred(\mathcal{H})]$ en tant que monoïdes commutatifs.*

La preuve du Théorème 6.2 repose sur une idée simple : si $T : X \rightarrow \text{Fred}(\mathcal{H})$ est une application continue, il est tentant de considérer les deux champs d'espaces vectoriels de dimension finie $(\text{Ker}(T_x))_{x \in X}$, $(\text{Coker}(T_x))_{x \in X}$ et de prendre la différence formelle comme élément de $K^0(X)$. La difficulté est que ces deux champs d'espaces vectoriels ne sont pas nécessairement des fibrés vectoriels sur X (la trivialité locale peut échouer), donc un certain travail est nécessaire pour prouver que la différence formelle est bien définie comme élément de $K^0(X)$ (voir [At67]).

6.2.2 Opérateurs elliptiques et modules de Fredholm

Soit M une variété fermée, et soit P un opérateur différentiel elliptique, disons d'ordre m , agissant sur les sections d'un fibré vectoriel (éventuellement trivial) sur M . Introduisons les espaces de Sobolev H^s , consistant en les sections ayant des dérivées partielles de carré intégrable jusqu'à l'ordre m . Alors $P : H^s \rightarrow H^{s-m}$ est borné. Par ellipticité il admet une *paramétrique*, c'est-à-dire un inverse modulo les opérateurs d'ordre inférieur, et donc P est de Fredholm ; de plus son indice est indépendant de $s \geq m$.

Pour les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques d'ordre 0, nous pouvons prendre $s = 0$ et travailler simplement avec des espaces de Hilbert de sections de carré intégrable.

Exemple 6.3. Prenons $M = S^1$ et $P = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ agissant sur $L^2([0, 2\pi], \frac{dt}{2\pi})$. Dans la base trigonométrique $e_k(t) = e^{ikt}$ ($k \in \mathbb{Z}$), nous avons $P^2(e_k) = k^2 e_k$ et $(1 + P^2)^{1/2}(e_k) = (1 + k^2)^{1/2} e_k$. Considérant $(1 + P^2)^{1/2}$ comme un opérateur d'ordre 1, inversible, nous avons :

$$\frac{P}{(1 + P^2)^{1/2}}(e_k) = \frac{k}{(1 + k^2)^{1/2}} e_k$$

et $\frac{P}{(1 + P^2)^{1/2}}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. Alors

$$(1 - (\frac{P}{(1 + P^2)^{1/2}})^2)(e_k) = \frac{1}{1 + k^2} e_k$$

de sorte que $1 - (\frac{P}{(1 + P^2)^{1/2}})^2$ est un opérateur compact, et $\frac{P}{(1 + P^2)^{1/2}}$ est de Fredholm (bien sûr d'indice 0, car il est auto-adjoint).

Exemple 6.4. Soit M une variété riemannienne fermée. Soit $\Lambda^k T^*M$ la k -ième puissance extérieure du fibré cotangent T^*M (de sorte que les sections de $\Lambda^k T^*M$ sont exactement les k -formes sur M). Posons

$$\Lambda^+ T^*M := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} T^*M; \quad \Lambda^- T^*M := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k+1} T^*M.$$

En notant d la différentielle extérieure sur les formes, définissons un opérateur $P : L^2(\Lambda^+ T^*M) \rightarrow L^2(\Lambda^- T^*M)$ par $P = d + d^*$. Alors $P^*P = d^*d + dd^*$ est l'opérateur de Laplace-de Rham sur les formes différentielles, et $F := P(1 + P^*P)^{-1/2}$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 0. De plus

$$\text{Ker}(F) = \bigoplus_{k \geq 0} \{2k\text{-formes harmoniques}\}; \quad \text{Coker}(F) = \bigoplus_{k \geq 0} \{(2k + 1)\text{-formes harmoniques}\}.$$

Donc $\text{Ind}(F) = \chi(M)$, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M .

L'idée d'Atiyah consiste à rappeler que les espaces de Hilbert associés aux opérateurs géométriques comme ci-dessus, sont aussi des modules sur $C^\infty(M)$ (ou même $C(M)$) agissant par multiplication ponctuelle sur les sections. Or un opérateur différentiel ne commute bien sûr pas avec la multiplication par les fonctions mais, à cause de la règle de Leibniz, il commute avec les fonctions modulo les opérateurs d'ordre inférieur.

Exemple 6.5. Prenons $M = S^1$ et $P = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ comme dans l'Exemple 6.3. Alors pour $f, \xi \in C^1(S^1)$:

$$[P, f](\xi) = (Pf - fP)(\xi) = \frac{1}{i}((f\xi)' - f\xi') = \frac{f'}{i}\xi,$$

de sorte que $[P, f]$ est la multiplication ponctuelle par $\frac{f'}{i}$, qui s'étend en un opérateur borné sur L^2 , car il n'implique plus aucune différentiation.

Si P est pseudo-différentiel d'ordre 0, alors en fait $[P, f]$ est un opérateur compact pour tout $f \in C(M)$.

Exercice 6.6. Vérifier ceci pour l'opérateur $\frac{P}{(1+P^2)^{1/2}}$ de l'Exemple 6.3.

Fortement motivés par l'Exemple 6.4, nous définissons :

Définition 6.7. Soit X un espace compact. Un triple $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F)$ est un **module de Fredholm** sur $C(X)$ si

- $\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$ sont des espaces de Hilbert qui sont des modules sur $C(X)$, c'est-à-dire qu'il existe des $*$ -homomorphismes $\pi_\pm : C(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm)$.
- $F : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$ est un opérateur borné, de Fredholm.
- Pour tout $f \in C(X)$, l'opérateur $F\pi_+(f) - \pi_-(f)F$ est compact.

Atiyah note $Ell(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence unitaire de modules de Fredholm sur X : ce sont les cycles pour la K -homologie. La correspondance $X \rightarrow Ell(X)$ est covariante : en effet si $\alpha : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors $\alpha^* : C(Y) \rightarrow C(X) : f \mapsto f \circ \alpha$ désigne le $*$ -homomorphisme dual, et si $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, P)$ est un module de Fredholm sur $C(X)$, en composant avec α^* on obtient le module de Fredholm $\alpha_*(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, P)$ sur $C(Y)$.

Dans son article [At70], Atiyah laisse comme question ouverte la définition précise de la relation d'équivalence à imposer sur $Ell(X)$ afin d'obtenir $K_0(X)$, mentionnant qu'elle devrait être liée à l'homotopie. Kasparov [Ka95] a élaboré la notion précise d'homotopie (nous développerons ceci dans la sous-section 7.1 ci-dessous) de sorte que nous pouvons définir :

$$K_0(X) = Ell(X)/\text{homotopie}.$$

6.3 G -modules de Fredholm

Nous expliquons ici comment modifier la construction de la sous-section précédente lorsqu'on met une action de groupe dans le tableau.

Soit X maintenant un G -espace propre. Disons que X est G -compact si l'espace quotient $G \backslash X$ est compact.

Définition 6.8. Soit X un espace propre, G -compact. Un G -module de Fredholm sur X est un triple $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F)$ où :

- $\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$ sont des espaces de Hilbert munis de représentations unitaires (fortement continues) de G et de représentations G -covariantes π_+, π_- de $C_0(X)$.
- $F : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$ est un opérateur linéaire, borné, G -équivalent.
- Pour tout $f \in C_0(X)$, l'opérateur $\pi_-(f)F - F\pi_+(f)$ est compact.
- Il existe un opérateur linéaire, borné, G -équivalent $Q : \mathcal{H}^- \rightarrow \mathcal{H}^+$ tel que pour tout $f \in C_0(X)$ les opérateurs $\pi_+(f)(QF - 1)$ et $\pi_-(f)(FQ - 1)$ soient compacts.

Pour X un espace propre G -compact, nous définissons alors la K -homologie G -équivalente de X :

$$K_0^G(X) = \{G\text{-modules de Fredholm sur } X\} / (\text{homotopie } G\text{-équivalente}).$$

Nous pouvons alors définir le membre de gauche de la Conjecture 2.1

Définition 6.9.

$$K_0^G(\underline{EG}) := \lim_{X \subset \underline{EG}} K_0^G(X)$$

où la limite est prise sur l'ensemble dirigé des sous-ensembles propres G -compacts X de $\underline{EG}$.

La limite dans le membre de droite de la Définition 6.9 prend en compte le fait que $\underline{EG}$ n'est pas nécessairement G -compact et compense son manque d'unicité (rappelons qu'il n'est défini qu'à G -homotopie équivalente près).

L'exemple suivant généralise l'Exemple 6.4 au cadre G -équivalent.

Exemple 6.10. Soit M une variété riemannienne lisse, complète, et soit $G \curvearrowright M$ une action propre, isométrique, G -compacte. Soient $E^\pm$ des fibrés vectoriels lisses G -équivalents sur M , et soit $\mathcal{H}^\pm = L^2(M, E^\pm)$ leurs espaces de sections L^2 . Soit $F : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$ un opérateur G -équivalent, elliptique, pseudo-différentiel d'ordre 0. Alors $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F)$ est un G -module de Fredholm sur M .

Exemple 6.11. Pour se rapprocher de l'Exemple 6.4, spécialisons l'Exemple 6.10 en prenant $\mathcal{H}^\pm = L^2(\Lambda^\pm TM)$, $P = d + d^*$ et $F = P(1 + P^*P)^{-1/2}$. L'opérateur Q de la Définition 6.8 peut être pris égal à $Q = F^*$. L'opérateur $QF - 1 = -(1 + P^*P)^{-1}$ n'est pas compact lorsque M n'est pas compact, mais il est "localement compact", c'est-à-dire que $\pi_+(f)(QF - 1)$ est compact pour $f \in C_0(M)$. Pour voir ce dernier point, nous pouvons supposer que f est à support compact avec support dans une carte ouverte de M , ce qui nous permet de remplacer M par le n -tore $\mathbb{T}^n$ ($n = \dim M$). Sur $\mathbb{T}^n$ la compacité souhaitée peut être montrée à l'aide des séries de Fourier.

7 KK-théorie et application d'assemblage

Références pour cette section : [Bl98], [Ka95], [Ka88], [MV03].

Pour définir l'application d'assemblage, nous avons besoin de la théorie de Kasparov, qui fournit en fait le bon cadre à la fois pour la K -théorie et la K -homologie des C^* -algèbres.

7.1 Théorie de Kasparov

Le but est d'associer, à chaque couple (A, B) de C^* -algèbres séparables, des groupes abéliens $KK_i(A, B)$ ($i = 0, 1$), contravariants en A , covariants en B , tels que

- Le groupe de K-théorie $K_i(B)$ est naturellement isomorphe à $KK_i(\mathbb{C}, B)$.
- (stabilité) Si $p \in \mathcal{K}$ est une projection de rang 1, l'homomorphisme $A \rightarrow A \otimes \mathcal{K} : a \mapsto a \otimes p$ induit un isomorphisme $KK_i(A \otimes \mathcal{K}, B) \simeq KK_i(A, B)$. De même $KK_i(A, B) \simeq KK_i(A, B \otimes \mathcal{K})$.
- (suites exactes scindées) En chacune des deux variables, KK_i envoie les suites exactes courtes scindées de C^* -algèbres sur des suites exactes courtes scindées de groupes.

La propriété principale de la KK-théorie est l'existence d'un produit associatif, le *produit de Kasparov* :

Théorème 7.1. (Kasparov [Ka95]) *Il existe un produit associatif, bi-additif*

$$KK_i(A, B) \times KK_j(B, C) \rightarrow KK_{i+j}(A, C) : (x, y) \mapsto x \otimes_B y$$

(avec les indices comptés modulo 2) qui fait de $KK_0(A, A)$ un anneau unifère. De plus tout $*$ -homomorphisme $f : A \rightarrow B$ définit un élément $[f_*] \in KK_0(A, B)$ tel que $[f_*] \otimes_B y = f^*(y)$ pour tout $y \in KK_i(B, C)$. De même, si $g : B \rightarrow C$ est un $*$ -homomorphisme, alors $x \otimes_B [g_*] = g_*(x)$ pour tout $x \in KK_i(A, B)$.

Ceci signifie que l'assignation $f \mapsto [f_*]$ définit un foncteur de la catégorie des C^* -algèbres séparables avec $*$ -homomorphismes, vers la catégorie additive ayant les mêmes objets et les éléments de $KK_0(A, B)$ comme morphismes de A vers B . Si $f, g : A \rightarrow B$ sont des $*$ -homomorphismes, alors $f + g$ n'est généralement pas un $*$ -homomorphisme, mais $[f_*] + [g_*]$ a un sens dans $KK_0(A, B)$.

Après cette publicité pour la KK-théorie, entrons dans plus de détails.

Nous rappelons quelques termes concernant les modules de Hilbert C^* (pour lesquels une bonne référence est [La95]). Si B est une C^* -algèbre et $\mathcal{E}$ est un module de Hilbert C^* (à droite) sur B , nous notons $\mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ la C^* -algèbre des opérateurs adjointables sur $\mathcal{E}$, et $\mathcal{K}_B(\mathcal{E})$ l'idéal fermé des opérateurs B -compacts. Rappelons qu'un opérateur est B -compact s'il est limite en norme de sommes d'opérateurs de la forme $x \mapsto \langle x | \xi \rangle \eta$, pour certains $\xi, \eta \in \mathcal{A}$.

Définition 7.2. Un cycle pour $KK_0(A, B)$ est un triple $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, F)$ où

- $\mathcal{E}^\pm$ est un module de Hilbert C^* sur B , muni d'une représentation de A donnée par un $*$ -homomorphisme $\pi_\pm : A \rightarrow \mathcal{L}_B(\mathcal{E}^\pm)$, et $F \in \mathcal{L}_B(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$.
- Pour tout $a \in A$, nous avons $(F^*F - 1)\pi_+(a) \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E}^+)$ et $(FF^* - 1)\pi_-(a) \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E}^-)$.
- Pour tout $a \in A$, nous avons $F\pi_+(a) - \pi_-(a)F \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$.

Exemple 7.3. Si $f : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme, définissons $[f_*] = (B, 0, 0)$, où B est vu comme module de Hilbert C^* à droite sur lui-même, et comme A -module à gauche via f . Alors, comme $\mathcal{K}_B(B) = B$, nous voyons que toutes les conditions de la Définition 7.2 sont satisfaites.

Définition 7.4. Un cycle pour $KK_1(A, B)$ est un couple $(\mathcal{E}, P)$ où

- $\mathcal{E}$ est un module de Hilbert C^* sur B , muni d'une représentation de A donnée par un $*$ -homomorphisme $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$, et $P = P^* \in \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$.
- Pour tout $a \in A$, nous avons $(P^2 - P)\pi(a) \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E})$.
- Pour tout $a \in A$, nous avons $[P, \pi(a)] \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E})$.

La notion pertinente d'homotopie est alors :

Définition 7.5. Deux cycles x_0, x_1 pour $KK_i(A, B)$ sont **homotopes** s'il existe un cycle y pour $KK_i(A, B \otimes C[0, 1])$ tel que $e_*^{(0)}(y)$ soit isomorphe à x_0 et $e_*^{(1)}(y)$ soit isomorphe à x_1 , où $e^{(t)} : B \otimes C[0, 1] \rightarrow B$ désigne l'évaluation au temps t .

Nous définissons alors $KK_i(A, B)$ comme l'ensemble des cycles correspondants modulo homotopie.

Proposition 7.6. Muni de la somme directe, $KK_i(A, B)$ ($i = 0, 1$) est un groupe abélien.

Preuve: Disons qu'un cycle pour $KK_i(A, B)$ est *dégénéré* si, dans la Définition 7.2 ou la Définition 7.4, tous les opérateurs supposés B -compacts, sont en fait nuls.

Affirmation : Tout cycle dégénéré pour $KK_0(A, B)$ (resp. $KK_1(A, B)$) est homotope au cycle trivial $(0, 0, 0)$. En effet (disons $i = 1$), soit $x = (\mathcal{E}, P)$ un cycle dégénéré pour $KK_1(A, B)$. Alors $y = (\mathcal{E} \otimes C_0[0, 1[, P \otimes 1)$ est un cycle pour $KK_1(A, B \otimes C[0, 1])$ (raison : comme $\mathcal{K}_B(\mathcal{E} \otimes C_0[0, 1]) = \mathcal{K}_B(\mathcal{E}) \otimes C_0[0, 1]$, nous voyons que y est un cycle car x est dégénéré). Comme $e_*^{(t)}(y) = x$ pour $0 \leq t < 1$ et $e_*^{(1)}(y) = (0, 0)$, nous voyons que y fournit l'homotopie souhaitée.

Nous commençons maintenant la preuve de la Proposition elle-même.

- ($i = 0$) L'élément nul de $KK_0(A, B)$ est la classe du cycle trivial $(0, 0, 0)$. L'opposé du cycle $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, F)$ est $(\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^+, F^*)$. En effet

$$(\mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-, \mathcal{E}^- \oplus \mathcal{E}^+, \begin{pmatrix} F \cos(\frac{\pi t}{2}) & -\sin(\frac{\pi t}{2}) \\ \sin(\frac{\pi t}{2}) & F^* \cos(\frac{\pi t}{2}) \end{pmatrix}) \quad (t \in [0, 1])$$

est une homotopie entre $(\mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-, \mathcal{E}^- \oplus \mathcal{E}^+, \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix})$ et le cycle dégénéré $(\mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-, \mathcal{E}^- \oplus \mathcal{E}^+, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Nous concluons en utilisant l'affirmation.

- ($i = 1$) L'élément nul de $KK_1(A, B)$ est la classe de $(0, 0)$. L'opposé du cycle $(\mathcal{E}, P)$ est $(\mathcal{E}, 1 - P)$. En effet

$$(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}, \begin{pmatrix} P \cos(\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{\pi t}{2})) & \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi t}{2}) \\ \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi t}{2}) & -P \cos(\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi t}{2})) \end{pmatrix}) \quad (t \in [0, 1])$$

est une homotopie entre $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}, \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 - P \end{pmatrix})$ et le cycle dégénéré $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Là encore, l'affirmation permet de conclure. $\square$

Exercice 7.7. Vérifier les détails de la preuve précédente.

Exemple 7.8. (suggéré par le rapporteur) La structure d'anneau sur $KK_0(A, A)$ n'est pas commutative en général. Par exemple, $KK_0(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ est isomorphe en tant qu'anneau à $M_2(\mathbb{Z})$.

7.2 Théorie de Kasparov équivariante

Nous indiquons maintenant les changements à faire pour passer de la KK-théorie à la KK-théorie équivariante. Soit donc G satisfaisant les hypothèses usuelles. Soient A, B des $G - C^*$ -algèbres, c'est-à-dire des C^* -algèbres munies d'actions continues de G par $*$ -automorphismes. Soit $\mathcal{E}$ un C^* -module sur B , supposons que $\mathcal{E}$ soit muni d'une action continue de G par opérateurs linéaires. Disons que $\mathcal{E}$ est un *module de Hilbert* $G - C^*$ si, pour tout $g \in G, b \in B, \xi, \eta \in \mathcal{E}$:

$$g(\xi.b) = (g\xi).(gb) \text{ et } \langle g\xi | g\eta \rangle = g.\langle \xi | \eta \rangle.$$

Alors, dans la définition des cycles pour $KK_i^G(A, B)$, nous exigeons que les C^* -modules soient des $G - C^*$ -modules sur B , et que les représentations de A soient G -équivariantes. De plus (disons pour $i = 1$) l'opérateur P doit satisfaire les deux conditions suivantes :

- L'application $g \mapsto g \cdot P$ est continue en *norme* sur G .
- Pour tout $a \in A, g \in G$, nous avons $(g \cdot P - P)\pi(a) \in \mathcal{K}_B(\mathcal{E})$.

Les groupes KK-équivariants $KK_i^G(A, B)$ sont alors définis comme les cycles modulo homotopie, comme dans la sous-section 7.1. Ce sont des groupes abéliens, comme dans la Proposition 7.6. De plus, en supposant les $G - C^*$ -algèbres séparables, toutes les propriétés souhaitables listées au début de la sous-section 7.1 sont vérifiées, en particulier l'analogue équivariant du Théorème 7.1 sur le produit de Kasparov (voir [Ka88]).

En particulier $KK_0^G(A, A)$ est un anneau unifère, d'unité donnée par $1_A = [id_A, *]$ où id_A est l'identité sur A ; c'est la classe représentée par $(A, 0, 0)$ avec l'action à gauche usuelle de A .

Exemple 7.9. Pour G compact et $A = \mathbb{C}$ avec action triviale de G , nous avons $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = R(G)$, l'anneau des représentations des classes d'isomorphisme de représentations de dimension finie de G . D'autre part $KK_1^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$.

Une construction utile en KK-théorie équivariante est l'*extension des scalaires*. Pour des C^* -algèbres A, B , notons $A \otimes_{\min} B$ le produit tensoriel C^* minimal de A et B .

Proposition 7.10. Soient A, B, C des $G - C^*$ -algèbres séparables. Il existe un homomorphisme $\tau_C : KK_i^G(A, B) \rightarrow KK_i^G(A \otimes_{\min} C, B \otimes_{\min} C)$ qui est naturel et compatible avec le produit de Kasparov. Pour $i = 0$ il est donné par $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, F) \mapsto (\mathcal{E}^+ \otimes C, \mathcal{E}^- \otimes C, F \otimes 1_C)$, et de manière analogue pour $i = 1$.

Nous pouvons maintenant revisiter la définition de la K -homologie équivariante (comparer avec la Définition 6.9) :

Définition 7.11. Si X est un espace propre, G -compact, posons

$$K_i^G(X) := KK_i^G(C_0(X), \mathbb{C}) \quad (i = 0, 1).$$

Si Y est un G -espace propre quelconque (par exemple $Y = \underline{E}G$), posons

$$K_i^G(Y) = \lim_X K_i^G(X) \quad (i = 0, 1),$$

où la limite est prise sur l'ensemble dirigé des sous-ensembles propres G -compacts X de Y .

Nous passons maintenant aux compatibilités entre KK-théorie équivariante et non équivariante. Rappelons que, si le groupe G agit continûment sur la C^* -algèbre A par $*$ -automorphismes, nous pouvons définir le *produit croisé complet* $A \rtimes G$ et le *produit croisé réduit* $A \rtimes_r G$. Tous deux sont définis comme des complétions convenables de $C_c(G, A)$, l'espace des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans A muni de la *convolution tordue* : pour $f_1, f_2 \in C_c(G, A)$, $g \in G$:

$$(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(h)(h \cdot (f_2(h^{-1}g))) dh \quad (2)$$

Exemple 7.12. *Pour $A = \mathbb{C}$ avec l'action triviale de G , nous obtenons $\mathbb{C} \rtimes G = C^*(G)$, la C^* -algèbre de groupe complète ; et $\mathbb{C} \rtimes_r G = C_r^*(G)$, la C^* -algèbre de groupe réduite apparaissant dans la Conjecture 2.1.*

Nous notons $\lambda_{A,G} : A \rtimes G \rightarrow A \rtimes_r G$ le $*$ -épimorphisme canonique du produit croisé complet vers le produit croisé réduit. Si G est moyennable, alors $\lambda_{A,G}$ est un isomorphisme. La réciproque est fausse. Par exemple, si G est quelconque et X est un G -espace propre, nous utiliserons plus loin que $\lambda_{C_0(X),G}$ est toujours un isomorphisme (voir par exemple [AD87]).

Pour $A = \mathbb{C}$, nous notons $\lambda_G : C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ le $*$ -épimorphisme canonique associé à la représentation régulière de G . Or λ_G est un isomorphisme si et seulement si G est moyennable.

Proposition 7.13. *Il existe des homomorphismes naturels de descente*

$$\widetilde{j}_G : KK_i^G(A, B) \rightarrow KK_i(A \rtimes G, B \rtimes G)$$

et

$$j_G : KK_i^G(A, B) \rightarrow KK_i(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G),$$

compatibles avec les produits de Kasparov, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(A, B) & \xrightarrow{\widetilde{j}_G} & KK_i(A \rtimes G, B \rtimes G) \\ j_G \downarrow & & \downarrow (\lambda_{B,G})_* \\ KK_i(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G) & \xrightarrow{(\lambda_{A,G})^*} & KK_i(A \rtimes G, B \rtimes_r G) \end{array}$$

7.3 L'application $\widetilde{\mu}_G$

Nous sommes maintenant presque prêts à définir le dernier ingrédient de la Conjecture 2.1, à savoir l'application d'assemblage. Elle sera obtenue en appliquant d'abord la descente à une classe de K -homologie équivariante, puis en couplant la KK -classe résultante avec une classe canonique associée au G -espace propre.

7.3.1 L'idempotent canonique

Soit X un espace propre, G -compact. Notons $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G .

Lemme 7.14. 1. *Il existe $h \in C_c(X)$ non négative telle que $\int_G h(s^{-1} \cdot x) ds = 1$ pour tout $x \in X$.*

2. Posons $p_X(x, s) := \sqrt{h(x)h(s^{-1} \cdot x)}$. Alors p_X est un idempotent dans $C_c(X \times G)$ (muni de la convolution tordue comme en (2)).

Preuve:

1. Par G -compacité, nous trouvons une fonction non négative $g \in C_c(X)$ dont le support rencontre chaque G -orbite dans X . Nous posons alors $h(x) := \frac{g(x)}{\int_G g(t^{-1} \cdot x) dt}$.

Exemple 7.15. Pour $G = \mathbb{Z}$ agissant par translations entières sur $X = \mathbb{R}$, nous pouvons prendre

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Pour $f_1, f_2 \in C_c(X \times G)$, $x \in X$, $g \in G$, nous avons par (2) :

$$(f_1 * f_2)(x, g) = \int_G f_1(x, s) f_2(s^{-1} \cdot x, s^{-1}g) ds.$$

Alors

$$p_X^2(x, g) = \int_G [h(x)h(s^{-1} \cdot x)h(s^{-1} \cdot x)h(g^{-1} \cdot x)]^{1/2} ds = (h(x)h(g^{-1} \cdot x))^{1/2} = p_X(x, g)$$

où la 2ème égalité découle de la première partie du lemme. $\square$

Nous notons $[p_X]$ la classe de la projection p_X dans $K_0(C_0(X) \rtimes G) = KK_0(\mathbb{C}, C_0(X) \rtimes G)$. Notons que $[p_X]$ est indépendant du choix de la fonction h dans le Lemme 7.14 : la raison est que l'ensemble des fonctions h satisfaisant la partie 1 du lemme, est convexe.

Définition 7.16. $[p_X]$ est l'élément canonique dans $KK_0(\mathbb{C}, C_0(X) \rtimes G)$.

7.3.2 La conjecture de Baum-Connes à coefficients

Pour X un sous-ensemble propre, G -compact de $\underline{E}G$, nous définissons l'application

$$\tilde{\mu}_{G,X} : KK_i^G(C_0(X), \mathbb{C}) \rightarrow KK_i(\mathbb{C}, C^*(G)) = K_i(C^*G) : x \mapsto [p_X] \otimes_{C_0(X) \rtimes G} \tilde{j}_G(x).$$

Notons qu'ici nous n'avons pas besoin de toute la force du produit de Kasparov. En effet, en considérant p_X comme un $*$ -homomorphisme $\mathbb{C} \rightarrow C_0(X) \rtimes G$, nous pouvons tout aussi bien définir $\tilde{\mu}_{G,X}(x) := p_X^*(\tilde{j}_G(x))$.

Pour les X dans l'ensemble dirigé des sous-ensembles propres G -compacts de $\underline{E}G$, les applications $\tilde{\mu}_{G,X}$ se recollent et définissent

$$\tilde{\mu}_G : K_i^G(\underline{E}G) = \lim_X KK_i^G(C_0(X), \mathbb{C}) \rightarrow K_i(C^*G).$$

Plus généralement, pour toute C^* -algèbre B avec une action continue de G , nous posons

$$\tilde{\mu}_{G,B} : KK_i^G(\underline{E}G, B) := \lim_X KK_i^G(C_0(X), B) \rightarrow K_i(B \rtimes G) : x \mapsto [p_X] \otimes_{C_0(X) \rtimes G} j_{G,B}(x)$$

(où $x \in KK_i^G(C_0(X), B)$).

Définition 7.17. Pour B comme ci-dessus, l'**application d'assemblage pour G et B** est l'application $\mu_{G,B} : KK_i^G(\underline{EG}, B) \rightarrow K_i(B \rtimes_r G)$ donnée par $\mu_{G,B} := (\lambda_{G,B})_* \circ \tilde{\mu}_{G,B}$.

L'**application d'assemblage pour G** est $\mu_G = (\lambda_G)_* \circ \tilde{\mu}_G : K_i^G(\underline{EG}) \rightarrow K_i(C_r^*(G))$.

La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour G est l'énoncé suivant.

Conjecture 7.18. Pour toute C^* -algèbre B munie d'une action continue de G par $*$ -automorphismes, l'application $\mu_{G,B} : KK_i^G(\underline{EG}, B) \rightarrow K_i(B \rtimes_r G)$ ($i = 0, 1$) est un isomorphisme.

La Conjecture 2.1 est bien sûr le cas $B = \mathbb{C}$ de la Conjecture 7.18. Cette dernière a des avantages et des inconvénients par rapport à la première.

- La Conjecture 7.18 est connue pour être stable par passage à un sous-groupe fermé, tandis que l'énoncé correspondant est inconnu pour la Conjecture 2.1.
- La Conjecture 7.18 a été démontrée pour des classes importantes de groupes, voir les Théorèmes 8.9 et 8.10 ci-dessous.
- Malgré ces résultats positifs, la Conjecture 7.18 est fausse en général : des contre-exemples ont été construits par N. Higson, V. Lafforgue et G. Skandalis [HLS02].

7.4 L'application d'assemblage pour les groupes discrets

Dans toute cette sous-section, supposons les groupes discrets.

7.4.1 La conjecture de Novikov forte

Si X est G -propre et de plus G agit **librement** sur X , alors $K_i^G(X) = K_i(G \backslash X)$. En particulier $K_i^G(EG) = K_i(BG)$. Par la propriété universelle de $\underline{EG}$, nous avons une application G -équivariante $EG \rightarrow \underline{EG}$, unique à G -homotopie équivariante près. Nous obtenons donc une application canonique $\iota_* : K_i(BG) \rightarrow K_i^G(\underline{EG})$ qui est connue pour être rationnellement injective (voir la section 7 dans [BCH94]).

L'énoncé suivant est connu sous le nom de **conjecture de Novikov forte** pour G :

Conjecture 7.19. L'application $\mu_G \circ \iota_* : K_i(BG) \rightarrow K_i(C_r^*(G))$ ($i = 0, 1$) est rationnellement injective.

7.4.2 Fonctorialité de l'assemblage

Nous discutons ici des propriétés de fonctorialité des applications d'assemblage $\tilde{\mu}_G$ et μ_G . La C^* -algèbre complète est pleinement fonctorielle : tout homomorphisme de groupes $\alpha : G \rightarrow H$ induit un $*$ -homomorphisme noté par la même lettre : $\alpha : C^*(G) \rightarrow C^*(H)$. Il s'avère que les applications $\tilde{\mu}$ sont pleinement fonctorielles (voir [MV03]), c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_i^G(\underline{EG}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_G} & K_i(C^*(G)) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ K_i(\underline{EH}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & K_i(C^*(H)) \end{array}$$

On ne sait pas si μ_G est fonctorielle. Cependant, comme la C^* -algèbre de groupe réduite est fonctorielle pour les homomorphismes de groupes injectifs (tout homomorphisme injectif $G \hookrightarrow H$ induit un $*$ -homomorphisme injectif $C_r^*(G) \hookrightarrow C_r^*(H)$), l'application μ_G est certainement fonctorielle par rapport aux homomorphismes de groupes injectifs.

Bien sûr, sur la classe des groupes moyennables μ_G est pleinement fonctorielle car $C^*(G) = C_r^*(G)$. Cependant, pour les groupes non moyennables $C_r^*(G)$ est souvent simple (c'est le cas pour les groupes libres, ou plus généralement pour les réseaux dans les groupes de Lie simples, voir [BCH94]), donc $C_r^*(G)$ n'est généralement pas fonctorielle pour les homomorphismes de groupes non injectifs.

7.4.3 L'obstruction de la propriété (T)

Les bonnes propriétés de fonctorialité de $\tilde{\mu}_G$ soulèvent une question naturelle : se pourrait-il que $\tilde{\mu}_G$ soit un isomorphisme ? Si oui, comme $\mu_G = (\lambda_G)_* \circ \tilde{\mu}_G$ et que μ_G devrait être un isomorphisme par la Conjecture 2.1, cela impliquerait que $(\lambda_G)_* : K_i(C^*(G)) \rightarrow K_i(C_r^*(G))$ est un isomorphisme. Cependant, ceci n'est pas vrai en général, comme l'a observé Connes dès 1980 :

Proposition 7.20. *Si le groupe localement compact non compact G a la propriété (T) de Kazhdan, alors $(\lambda_G)_* : K_0(C^*(G)) \rightarrow K_0(C_r^*(G))$ n'est pas injective.*

V. Lafforgue a prouvé dans [La02] que μ_G est un isomorphisme pour les groupes hyperboliques (dénombrables), dont certains ont la propriété (T) (par exemple les réseaux uniformes dans le groupe de Lie $Sp(n, 1)$, ($n \geq 2$)). Pour ceux-ci, il découle de la Proposition 7.20 que $\tilde{\mu}_G$ N'EST PAS surjective.

Preuve de la Proposition 7.20 : Le groupe G a la propriété (T) si et seulement s'il existe une projection $p_G \in C^*(G)$ telle que, pour toute représentation unitaire π de G , la projection $\pi(p_G)$ soit la projection orthogonale sur le sous-espace des vecteurs $\pi(G)$ -fixes. Alors

- En prenant pour π la représentation triviale de dimension un ϵ de G , nous obtenons $\epsilon(p_G) = 1$ ce qui montre que $[p_G]$ est d'ordre infini dans $K_0(C^*(G))$.
- En prenant pour π la représentation régulière λ_G , qui n'a pas de vecteur G -fixe non nul car G est non compact, nous obtenons $\lambda_G(p_G) = 0$, ce qui achève la preuve. $\square$

Dans un article de la même série, P. Julg [Ju26] discute quand $(\lambda_G)_* : K_i(C^*(G)) \rightarrow K_i(C_r^*(G))$ est un isomorphisme, conduisant au concept de K -moyennabilité.

8 La méthode “Dirac-dual Dirac”

La méthode “Dirac-dual Dirac”, introduite par Kasparov [Ka95] dans des cas particuliers et formalisée par Tu [Tu00], est l'un des outils les plus puissants pour attaquer les Conjectures 2.1 et 7.18.

8.1 La méthode abstraite

Nous avons besoin du concept de $G - C^*$ -algèbre *propre* D . Intuitivement, cela signifie que si nous identifions le centre $Z(D)$ à $C_0(X)$ pour un certain espace localement compact X , l'action de G sur X est propre. Plus précisément :

Définition 8.1. Soit X un G -espace. Une $G - X - C^*$ -algèbre est une $G - C^*$ -algèbre D munie d'un homomorphisme G -équivariant $C_0(X) \rightarrow Z(M(D))$ (le centre de l'algèbre des multiplicateurs de D) qui de plus est non dégénéré, c'est-à-dire $\overline{\text{span}(C_0(X)D)} = D$. La $G - C^*$ -algèbre D est alors **propre** s'il existe un G -espace propre X tel que D soit une $G - X - C^*$ -algèbre.

C'est un résultat crucial dû à Chabert, Echterhoff et Meyer [CEM01], que la conjecture de Baum-Connes à coefficients propres est vérifiée pour des groupes arbitraires⁸.

Théorème 8.2. Si D est une $G - C^*$ -algèbre propre, alors l'application $\mu_{G,D} : KK_i^G(\underline{EG}, D) \rightarrow K_i(D \rtimes_r G)$ ($i = 0, 1$) est un isomorphisme.

Considérons maintenant l'hypothèse suivante sur un groupe donné G

Hypothèse (*) : Il existe une $G - C^*$ -algèbre propre D et des éléments $\alpha \in KK_i^G(D, \mathbb{C})$ (l'"élément de Dirac") et $\beta \in KK_i^G(\mathbb{C}, D)$ (l'"élément dual-Dirac") tels que $\beta \otimes_D \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ dans $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

L'hypothèse (*) est en fait très forte, car elle implique la conjecture de Baum-Connes à coefficients ! En effet :

Proposition 8.3. Sous l'hypothèse (*), la Conjecture 7.18 est vérifiée.

Preuve: Soit B une $G - C^*$ -algèbre. Écrivons $B \otimes D$ pour $B \otimes_{\min} D$. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
KK_i^G(\underline{EG}, B) & \xrightarrow{\otimes_{B\tau_B}(\beta)} & KK_i^G(\underline{EG}, B \otimes D) & \xrightarrow{\otimes_{B \otimes D} \tau_B(\alpha)} & KK_i^G(\underline{EG}, B) \\
\downarrow \mu_{G,B} & & \simeq \downarrow \mu_{G, B \otimes D} & & \downarrow \mu_{G,B} \\
K_i(B \rtimes_r G) & \xrightarrow{\otimes_{B \rtimes_r G} j_G(\tau_B(\beta))} & K_i((B \otimes D) \rtimes_r G) & \xrightarrow{\otimes_{(B \otimes D) \rtimes_r G} j_G(\tau_B(\alpha))} & K_i(B \rtimes_r G)
\end{array}$$

L'application verticale centrale est un isomorphisme car $B \otimes D$ est une $G - C^*$ -algèbre propre, donc la Proposition 8.2 s'applique. Or l'hypothèse (*) implique que les compositions des applications horizontales sont des isomorphismes, en haut et en bas. L'injectivité de $\mu_{G,B}$ découle alors de la partie gauche du diagramme, tandis que la surjectivité découle de la partie droite. $\square$

Prenons $B = \mathbb{C}$ dans la preuve précédente et observons que la même preuve fonctionnerait avec μ_G remplacé par $\tilde{\mu}_G$, de sorte que l'hypothèse (*) implique aussi que $\tilde{\mu}_G$ est un isomorphisme. D'après la discussion de la sous-section 7.4.3, cela implique que $(\lambda_G)_*$ est un isomorphisme, ce qui n'est pas vérifié par exemple pour les groupes ayant la propriété (T) (voir la Proposition 7.20). Ceci montre que l'hypothèse (*), bien que satisfaite dans certains cas intéressants (voir le Théorème 8.9 ci-dessous) est en fait trop forte. J.-L. Tu [Tu00] a proposé le substitut suivant.

Définition 8.4. Un élément γ est un élément $\gamma \in KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tel que

1. Il existe une $G - C^*$ -algèbre propre D , et des éléments $\alpha \in KK_i^G(D, \mathbb{C})$ ("élément de Dirac"), $\beta \in KK_i^G(\mathbb{C}, D)$ ("élément dual-Dirac") tels que $\gamma = \beta \otimes_D \alpha$.
2. Pour tout sous-groupe compact F de G , l'image de γ sous l'application de restriction $\text{Rest}_G^F : KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow R(F)$ est la représentation triviale de dimension un ϵ_F .

La seconde condition de la définition ci-dessus garantit la non-trivialité d'un élément γ . L'hypothèse (*) signifie que l'unité $1_{\mathbb{C}}$ de $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est un élément γ . Le résultat suivant est dû à Tu.

8. Pour D commutative et G un groupe de Lie connexe, ce résultat avait été obtenu antérieurement dans [Va88].

Théorème 8.5. 1. Si un élément γ existe dans $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors il est unique et de plus c'est un idempotent dans $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

2. Supposons qu'un élément γ existe. Alors

- (a) Pour toute G - C^* -algèbre B , l'application $\mu_{G,B}$ est injective. En particulier la conjecture de Novikov forte (Conjecture 7.19) est vérifiée.
- (b) Pour une G - C^* -algèbre B , l'application $\mu_{G,B}$ est surjective si et seulement si l'application $\otimes_{B \otimes_r G} \tau_{B \rtimes_r G}(\gamma)$ est l'identité sur $K_i(B \rtimes_r G)$ ($i = 0, 1$).

Quelques commentaires sur la preuve. Si nous avons un élément γ noté γ , alors $\gamma \otimes_{\mathbb{C}} \gamma$ est encore un élément γ , donc $\gamma \otimes_{\mathbb{C}} \gamma = \gamma$ découle de l'unicité de γ . Pour la seconde partie, considérons le même diagramme commutatif que dans la preuve de la Proposition 8.3. Il est montré que la composition des applications de la ligne supérieure est l'identité, d'où l'injectivité de $\mu_{G,B}$. Le critère de surjectivité découle de manière similaire.

8.2 Exemples et résultats

Donnons l'exemple classique d'un élément de Dirac.

Exemple 8.6. Soit M une variété riemannienne lisse, complète, et soit $G \curvearrowright M$ une action propre, isométrique, G -compacte. Prenons $\mathcal{H}^{\pm} = L^2(\Lambda^{\pm}TM)$, $P = d + d^*$ et $F = P(1 + P^*P)^{-1/2}$. Prenons de plus $D = C_0(M)$, une G - C^* -algèbre propre. Par l'Exemple 6.11 nous avons l'élément $\alpha = (\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F) \in KK_0(C_0(M), \mathbb{C})$, que nous appelons l'élément de Dirac associé à M .

Voici maintenant l'exemple classique d'un élément dual-Dirac.

Exemple 8.7. Dans la situation de l'Exemple 8.6, supposons de plus que M soit simplement connexe à courbure non positive (de sorte que M est un modèle pour $\underline{EG}$). Par le théorème de Cartan-Hadamard, deux points quelconques $x, y \in M$ sont reliés par un unique segment géodésique que nous notons $[x, y]$. Soit x_0 un point base dans M , posons $\rho(x) = \frac{d_M(x_0, x)^2}{2}$, où d_M désigne la distance riemannienne sur M . Notons $C_0(\Lambda^{\pm}TM)$ l'ensemble des formes différentielles continues s'annulant à l'infini sur M , et voyons-le comme un module de Hilbert C^* sur $C_0(M)$. Voyons la différentielle $d\rho$ comme une 1-forme et définissons l'opérateur (non borné) $P : C_0(\Lambda^+TM) \rightarrow C_0(\Lambda^-TM)$ par

$$P = \text{ext}(d\rho) + \text{int}(d\rho),$$

où (pour $\omega \in C_0(\Lambda^+TM)$) : $\text{ext}(d\rho)(\omega) = d\rho \wedge \omega$ et $\text{int}(d\rho)(\omega)$ est la contraction de la forme ω sur le champ de gradient $\nabla\rho$ de ρ . Alors P^*P est simplement la multiplication ponctuelle par la fonction $\|d\rho\|^2 = \|\nabla\rho\|^2$. Mais $\nabla\rho(x)$ est un vecteur tangent en x à la géodésique $[x_0, x]$, pointant vers l'extérieur à partir de x_0 , de norme $d_M(x_0, x)$. Donc $(1 + P^*P)^{-1}$ est la multiplication ponctuelle par $\frac{1}{1 + d_M(x_0, \cdot)^2}$ qui est continue et tend vers 0 à l'infini de M et définit donc un opérateur compact au sens des C^* -modules.

Pour $g \in G$, l'opérateur gPg^{-1} est l'opérateur similaire défini par rapport au point base $x'_0 = gx_0$, à l'aide de la fonction $\rho'(x) = \frac{d_M(x'_0, x)^2}{2}$.

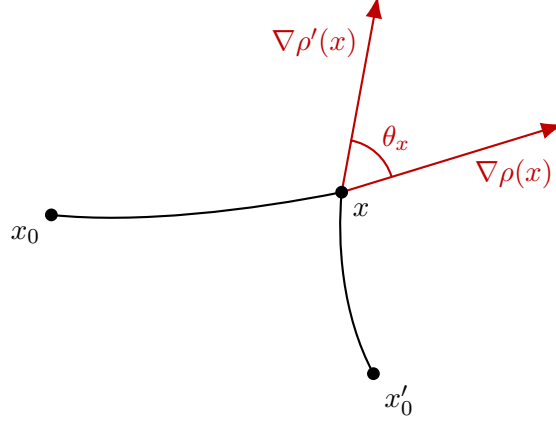


FIGURE 1 : P et gPg^{-1}

On vérifie que $\|\nabla(\rho - \rho')\|$ reste borné sur M : pour le voir, utiliser le fait que l'angle θ_x entre $\nabla \rho(x)$ et $\nabla \rho'(x)$, tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini dans M). En conséquence, en définissant $F = P(1 + P^*P)^{-1/2}$, nous pouvons définir l'élément $\beta = (C_0(\Lambda^+TM), C_0(\Lambda^-TM), F) \in KK_0^G(\mathbb{C}, C_0(M))$ et nous l'appelons l'élément dual-Dirac.

Ceci est vérifié par exemple si M est soit un espace euclidien (de dimension finie), soit un espace symétrique riemannien de type non compact.

Si M satisfait les hypothèses des Exemples 8.6 et 8.7, nous pouvons former

$$\gamma = \beta \otimes_{C_0(M)} \alpha \in KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) :$$

c'est un élément γ (voir [Ka95]) décrit, dans l'image des opérateurs non bornés, par $(L^2(\Lambda^+TM), L^2(\Lambda^-TM), D)$, avec

$$D = d + d^* + \text{ext}(d\rho) + \text{int}(d\rho). \quad (3)$$

Remarque 8.8. Lorsque M est l'espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur D^2 est très lié à l'opérateur d'oscillateur harmonique sur $\mathbb{E}^n$. En effet, si ω est une k -forme, nous avons (pour $x \in \mathbb{E}^n$) :

$$D^2\omega(x) = \Delta\omega(x) + \|x\|^2\omega(x) + (2k - n)\omega(x).$$

Théorème 8.9. Dans le cadre des Exemples 8.6 et 8.7, l'égalité $\gamma = 1_{\mathbb{C}}$ est vérifiée lorsque :

- $M = \mathbb{E}^n$ (voir Kasparov [Ka95]).
- $M = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$, l'espace hyperbolique réel de dimension n (voir Kasparov [Ka84]).
- $M = \mathbb{H}^n(\mathbb{C})$, l'espace hyperbolique complexe de dimension n (voir Julg-Kasparov [JK95]).

Donc la Conjecture 7.18 est vérifiée pour tous les groupes agissant proprement et isométriquement sur M comme dans le Théorème 8.9. Maintenant des éléments γ ont été construits dans d'autres situations.

Théorème 8.10. Un élément γ existe pour les classes de groupes suivantes.

- Groupes agissant proprement sur des arbres localement finis ; ici $\gamma = 1_{\mathbb{C}}$ (voir Pimsner [Pi86]).
- Groupes agissant proprement sur des immeubles euclidiens localement finis (voir Kasparov-Skandalis [KS91]).

- Groupes hyperboliques (voir Kasparov-Skandalis [KS03]).
- Groupes ayant la propriété de Haagerup (en particulier les groupes moyennables) ; ici $\gamma = 1_{\mathbb{C}}$ (voir Higson-Kasparov [HK01]).

Un commentaire sur le cas des groupes G agissant proprement sur des arbres (ce qui inclut les groupes libres, $SL_2(\mathbb{Z})$ ou $SL_2(\mathbb{Q}_p)$) : dans [JV84], P. Julg et l’auteur ont construit un élément non trivial $\gamma \in KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et ont montré $\gamma = 1_{\mathbb{C}}$, ce qui était suffisant pour garantir que G est K -moyennable, c’est-à-dire que pour toute G - C^* -algèbre A , l’application canonique $\lambda_{A,G} : A \rtimes G \rightarrow A \rtimes_r G$, induit des isomorphismes en K -théorie⁹. En notant V l’ensemble des sommets de l’arbre, Pimsner [Pi86] construit alors des éléments $\alpha \in KK_0^G(C_0(V), \mathbb{C})$, $\beta \in KK_0^G(\mathbb{C}, C_0(V))$ et identifie le produit de Kasparov $\beta \otimes_{C_0(V)} \alpha$ avec l’élément γ de [JV84].

9 Inverser l’application d’assemblage

9.1 Motivation

En 2018, S. Nishikawa, alors doctorant, a posté un article très intéressant [Ni19] où, sur la base d’une analyse lucide de la méthode Dirac-dual Dirac, il a introduit des idées nouvelles pour inverser l’application d’assemblage, qui peuvent en principe servir d’alternative à la méthode Dirac-dual Dirac pour démontrer les Conjectures 2.1 ou 7.18.

9.2 Propriété (γ)

Dans cette section, nous supposons toujours qu’il existe un modèle G -compact pour $\underline{EG}$, que nous noterons $\underline{E}$. L’observation fondamentale de Nishikawa (qui rappelle l’observation d’Atiyah dans la sous-section 6.2) est que, si G admet un élément γ au sens de la Définition 8.4, alors le module de Fredholm sous-jacent à $\beta \otimes_D \alpha$ porte une structure supplémentaire de $C_0(\underline{E})$ -module. Il définit alors :

Définition 9.1. Soit $x = (\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F)$ un cycle pour $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Nous disons que x a la **propriété (γ)** si $\mathcal{H}^\pm$ porte une représentation non dégénérée, G -équivariante $\pi_\pm$ de $C_0(\underline{E})$ telle que :

1. Pour tout $f \in C_0(\underline{E})$, la fonction $g \mapsto F\pi_+(g \cdot f) - \pi_-(g \cdot f)F$ est dans $C_0(G, \mathcal{K})$.
2. Pour tout sous-groupe compact F de G , l’image de γ sous l’application de restriction $Rest_G^F : KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow R(F)$ est la représentation triviale de dimension un ϵ_F .

Ici $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$. Rappelons qu’une représentation π d’une C^* -algèbre A sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dite *non dégénérée* si le span linéaire de $\pi(A)\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}$. Observons que la condition (2) de la Définition 9.1 est exactement la même que la condition (2) de la définition d’un élément γ (Définition 8.4). Par contraste, la Condition 1 de la Définition 9.1 est comparativement moins restrictive car elle n’exige pas de factorisation de la forme $\beta \otimes_D \alpha$. Notons que la propriété (γ) est vraiment une propriété d’un cycle, et non de sa classe d’homotopie.

Lemme 9.2. Soit π une représentation non dégénérée de $C_0(\underline{E})$ sur $\mathcal{H}$. Alors pour tout $f \in C_0(\underline{E})$, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ nous avons $\lim_{g \rightarrow \infty} \|\pi(g \cdot f)T\| = 0$.

9. Pour plus de détails sur la K -moyennabilité, voir l’article de P. Julg [Ju26] dans la même série.

Preuve: La preuve se fait par une série de réductions :

- Par linéarité et densité, nous pouvons supposer que T est de rang 1.
- Il suffit alors de montrer $\lim_{g \rightarrow \infty} \|\pi(g \cdot f)(\xi)\| = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.
- Comme π est non dégénérée, à nouveau par linéarité et densité nous pouvons supposer que $\xi = \pi(f_0)\xi_0$ pour certains $f_0 \in C_0(\underline{E})$, $\xi_0 \in \mathcal{H}$, et nous devons montrer

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \|\pi((g \cdot f)f_0)(\xi_0)\| = 0.$$

- Par densité, nous pouvons supposer que f et f_0 sont à support compact. Comme $G \curvearrowright \underline{E}$ est propre, la fonction $g \mapsto (g \cdot f)f_0$ est à support compact sur G , ce qui conclut la preuve. $\square$

L'observation fondamentale est maintenant que, si $x = (\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, F)$ est un cycle pour $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ayant la propriété (γ) , alors pour toute G - C^* -algèbre B , il est possible d'induire x en un élément $\tilde{x}_B \in KK_0^G(C_0(\underline{E}) \otimes (B \rtimes_r G), B)$, où G agit trivialement sur $B \rtimes_r G$. Cet élément $\tilde{x}_B$ peut alors être utilisé pour définir un homomorphisme $\nu_B^x : K_i(B \rtimes_r G) \rightarrow KK_i^G(C_0(\underline{E}), B)$ ($i = 0, 1$), donc dans la direction opposée à l'application d'assemblage μ_B . Pour définir ν_B^x nous commençons par identifier $K_i(B \rtimes_r G)$ avec $KK_i^G(\mathbb{C}, B \rtimes_r G)$, G agissant trivialement sur $\mathbb{C}$ et $B \rtimes_r G$. Puis nous définissons

$$\nu_B^x : KK_i^G(\mathbb{C}, B \rtimes_r G) \rightarrow KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) : y \mapsto \tau_{C_0(\underline{E})}(y) \otimes_{C_0(\underline{E}) \otimes (B \rtimes_r G)} \tilde{x}_B.$$

Il s'avère que ν_B^x fournira au moins un inverse à gauche pour μ_B (voir le Théorème 9.4 ci-dessous).

Esquissons la construction de $\tilde{x}_B$ pour $B = \mathbb{C}$ et G discret. Les espaces de Hilbert sous-jacents à $\tilde{x}_{\mathbb{C}} \in KK_0^G(C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G), \mathbb{C})$ seront $\widetilde{\mathcal{H}}^\pm := \ell^2(G, \mathcal{H}^\pm) = \ell^2(G) \otimes \mathcal{H}^\pm$, munis de la représentation unitaire de G définie comme le produit tensoriel de λ_G avec la G -représentation donnée sur $\mathcal{H}^\pm$.

Nous avons besoin d'une représentation de $C_r^*(G)$ sur $\ell^2(G, \mathcal{H}^\pm)$, commutant avec $\pi_\pm(C_0(\underline{E}))$ de sorte qu'elle s'étende au produit tensoriel $C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G)$: pour cela nous laissons simplement $C_r^*(G)$ agir sur $\ell^2(G, \mathcal{H}^\pm)$ via la représentation régulière *droite* de G . Nous notons $\tilde{\pi}_\pm$ la représentation correspondante de $C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G)$.

Enfin nous définissons l'opérateur $\tilde{F} : \widetilde{\mathcal{H}}^+ \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^-$ par

$$(\tilde{F}\xi)(g) = (g \cdot F)(\xi(g)),$$

pour $\xi \in \ell^2(G, \mathcal{H}^+)$, $g \in G$.

Nous affirmons que $\tilde{x}_{\mathbb{C}} := (\widetilde{\mathcal{H}}^+, \widetilde{\mathcal{H}}^-, \tilde{F})$ définit un élément dans $KK_0^G(C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G), \mathbb{C})$. Vérifions la 3ème condition de la Définition 7.2. Nous devons donc vérifier que, pour $a \in C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G)$, l'opérateur $\tilde{F}\tilde{\pi}_+(a) - \tilde{\pi}_-(a)\tilde{F}$ est compact. Par linéarité et densité, nous pouvons supposer $a = f \otimes \delta_h$, pour certains $f \in C_0(\underline{E})$, $h \in G$. Pour $\xi \in \ell^2(G, \mathcal{H}^+)$, $g \in G$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} ([\tilde{F}\tilde{\pi}_+(f \otimes \delta_h) - \tilde{\pi}_-(f \otimes \delta_h)\tilde{F}]\xi)(g) &= (g \cdot F)(\tilde{\pi}_+((f \otimes \delta_h)\xi)(g)) - \pi_-(f)(\tilde{F}\xi(gh)) \\ &= (g \cdot F)\pi_+(f)(\xi(gh)) - \pi_-(f)(gh \cdot F)(\xi(gh)) \\ &= [(g \cdot F)\pi_+(f) - \pi_-(f)(g \cdot F)](\xi(gh)) + [\pi_-(f)((g \cdot F) - (gh \cdot F))](\xi(gh)) \end{aligned}$$

Donc, à l'opérateur de translation à droite par h près, l'opérateur $\tilde{F}\tilde{\pi}_+(f \otimes \delta_h) - \tilde{\pi}_-(f \otimes \delta_h)\tilde{F}$ est donné par l'opérateur bloc-diagonal

$$\bigoplus_{g \in G} ([(g \cdot F)\pi_+(f) - \pi_-(f)(g \cdot F)] + [\pi_-(f)((g \cdot (F - (h \cdot F))))])$$

Nous devons montrer que chaque somme est compacte, de norme tendant vers 0 lorsque $g \rightarrow \infty$. Par la propriété (γ) , le terme de la première parenthèse est bien un opérateur compact de norme tendant vers 0 lorsque $g \rightarrow \infty$. Pour le terme de la 2ème parenthèse : l'opérateur $F - (h \cdot F)$ est compact, car x est un cycle pour $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, donc le lemme 9.2 s'applique pour conclure que la norme de $\pi_-(f)((g \cdot (F - (h \cdot F))))$ tend vers 0 lorsque $g \rightarrow \infty$.

Les conditions $(\tilde{F}^*\tilde{F} - 1)\tilde{\pi}_+(a)$ et $(\tilde{F}\tilde{F}^* - 1)\tilde{\pi}_-(a)$ compacts, pour $a \in C_0(\underline{E}) \otimes C_r^*(G)$, se vérifient de manière similaire.

9.3 Quelques résultats de Nishikawa [Ni19]

Le résultat suivant clarifie le lien entre la propriété (γ) et l'existence d'un élément γ . Comparer avec la première partie du Théorème 8.5.

Proposition 9.3. 1. Si x est un cycle pour $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ayant la propriété (γ) , alors x est unique à homotopie près. De plus x définit un idempotent dans l'anneau $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (comme conséquence de l'unicité).

2. Si G admet un élément γ , alors un cycle homotope à γ satisfait la propriété (γ) .

Le résultat suivant montre qu'un élément ayant la propriété (γ) est presque aussi bon qu'un élément γ . Comparer avec la seconde partie du Théorème 8.5.

Théorème 9.4. Supposons qu'il existe un cycle x ayant la propriété (γ) .

1. Pour toute $G - C^*$ -algèbre B , nous avons $\nu_B^x \circ \mu_B = 1_{KK_i^G(\underline{E}, B)}$, de sorte que μ_B est injective et scindée. En particulier la conjecture de Novikov forte (Conjecture 7.19) est vérifiée.
2. Si x est homotope à $1_{\mathbb{C}}$ dans $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors la conjecture de Baum-Connes à coefficients (Conjecture 7.18) est vérifiée pour G .

Idées pour la preuve : Il y a 4 étapes.

1. On vérifie d'abord que $\mu_B \circ \nu_B^x$ coïncide avec l'action de module de x sur $K_i(B \rtimes_r G)$. Plus précisément, pour tout $y \in K_i(B \rtimes_r G)$, nous avons $(\mu_B \circ \nu_B^x)(y) = y \otimes_{B \rtimes_r G} j_G(\tau_B(x))$. En particulier $\mu_B \circ \nu_B^x = 1_{K_i(B \rtimes_r G)}$ si $x = 1_{\mathbb{C}}$.
2. Supposons que μ_B soit un isomorphisme. Alors nous avons un diagramme manifestement commutatif, avec les flèches verticales qui sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) & \xrightarrow{\nu_B^x \circ \mu_B} & KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) \\ \mu_B \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \mu_B \\ K_i(B \rtimes_r G) & \xrightarrow{\mu_B \circ \nu_B^x} & K_i(B \rtimes_r G) \end{array}$$

Par la première étape, l'application horizontale du bas est l'action de module de x . Mais le diagramme commute aussi si l'on remplace l'application horizontale du haut par l'action de module de x . Comme les applications verticales sont des isomorphismes, nous en déduisons que l'application horizontale du haut coïncide avec l'action de module de x .

3. Nous supprimons maintenant l'hypothèse de la deuxième étape, c'est-à-dire nous montrons que $\nu_B^x \circ \mu_B$ est l'action de module de x sur $KK_i(C_0(\underline{E}), B)$ pour toute $G - C^*$ -algèbre B . Par un résultat de R. Meyer et R. Nest [MN04], il existe une $G - C^*$ -algèbre propre $\tilde{B}$ et $y \in KK_0^G(\tilde{B}, B)$ tels que l'application horizontale du haut du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(C_0(\underline{E}), \tilde{B}) & \xrightarrow{\otimes_{\tilde{B}}^y} & KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) \\ \mu_{\tilde{B}} \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ K_i(\tilde{B} \rtimes_r G) & \xrightarrow{\otimes_{\tilde{B} \rtimes_r G}^{j_G(y)}} & K_i(B \rtimes_r G) \end{array}$$

soit un isomorphisme (de plus $\mu_{\tilde{B}}$ est un isomorphisme, par le Théorème 8.2). En appliquant $\nu_{\tilde{B}}^x$ à gauche et ν_B^x à droite, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(C_0(\underline{E}), \tilde{B}) & \xrightarrow{\otimes_{\tilde{B}}^y} & KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) \\ \nu_{\tilde{B}}^x \circ \mu_{\tilde{B}} \downarrow & & \downarrow \nu_B^x \circ \mu_B \\ KK_i^G(C_0(\underline{E}), \tilde{B}) & \xrightarrow{\otimes_{\tilde{B}}^y} & KK_i^G(C_0(\underline{E}), B) \end{array}$$

avec les applications horizontales qui sont des isomorphismes. Par la deuxième étape, l'application verticale de gauche est l'action de module de x sur $KK_i^G(C_0(\underline{E}), \tilde{B})$. Comme le diagramme commute aussi lorsque l'application verticale de droite est remplacée par l'action de module de x , nous en déduisons que $\nu_B^x \circ \mu_B$ est bien l'action de module de x sur $KK_i^G(C_0(\underline{E}), B)$.

4. Comme $\underline{E}$ est G -propre, un cycle z pour $KK_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ agit comme l'identité sur $KK_j^G(C_0(\underline{E}), B)$ pour toute $G - C^*$ -algèbre B , si et seulement s'il satisfait $Rest_G^F z = \epsilon_F$ pour tout sous-groupe compact F de G . $\square$

Exemple 9.5. Soit X soit l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$, soit un espace symétrique riemannien de type non compact. Dans ce cas, nous savons qu'il existe un élément γ représenté dans l'image des opérateurs non bornés par l'opérateur D de la formule (3), à savoir

$$D = d + d^* + \text{ext}(d\rho) + \text{int}(d\rho),$$

avec $\rho(x) = \frac{d_M(x_0, x)^2}{2}$. Passons à l'image bornée par $F := D(1 + D^*D)^{-1/2}$. Alors Nishikawa montre directement que le cycle $(L^2(\Lambda^+ T^*M), L^2(\Lambda^- T^*M), F)$ a la propriété (γ) . Pour cela il invoque la formule intégrale

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D(1 + D^*D + \lambda^2)^{-1} d\lambda,$$

basée sur l'identité $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s}{1+s^2+\lambda^2} d\lambda$ pour $s > 0$.

Nishikawa est alors capable de redémontrer que les groupes suivants satisfont la conjecture de Baum-Connes à coefficients :

- Sous-groupes fermés de $Isom(\mathbb{E}^n)$.
- Groupes agissant proprement et co-compactement sur des arbres.
- (en collaboration avec J. Brodzki, E. Guentner et N. Higson, voir [BGHN21]) Groupes agissant proprement et co-compactement sur des complexes cubiques $CAT(0)$ de dimension finie.

10 L'application d'assemblage pour quelques groupes discrets

Dans cette dernière section nous rassemblons quelques exemples de groupes *discrets* où l'application d'assemblage μ_G peut être décrite explicitement.

Si un groupe sans torsion G a un modèle pour BG de dimension ≤ 3 , alors

$$K_0(BG) \simeq H_0(BG, \mathbb{Z}) \oplus H_2(BG, \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad K_1(BG) \simeq H_1(BG, \mathbb{Z}) \oplus H_3(BG, \mathbb{Z})$$

(voir [Ma02] ; notons que l'homologie de l'espace classifiant s'identifie à l'homologie de groupe usuelle). Bien sûr $H_0(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, engendré par $[\ast]$, l'inclusion d'un point base.

10.1 Le groupe $\mathbb{Z}$

Pour G cyclique infini, disons de générateur t , nous avons du côté gauche :

- $H_0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ engendré par $[\ast]$.
- $H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, engendré par le cycle fondamental $[c]$.

Du côté droit nous avons $C^*(\mathbb{Z}) = C(S^1)$ (par l'Exemple 3.2), donc

- $K_0(C^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$ engendré par $[1]$.
- $K_1(C^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$ engendré par $[t]$, la classe du générateur t .

Alors $\mu_{\mathbb{Z}}[\ast] = [1]$ et $\mu_{\mathbb{Z}}[c] = [t]$.

10.2 Le groupe libre à n générateurs

Pour $n \geq 2$, soit F_n le groupe libre à n générateurs $t_1, \dots, t_n$. Alors BG est un bouquet de n cercles $c_1, \dots, c_n$, de sorte que du côté gauche :

- $H_0(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ engendré par $[\ast]$.
- $H_1(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ engendré par $[c_1], \dots, [c_n]$.

Du côté gauche nous avons par un résultat profond de Pimsner-Voiculescu [PV82] :

- $K_0(C_r^*(F_n)) = \mathbb{Z}$, engendré par $[1]$.
- $K_1(C_r^*(F_n)) = \mathbb{Z}^n$, engendré par $[t_1], \dots, [t_n]$, les classes des générateurs libres $t_1, \dots, t_n$.

Alors $\mu_{F_n}[\ast] = [1]$ et $\mu_{F_n}[c_i] = [t_i]$ pour $i = 1, \dots, n$.

Notons qu'une conséquence du calcul de Pimsner-Voiculescu est que $C_r^*(F_m)$ n'est pas isomorphe à $C_r^*(F_n)$ pour $m \neq n$: c'était une question ouverte de longue date en 1982 !

10.3 Groupes finis

Soit F un groupe fini. Par la première partie de l'Exemple 5.7, nous pouvons prendre $\underline{EF}$ réduit à un point, et $K_0^F(\underline{EF}) = R(F)$, le groupe additif de l'anneau des représentations de F ; et $K_1^F(\underline{EF}) = 0$. Voyons $R(F)$ comme le groupe abélien libre sur $\widehat{F}$, le dual de F .

D'autre part

$$C_r^*(F) = \mathbb{C}F = \bigoplus_{\pi \in \widehat{F}} M_{\dim \pi}(\mathbb{C}).$$

De sorte que $K_1(C_r^*(F)) = 0$ et

$$K_0(C_r^*(F)) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{F}} \mathbb{Z} \cdot [e_\pi],$$

où e_π est une projection minimale dans $M_{\dim \pi}(\mathbb{C})$. Si $\dim \pi \geq 2$, il n'y a pas de choix canonique pour e_π , bien que la classe $[e_\pi]$ soit canonique. À l'autre extrême pour $\pi = \epsilon_F$, la projection correspondante est

$$p_F := \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} g. \quad (4)$$

Alors $\mu_F : R(F) \rightarrow K_0(C_r^*(F))$ est donnée par $\mu_F[\pi] = [e_\pi]$ pour $\pi \in \widehat{F}$.

10.4 Quelques groupes localement finis

Un groupe localement fini B est l'union $B = \bigcup_{n>0} B_n$ d'une famille croissante de groupes finis B_n , avec $B_n \subset B_{n+1}$. Par la dernière partie de l'Exemple 5.7, nous savons que $\underline{EB}$ est un arbre qui se fibrent sur $\mathbb{N}$.

Or

$$C^*(B) = \varinjlim C^*(B_n)$$

est une AF-algèbre¹⁰. Comme la K-théorie commute avec les limites inductives, nous avons

$$K_i(C^*(B)) = \varinjlim K_i(C^*(B_n)) \quad (i = 0, 1);$$

en particulier $K_i(C^*(B)) = 0$. Par functorialité de l'application d'assemblage, nous obtenons que $\mu_B : K_i^G(\underline{EB}) \rightarrow K_i(C^*(B))$ ($i = 0, 1$) est un isomorphisme.

Il peut être intéressant d'avoir une description explicite de μ_B , au moins dans des cas particuliers. Soit donc $(F_n)_{n>0}$ une collection de groupes finis, posons $B_n := \bigoplus_{k=1}^n F_k$ et

$$B := \varinjlim B_n = \bigoplus_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Nous plongeons $\widehat{B_n}$ dans $\widehat{B_{n+1}}$ via

$$s_n : \widehat{B_n} \rightarrow \widehat{B_{n+1}} : \pi \mapsto \pi \otimes \epsilon_{F_{n+1}}.$$

10. AF signifie *approximativement finie*, c'est-à-dire une limite inductive de C^* -algèbres de dimension finie; celles-ci étaient à la mode dans les années 1980.

Proposition 10.1. (voir [FPV17]) Le groupe $K_0^B(\underline{E}B)$ est naturellement isomorphe au groupe abélien libre sur la limite inductive du système $(\widehat{B}_n, s_n)_{n>0}$.

Pour être encore plus précis, supposons que tous les F_n soient égaux au même groupe fini F avec $|F| > 1$, de sorte que $B_n = F^n$ et $B = F^{(\mathbb{N})}$. Considérons le $*$ -homomorphisme *non unifié*

$$j_n : C^*(B_n) \rightarrow C^*(B_{n+1}) = C^*(B_n) \otimes C^*(F) : x \mapsto x \otimes p_F$$

avec p_F comme en (4). Il s'avère que

$$(j_n)_* \circ \mu_{B_n} = \mu_{B_{n+1}} \circ s_n.$$

Avec l'aide de la Proposition 10.1, ceci sera utile pour décrire μ_B explicitement.

Pour X un ensemble pointé, de point base o , notons $X^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des applications $\mathbb{N} \rightarrow X$ qui prennent la valeur o pour tous les entiers sauf un nombre fini. L'ensemble $\widehat{F}$ est pointé par ϵ_F ; l'ensemble $Min(F)$ des classes de projections minimales dans $C^*(F)$ est pointé par p_F .

Proposition 10.2. (voir [FPV17]). Soit F un groupe fini non trivial, $B = F^{(\mathbb{N})}$.

1. Le groupe abélien libre sur $\widehat{F}^{(\mathbb{N})}$ est naturellement isomorphe à $K_0^G(\underline{E}B)$ avec l'isomorphisme donné par

$$\pi \in \widehat{F}^{(\mathbb{N})} \mapsto \otimes_{k \in Supp(\pi)} \pi_k \in R(\oplus_{k \in Supp(\pi)} F_k) \subset K_0^B(\underline{E}B).$$

2. Le groupe abélien libre sur $Min(F)^{(\mathbb{N})}$ est naturellement isomorphe à $K_0(C^*(B))$, avec l'isomorphisme donné par

$$e \in Min(F)^{(\mathbb{N})} \mapsto \otimes_{k \in Supp(e)} e_k \in Min(\oplus_{k \in Supp(e)} F_k) \subset K_0(C^*(B)).$$

3. Pour $\pi \in \widehat{F}^{(\mathbb{N})}$ nous avons $\mu_B(\pi) = \otimes_{k \in Supp(\pi)} \mu_F(\pi_k) \in K_0(C^*(B))$.

10.5 Groupes de l'allumeur de réverbères

Pour F un groupe fini non trivial, considérons le *groupe de l'allumeur de réverbères*

$$L_F := F \wr \mathbb{Z} = (\oplus_{\mathbb{Z}} F) \rtimes \mathbb{Z}$$

où $\mathbb{Z}$ agit sur lui-même par translations. Le sous-groupe normal $B := \oplus_{\mathbb{Z}} F$ est un groupe localement fini précisément de la forme étudiée dans la Proposition 10.2. Soit t un générateur de $\mathbb{Z}$, agissant comme le décalage bilatéral sur B .

Proposition 10.3. (voir [FPV17])

1. $K_0(C^*(L_F))$ est abélien libre de rang dénombrable, avec une base explicite consistant en des projections de $C^*(B)$.
2. $K_1(C^*(L_F)) = \mathbb{Z}$ engendré par la classe $[t]$ de t .
3. Il existe un modèle de dimension 2 pour $\underline{E}L_F$ et μ_{L_F} est un isomorphisme qui peut être décrit explicitement.

Bien sûr, comme L_F est moyennable, le fait que μ_{L_F} soit un isomorphisme découle du dernier point du Théorème 8.10. L'intérêt de la Proposition 10.3 est de rendre cet isomorphisme explicite.

Terminons en décrivant le modèle de dimension 2 pour $\underline{E}L_F$, d'une manière un peu plus explicite que dans [FPV17]. Pour $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, posons $F_k := F$ et $B_n := \oplus_{k=-n}^n F_k$, de sorte que $B = \cup_{n=0}^{\infty} B_n$. Soit $\underline{E}B$ comme dans la dernière partie de l'Exemple 5.7, c'est-à-dire un arbre d'ensemble de sommets $V := \coprod_{n \geq 0} B/B_n$ et d'ensemble d'arêtes $\{(gB_n, gB_{n+1}) : g \in B, n \geq 0\}$. Observons que, pour $n > 0$, chaque sommet de B/B_n a $|F|^2 = [B_n : B_{n-1}]$ arêtes entrantes, et une seule arête sortante.

L'ensemble des sommets de $\underline{E}L_F$ est $V \times \mathbb{Z}$. Posons $V_k := V \times \{k\}$, le k -ième niveau de $\underline{E}L_F$. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit par translation sur le second facteur. L'élément $b \in B$ agit sur V_k par $t^k(b)$; en utilisant la relation définissante $t^{-1}bt = t(b)$, on vérifie que les actions de B et de $\mathbb{Z}$ se combinent pour s'étendre en une action de L . Il y a des arêtes horizontales (celles provenant de $\underline{E}B$ dans chaque niveau), et des arêtes obliques définies en reliant (gB_{n-1}, k) dans le k -ième niveau à $(t(g)B_n, k+1)$ dans le $(k+1)$ -ième niveau ($g \in B, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$; ceci est bien défini car $t(B_{n-1}) \subset B_n$). L'ensemble des arêtes obliques est invariant sous l'action de L . Enfin, nous collons une 2-cellule sur chaque quadrilatère

$$(gB_{n-1}, k), (t(g)B_n, k+1), (t(g)B_{n+1}, k+1), (gB_n, k)$$

consistant en 2 arêtes obliques et 2 arêtes horizontales ($g \in B, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$). De cette manière nous obtenons un $\underline{E}L_F$ de dimension 2.

Exercice 10.4. Vérifier les détails de la construction ci-dessus.

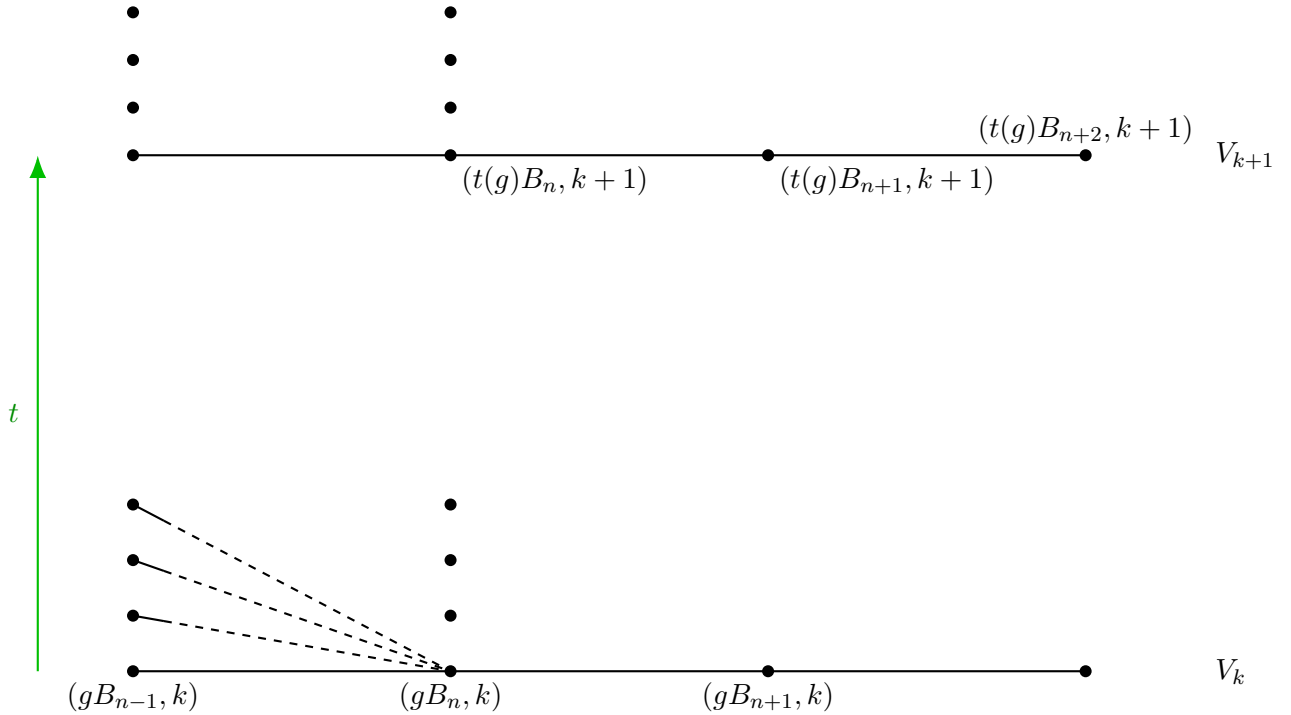


FIGURE 2 : $\underline{E}L_F$ pour $F = C_2$

Références

- [AD87] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE, *Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité*, Math. Ann., 279 (1987), 297-315.
- [At67] M.F. ATIYAH, *K-theory*, Benjamin, 1967.
- [At70] M.F. ATIYAH, *Global theory of elliptic operators*, in *Proc. Intern. Conf. on Funct. Anal. and related topics (Tokyo 1969)*, U. of Tokyo Press 1970, 21-30.
- [At76] M.F. ATIYAH, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, SMF, Astérisque 32-33 (1976), 43-72.
- [BC00] P. BAUM and A. CONNES *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Enseign. Math. 46 (2000), 3-42.
- [BCH94] P. BAUM, A. CONNES, and N. HIGSON, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^* -algebras*, Contemp. Math., 167, pp. 240-291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994
- [BD82] P. BAUM and R. DOUGLAS, *K-homology and index theory*, Proc. Symp. Pure Math 38, Part 1, (Operator Algebras and Applications, R. Kadison, ed.), American Mathematical Society, 1982, pp. 117-173.
- [BCH94] M. BEKKA, M. COWLING and P. de la HARPE, *Some groups whose reduced C^* -algebra is simple*, Publications Mathématiques de l'IHES 80 (1994), 117-134.
- [Bl98] B. BLACKADAR, *K-Theory for Operator Algebras (2nd ed.)*, MSRI. Publications 5, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [BGHN21] J. BRODZKI, E. GUENTNER, N. HIGSON and S. NISHIKAWA, *On the Baum-Connes Conjecture for Groups Acting on $CAT(0)$ -Cubical Spaces*, International Mathematics Research Notices, Volume 2021, Issue 5, March 2021, 3698-3728.
- [CEM01] J. CHABERT, S. ECHTERHOFF and R. MEYER, *Deux remarques sur l'application de Baum-Connes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 332, Série I (2001), 607-610.
- [CEN03] J. CHABERT, S. ECHTERHOFF and R. NEST, *The Connes-Kasparov conjecture for connected groups and for linear p -adic groups*, Publ Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 97 (2003), 239-278.
- [CM82] A. CONNES and H. MOSCOVICI, *The L^2 -index theorem for homogeneous spaces of Lie groups*, Ann. of Math. 115 (1982), 291-330
- [Dix96] J. DIXMIER, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars Great Classics, Ed. Jacques Gabay, Paris 1996 (reprint of the 1969 edition).
- [FM79] T. FACK and O. MARÉCHAL, *Application de la K -théorie algébrique aux C^* -algèbres*, in *Algèbres d'opérateurs*, Springer Lect. Notes in Math. 725 (1979), 144-169.
- [FPV17] R. FLORES, S. POOYA and A. VALETTE, *K-homology and K-theory for the lamplighter groups of finite groups*, Proc. London Math. Soc., 115 (2017), 1207-1226.
- [GHW05] E. GUENTNER, N. HIGSON and S. WEINBERGER, *The Novikov conjecture for linear groups*, Publ Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 101 (2005), 243-268.
- [GJV19] M.P. GOMEZ APARICIO, P. JULG and A. VALETTE, *The Baum-Connes conjecture : an extended survey*, In. A. Chamseddine et al. (eds.), *Advances in Noncommutative Geometry*, Springer Nature AG Switzerland 2019, 127-244.
- [HK01] N. HIGSON and G.G. KASPAROV, *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Invent. Math. 144 (2001), 23-74
- [HLS02] N. HIGSON, V. LAFFORGUE and G. SKANDALIS, *Counterexamples to the Baum-Connes conjecture*, Deom. Funct. Anal. 12 (2002), 330-354.
- [HR00] N. HIGSON and J. ROE, *Analytic K-Homology*, Oxford Math. Monographs, Oxford UP, 2000.
- [Ju26] P. JULG, *Cuntz's K-theoretic amenability revisited*, Preprint 2026.
- [JK95] P. JULG and G.G. KASPAROV, *Operator K-theory for the group $SU(n,1)$* , J. Reine Angew. Math. 463 (1995), 99-152.
- [JV84] P. JULG and A. VALETTE, *K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree*, J. Funct. Anal. 58 (1984), 194-215.

- [Ka78] M. KAROUBI, *K-theory : an Introduction*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag, 1978.
- [Ka84] G. G. KASPAROV, *Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 275 (1984), 541-545.
- [Ka88] G.G. KASPAROV *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. 91 (1988), 147-201.
- [Ka95] G.G. KASPAROV, *K-theory, group C^* -algebras, and higher signatures (Conspetus) (first distributed 1981)*, in *Novikov Conjectures, Index Theorems, and Rigidity, vol.1*, London Mathematical Society Lecture Note Series 226, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [KS91] G.G KASPAROV and G. SKANDALIS, *Groups Acting on Buildings, Operator K-Theory, and Novikov's Conjecture*, K-Theory 4 (1991), 303-337.
- [KS03] G.G KASPAROV and G. SKANDALIS, *Groups Acting Properly on "Bolic" Spaces and the Novikov Conjecture*, Annals of Mathematics 158 (2003), 165-206.
- [La02] V. LAFFORGUE, *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*, Invent. Math. 149 (2002), 1-95.
- [La95] E.C. LANCE, *Hilbert C^* -Modules - A Toolkit for Operator Algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series 210, 1995.
- [Lu02] W. LÜCK, *The relation between the Baum-Connes Conjecture and the Trace Conjecture*, Invent. math. 149 (2002), 123-152.
- [Ma02] M. MATTHEY, *Mapping the homology of a group to the K-theory of its C^* -algebra*, Illinois Journal of Mathematics, 46 (2002), 953-977.
- [MN04] R. MEYER and R. NEST, *The Baum-Connes Conjecture via Localization of Categories*, Letters in mathematical physics 69 (2004), 237-263.
- [MV03] G. MISLIN and A. VALETTE, *Proper group actions and the Baum-Connes conjecture* Ads. Courses in Math. CRM Barcelona, Birkhäuser, 2003.
- [Ni19] S. NISHIKAWA, *Direct splitting method for the Baum-Connes conjecture*, Journal of Functional Analysis 277 (2019) 2259-2287.
- [Pi86] M. PIMSNER, *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Invent. Math, 86 (1986), 603-634.
- [PV82] M. PIMSNER and D. VOICULESCU, *K-groups of reduced crossed products by free groups*, J. Operator Theory, 8 (1982), 131-156.
- [Tu00] J.-L. TU, *The Baum-Connes Conjecture for Groupoids*. In : J. Cuntz, S. Echterhoff (eds), *C^* -Algebras*. Springer, 2000, 227-242.
- [Va88] A. VALETTE, *Le rôle des fibrés de rang fini en théorie de Kasparov équivariante*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. 45 (1988), no. 6.

Institut de mathématiques
 Université de Neuchâtel
 11 Rue Emile Argand - Unimail
 CH-2000 Neuchâtel - Switzerland