

Un contre-exemple polynomial explicite au problème de plongement de Connes

Jiaqi Wang, Lihong Zhi

2 octobre 2026

Résumé

Nous construisons un polynôme hermitien explicite f à coefficients entiers, de degré 12 en 65 variables auto-adjointes, dont la trace normalisée est au moins $3/4$ sur tout n -uplet de contractions matricielles auto-adjointes, en toute dimension, et vaut -1 en un n -uplet spécifié d’unitaires auto-adjoints dans une algèbre de von Neumann de groupe. Par conséquent, $f + \varepsilon$ est en dehors du module quadratique de contraction modulo les commutateurs pour $0 \leq \varepsilon < 1$, donnant un contre-exemple explicite à la formulation algébrique du problème de plongement de Connes.

En combinant la construction de groupe de Kun et Thom avec l’argument de normalisation de Thom et le théorème de correction spectrale d’Alekseev, Liu et Thom, nous déterminons un entier positif explicite μ pour lequel

$$f = 1 - (P - Q)^2 + \mu \sum_{\nu=1}^{825} E_{\nu}^* E_{\nu} + \mu \sum_{j=1}^{65} (1 - X_j^2)^2.$$

Ici P, Q encodent des involutions conjuguées, et les E_{ν} encodent les défauts de relations.

1. Introduction

Le problème de plongement de Connes, formulé en 1976 [8, p. 105], affirme que tout facteur II_1 à préduel séparable se plonge dans un ultraproduit $\mathcal{R}^{\omega}$ du facteur II_1 hyperfini. De manière équivalente, un nombre fini de moments joints de contractions auto-adjointes dans un tel facteur peuvent être approchés arbitrairement bien par les traces normalisées de contractions matricielles [16, Proposition 3.17]. Ce point de vue de l’approximation relie la conjecture à la probabilité libre par les travaux de Voiculescu sur les limites de matrices aléatoires [27], et aux produits tensoriels de C^* -algèbres et à la conjecture QWEP par les équivalences de Kirchberg [15].

Junge et ses collaborateurs [14] et Fritz [10] ont relié la conjecture au problème de Tsirelson, qui compare les corrélations quantiques issues de produits tensoriels avec celles issues d’opérateurs qui

JW : Laboratoire d’État des sciences mathématiques, Académie de mathématiques et de sciences des systèmes, Académie chinoise des sciences, Pékin 100190, Chine ; Université de l’Académie chinoise des sciences, Pékin 100049, Chine ; LZ : Laboratoire d’État des sciences mathématiques, Académie de mathématiques et de sciences des systèmes, Académie chinoise des sciences, Pékin 100190, Chine ; Université de l’Académie chinoise des sciences, Pékin 100049, Chine

commutent. Slofstra [28] a montré que l'ensemble des corrélations admettant des réalisations quantiques de dimension finie n'est pas fermé. La résolution négative du problème de plongement de Connes a suivi en 2020 du théorème $\text{MIP}^* = \text{RE}$ de Ji, Natarajan, Vidick, Wright et Yuen [13], dont le travail a produit des corrélations d'opérateurs qui commutent ne pouvant être approchées par des modèles de produits tensoriels de dimension finie. Les développements ultérieurs incluent le théorème de Lin $\text{MIP}^{\text{co}} = \text{coRE}$ et une preuve alternative de $\text{MIP}^* = \text{RE}$ [29], ainsi que la construction de Manzoor d'une relation d'équivalence dénombrable préservant une mesure de probabilité dont l'algèbre de von Neumann n'est pas plongeable au sens de Connes [30].

Le présent article s'appuie sur des constructions récentes de groupes non hyperlinéaires, dont l'existence n'était pas résolue par la solution négative générale. Kun et Thom [17] ont construit des doubles amalgamés non sofiques à partir de couples convenables de groupes ayant la propriété (T) . Thom [26] a établi la non-hyperlinéarité de ces doubles sous une condition de centralisateur pour les ultraproducts matriciels traciaux. Alekseev, Liu et Thom [2] ont prouvé l'internalité requise des commutants relatifs sous une hypothèse de trou spectral, établissant ainsi la non-hyperlinéarité de ces doubles. Leurs algèbres de von Neumann de groupe avec leurs traces canoniques fournissent les modèles traciaux non plongeables utilisés ici.

Notre objectif est d'exprimer cette obstruction au moyen d'un polynôme non commutatif explicite. Klep et Schweighofer [16] ont montré que le problème de plongement de Connes est équivalente à un Positivstellensatz tracial : tout polynôme hermitien dont la trace normalisée est non négative sur tous les n -uplets de contractions matricielles auto-adjointes, en toute dimension, devrait admettre, après addition de toute constante positive, un certificat dans le module quadratique de contraction modulo les commutateurs. La formulation réelle est justifiée par Burgdorf, Dykema, Klep et Schweighofer [5] ; Ozawa [19] donne un traitement unifié de ces formulations algébriques et de leurs liens avec les algèbres d'opérateurs et l'information quantique.

La formulation algébrique exige un certificat dans le module quadratique de contraction modulo les commutateurs après toute perturbation par un scalaire positif. L'échec à être une somme de carrés hermitiens modulo les commutateurs est donc insuffisant pour donner un contre-exemple. Par exemple, le polynôme de Motzkin non commutatif dans [16, Exemple 4.4] n'est pas cycliquement équivalent à une somme de carrés hermitiens, mais toute perturbation par un scalaire positif est cycliquement équivalente à un élément du module quadratique de contraction.

Nous rendons maintenant explicite l'échec de ce Positivstellensatz tracial au moyen d'un polynôme à coefficients entièrement spécifiés.

1.1. Résultats principaux

Notre contre-exemple a la forme

$$f = 1 - (P - Q)^2 + \mu \sum_{\nu=1}^{825} E_{\nu}^* E_{\nu} + \mu \sum_{j=1}^{65} (1 - X_j^2)^2. \quad (1)$$

Ici $P = u^* h u$ et $Q = t^* h t$ encodent les deux involutions conjuguées, et les E_{ν} sont les résidus des 825 relations sélectionnées. La Section 2. spécifie ces polynômes en 65 variables auto-adjointes et l'entier positif μ .

Écrivons $\text{tr}_d = \text{Tr}/d$. Soit Λ le double amalgamé défini en (8), et soit τ_{Λ} la trace canonique sur son algèbre de von Neumann de groupe $L(\Lambda)$. Le théorème suivant donne la séparation précise des traces.

Théorème 1. *Le polynôme f dans (1) est un élément hermitien de $\mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_{65} \rangle$ de degré 12. Pour tout $d \geq 1$ et tout n -uplet de contractions auto-adjointes $A_1, \dots, A_{65} \in M_d(\mathbb{C})$,*

$$\mathrm{tr}_d f(A_1, \dots, A_{65}) \geq \frac{3}{4}. \quad (2)$$

Le n -uplet explicite d'unitaires auto-adjoints $a_1, \dots, a_{65}$ dans $L(\Lambda)$ spécifié en Section 2.4. satisfait

$$\tau_\Lambda f(a_1, \dots, a_{65}) = -1. \quad (3)$$

Remarque 2 (Réduction à deux variables). *L'Appendice A encode f comme un polynôme hermitien $\Psi \in \mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$ de degré au plus 3156, préservant la séparation stricte des traces (Théorème 24). Nous conservons la construction en 65 variables dans le corps du texte car elle est de degré 12 et exhibe directement les relations sous-jacentes.*

1.2. La conséquence algébrique

Pour énoncer précisément la conséquence pour le problème de plongement de Connes, soit $\mathcal{A}_N = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_N \rangle$ la $*$ -algèbre libre sur des générateurs auto-adjoints. Un polynôme hermitien p a une trace non négative sur les contractions matricielles si

$$\mathrm{tr}_d p(A_1, \dots, A_N) \geq 0 \quad \text{pour tout } d \geq 1 \text{ et } A_j = A_j^*, \|A_j\| \leq 1. \quad (4)$$

Le module quadratique de contraction est

$$\mathcal{M}_N = \left\{ \sum_{\ell} a_{\ell}^* a_{\ell} + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell} b_{j\ell}^* (1 - X_j^2) b_{j\ell} : a_{\ell}, b_{j\ell} \in \mathcal{A}_N \right\}, \quad (5)$$

où toutes les sommes sont finies. Notons $[\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_N]_{\mathrm{lin}}$ l'enveloppe linéaire des commutateurs additifs. Deux polynômes sont cycliquement équivalents si leur différence appartient à cet espace.

La formulation algébrique du problème de plongement de Connes affirme que (4) implique

$$p + \varepsilon \in \mathcal{M}_N + [\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_N]_{\mathrm{lin}} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad (6)$$

pour tout N et tout p hermitien. Son équivalence avec le problème de plongement est prouvée dans [16, Théorème 3.18], la formulation réelle et son équivalence avec la formulation complexe étant justifiées dans [5]. L'implication réciproque découle de l'évaluation sur les contractions matricielles, en prenant les traces et en faisant tendre ε vers zéro.

Le Théorème 1 donne l'exclusion explicite

$$f + \varepsilon \notin \mathcal{M}_{65} + [\mathcal{A}_{65}, \mathcal{A}_{65}]_{\mathrm{lin}} \quad (0 \leq \varepsilon < 1). \quad (7)$$

Le Corollaire 23 établit cette exclusion en l'évaluant au n -uplet spécifié dans $L(\Lambda)$.

1.3. Construction et stratégie de preuve

Nous partons du couple de groupes construit par Kun et Thom [17, Théorème E]. Soient $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^3 + \alpha + 1)$ et posons

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{EL}_3(\mathbb{F}_8[\xi_1, \xi_2, \xi_3]), \\ G &= \mathrm{EL}_3(\mathbb{F}_8[\xi_1^{\pm 1}, \xi_2^{\pm 1}, \xi_3^{\pm 1}]) \rtimes \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}), \quad \Lambda = G *_H G. \end{aligned} \quad (8)$$

Ici $\text{EL}_3(B)$ est le groupe des matrices élémentaires sur B , et $A \in \text{SL}_3(\mathbb{Z})$ agit sur les monômes de Laurent par $\xi^v \mapsto \xi^{Av}$.

La construction de groupe fournit deux involutions que les approximations matricielles ne peuvent distinguer. Précisément, prenons $h = e_{31}(\xi_2) = I_3 + \xi_2 E_{31}$, soient u, t les deux copies de $(I_3, I_3 + E_{12})$ dans Λ , et posons

$$P = u^{-1}hu, \quad Q = t^{-1}ht.$$

Les résultats de Thom [26, Théorèmes 1.2-1.3 et §5.2] et d'Alekseev, Liu et Thom [2, Théorème B et Corollaire C] impliquent que tout homomorphisme de Λ vers le groupe unitaire d'un ultraproduit matriciel tracial identifie P et Q . Dans le modèle de groupe, la trace canonique satisfait $\tau_\Lambda(1 - (P - Q)^2) = -1$; le calcul de forme normale est donné en Section 2.2..

Pour rendre cette séparation quantitative, nous sélectionnons une famille finie

$$\mathcal{R} = \{L_\nu = R_\nu : 1 \leq \nu \leq 825\}.$$

Elle consiste en identités de racines sur $\mathbb{F}_8$, quinze identités pour les matrices élémentaires entières, des identités de produits de racines, et des identités de compression commune. Ces relations capturent la partie de la construction de groupe nécessaire pour forcer $P = Q$ dans les modèles matriciels exacts. Leurs défauts $E_\nu = L_\nu - R_\nu$ entrent dans le polynôme de pénalité (1); les formules complètes sont données en Section 2.1..

La rigidité matricielle sous-jacente est élémentaire : si un unitaire conjugue une sous-algèbre de $M_d(\mathbb{C})$ en elle-même, la dimension finie force l'égalité. Combinée aux identités de compression commune, cela donne $P = Q$. Le travail analytique principal rend cette conclusion stable sous des relations approchées, avec des estimations indépendantes de la taille de la matrice.

La preuve combine les estimations spectrales et de normalisation de [2, 26] avec un arrondi des contractions auto-adjointes vers des involutions.

Plus précisément, pour un n -uplet de contractions matricielles A , posons

$$D(A) = \sum_{\nu=1}^{825} \|E_\nu(A)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{65} \|1 - A_j^2\|_2^2.$$

La tâche quantitative est d'obtenir un $\eta > 0$ explicite, indépendant de la taille de la matrice, tel que

$$D(A) \leq \eta \implies \|P(A) - Q(A)\|_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Cette estimation explique le choix du coefficient de pénalité. En effet,

$$\text{tr}_d f(A) = 1 - \|P(A) - Q(A)\|_2^2 + \mu D(A).$$

Si $D(A) \leq \eta$, les deux premiers termes donnent déjà une borne inférieure de 3/4. Si $D(A) > \eta$, le fait que $P(A)$ et $Q(A)$ soient des contractions donne

$$\text{tr}_d f(A) \geq -3 + \mu D(A) > -3 + \mu\eta.$$

Ainsi $\mu\eta \geq 15/4$ suffit pour (2). À la substitution de groupe, tout défaut s'annule, donnant (3). L'estimation spectrale entière utilise le certificat de Netzer et Thom [18]. Son transfert vers nos quinze relations entières sélectionnées est vérifié dans le Lemme 7.

1.4. Notations et préliminaires

L'involution sur $\mathcal{A}_N$ conjugue les coefficients et renverse les mots. Nous écrivons $|E|_*^2 = E^*E$, $C(A, B) = AB - BA$, et $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ pour les éléments de groupe. Les coefficients des polynômes sont de caractéristique nulle ; $\mathbb{F}_8$ n'apparaît que dans les identités de racines et la substitution de groupe.

Pour les matrices, $\|\cdot\|$ désigne la norme d'opérateur, et

$$\|x\|_2^2 = \text{tr}_d(x^*x) = \frac{\text{Tr}(x^*x)}{d}, \quad \langle x, y \rangle = \text{tr}_d(y^*x).$$

Les espaces rectangulaires auxiliaires conservent le dénominateur d . La norme de Hilbert-Schmidt non normalisée est notée $\|\cdot\|_{\text{HS}}$.

Pour les applications linéaires entre espaces matriciels, posons

$$\|\Phi\|_{\infty \rightarrow 2} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\Phi(x)\|_2, \quad \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2} = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\Phi(x)\|_2. \quad (9)$$

Nous définissons $\|\Phi\|_{\infty \rightarrow \infty}$ de manière similaire. Tous les suprema incluent des entrées non auto-adjointes. Pour les applications de domaine M_d muni de tr_d , $\|\Phi\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}$. Sur les espaces de probabilité finis, les normes L^2 utilisent les poids de probabilité donnés. La norme mixte $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow 2}$ est notée $\|\cdot\|_{\infty, 2}$ dans [23].

Pour une $*$ -sous-algèbre unifère $A \subseteq M_d$, soit E_A l'espérance conditionnelle préservant tr_d . C'est la projection orthogonale sur A dans L^2 , elle satisfait $E_A(axb) = aE_A(x)b$ pour $a, b \in A$, et elle est contractante à la fois en $\|\cdot\|$ et en $\|\cdot\|_2$; voir [22, Théorème 6.2.2].

Organisation de l'article. La Section 2. spécifie les relations finies, leur encodage polynomial et la substitution de groupe. La Section 3. développe les certificats spectraux et les estimations de correction. La Section 4. établit les estimations de reconstruction et de normalisation. La Section 5. combine ces estimations avec un argument d'arrondi pour prouver le Théorème 1. L'Appendice A encode le contre-exemple en deux variables auto-adjointes et montre qu'une seule variable ne peut suffire.

2. Relations finies et polynôme séparateur

Cette section construit le système de relations finies et son encodage polynomial. Nous spécifions d'abord les quatre familles de relations finies et comparons leurs solutions matricielles exactes avec le double de groupe pour identifier l'expression séparatrice $1 - (P - Q)^2$. Nous encodons ensuite ces relations en 65 variables auto-adjointes, définissons le polynôme f de degré 12, et vérifions sa trace négative à la substitution de groupe prescrite. La positivité sur des contractions matricielles arbitraires est établie dans les sections suivantes.

2.1. Le système de relations finies

Le polynôme de pénalité est construit à partir d'une collection finie d'identités dans le modèle de groupe. Nous sélectionnons ces identités dans le calcul matriciel élémentaire dans H , les cisaillements entiers dans G , et leur action sur la copie commune de H dans $\Lambda = G *_H G$. Le but est

de retenir l'information algébrique finie nécessaire pour comparer les conjugués inverses P et Q et contrôler leur différence lorsque les identités ne sont vérifiées qu'approximativement. Ces identités forment quatre familles. Les relations de racines et entières fournissent les deux entrées spectrales. Les relations de produits introduisent des symboles de racines pour les monômes produits par les cisaillements, tandis que les relations de compression prescrivent l'action des cisaillements sur les générateurs de racines partagés. Ces relations n'ont pas besoin de former une présentation de G ou Λ . Le tableau suivant liste les quatre familles et leurs nombres d'équations indexées.

Famille	Signification	Nombre	Définition
$\mathcal{R}_H$	Calcul de racines	666	Section 2.1..1
$\mathcal{R}_K$	Action entière	15	(13)
$\mathcal{R}_{\text{prod}}$	Produits de monômes	18	(14)
$\mathcal{R}_{\text{comp}}$	Compression commune	126	(16)

À ce stade, les symboles de racines sont traités comme des involutions et les symboles d'action comme des unitaires. Nous décrivons d'abord les relations et leurs solutions exactes, puis les encodons comme des polynômes en variables auto-adjointes.

2.1..1 Relations de racines

Les relations de racines expriment l'addition et la multiplication dans l'anneau de coefficients comme des identités entre matrices élémentaires. Nous commençons par introduire les sous-groupes de racines et les symboles générateurs correspondants.

Pour tout sous-groupe additif $W \subseteq \mathbb{F}_8[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, écrivons

$$e_{ij}(W) = \{e_{ij}(q) : q \in W\}, \quad e_{ij}(q) = I_3 + qE_{ij} \quad (i \neq j).$$

Ainsi $e_{ij}(q)$ est une seule matrice élémentaire, tandis que $e_{ij}(W)$ est un sous-groupe entier. L'identité

$$e_{ij}(a)e_{ij}(b) = e_{ij}(a + b)$$

identifie ce sous-groupe au groupe additif de W . Comme l'anneau de coefficients est de caractéristique deux, toute telle matrice satisfait $e_{ij}(q)^2 = I_3$.

L'espace de paramètres dans le troisième sous-groupe générateur est

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{F}_8 + \mathbb{F}_8\xi_1 + \mathbb{F}_8\xi_2 + \mathbb{F}_8\xi_3 \\ &= \{a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_8\}. \end{aligned}$$

C'est l'espace vectoriel des polynômes affines linéaires sur $\mathbb{F}_8$, de dimension quatre; il n'est pas fermé sous la multiplication. Dans $e_{12}(\mathbb{F}_8)$ et $e_{23}(\mathbb{F}_8)$, l'entrée indiquée parcourt les constantes de $\mathbb{F}_8$, tandis que

$$e_{31}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix} : q \in V \right\}.$$

Ces trois sous-groupes finis ont pour ordres 8, 8 et 8^4 , respectivement, et engendrent H :

$$H = \langle e_{12}(\mathbb{F}_8), e_{23}(\mathbb{F}_8), e_{31}(V) \rangle.$$

Pour le voir, utiliser les identités de matrices élémentaires

$$[e_{12}(a), e_{23}(b)] = e_{13}(ab), \quad [e_{12}(a), e_{31}(b)] = e_{32}(ab), \quad [e_{23}(a), e_{31}(b)] = e_{21}(ab).$$

Le signe moins usuel dans l'identité du milieu disparaît en caractéristique deux. Comme $\mathbb{F}_8 \subseteq V$, ces identités produisent d'abord toutes les matrices élémentaires constantes. Conjuguer $e_{31}(V)$ par ces matrices donne ensuite $e_{ij}(V)$ pour tous $i \neq j$. Les identités

$$e_{ij}(p)e_{ij}(q) = e_{ij}(p+q), \quad [e_{ik}(p), e_{kj}(q)] = e_{ij}(pq) \quad (i, j, k \text{ distincts})$$

produisent tous les coefficients monomiaux par récurrence sur le degré et tous les coefficients polynomiaux par addition. Ainsi, les paramètres affines linéaires dans V suffisent à engendrer le groupe entier H .

Les trois premières identités de commutateurs expliquent aussi les familles de racines supplémentaires $e_{13}(\mathbb{F}_8)$, $e_{32}(V)$ et $e_{21}(V)$. Chacune centralise les deux sous-groupes de racines qui la produisent. En conséquence, ces familles sont centrales dans les sous-groupes de Heisenberg correspondants, non dans tout H .

En utilisant la $\mathbb{F}_2$ -base $1, \alpha, \alpha^2$ de $\mathbb{F}_8$, les trois groupes de paramètres additifs ont des bases de tailles 3, 3 et 12. Ceux-ci donnent les 18 générateurs de racines de base dans les trois premières lignes du tableau ci-dessous. Posons $I = \{0, 1, 2\}$, $L = \{0, 1, 2, 3\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $D^{(2)} = \{(a, b) \in D^2 : a \neq b\}$, et $\xi_0 = 1$. L'indice $r \in I$ spécifie le coefficient de base α^r , tandis que $\ell \in L$ spécifie le monôme ξ_ℓ ; la lettre spécifie la position de la matrice élémentaire. Les 54 symboles suivants sont des involutions de groupe, pas encore des coordonnées libres :

variable	indices	racine assignée dans H	nombre
x_r	$r \in I$	$e_{12}(\alpha^r)$	3
y_r	$r \in I$	$e_{23}(\alpha^r)$	3
$z_{\ell,r}$	$(\ell, r) \in L \times I$	$e_{31}(\alpha^r \xi_\ell)$	12
c_r	$r \in I$	$e_{13}(\alpha^r)$	3
$d_{\ell,r}$	$(\ell, r) \in L \times I$	$e_{32}(\alpha^r \xi_\ell)$	12
$e_{\ell,r}$	$(\ell, r) \in L \times I$	$e_{21}(\alpha^r \xi_\ell)$	12
$p_{\{a,b\},r}$	$1 \leq a < b \leq 3, r \in I$	$e_{31}(\alpha^r \xi_a \xi_b)$	9

(10)

Les trois premières lignes donnent les 18 racines génératrices, les trois suivantes les 27 racines centrales dans les paires correspondantes, et la dernière ligne les neuf racines de produits.

Nous sélectionnons maintenant les relations de racines finies. Chacune des six familles x, y, z, c, d, e commute internement, chaque paire non ordonnée étant incluse une fois. De plus, tout c_r commute avec tous les x_s, y_s ; tout $d_{\ell,r}$ commute avec tous les $x_s, z_{m,s}$; et tout $e_{\ell,r}$ commute avec tous les $y_s, z_{m,s}$. Ce sont précisément 585 équations de commutation, avec les indices dans I et L comme ci-dessus.

Pour un triplet $a = (a_0, a_1, a_2)$ appartenant à c, d_ℓ ou e_ℓ , l'addition dans le corps fini fournit les mots

$$a^{[r]} = a_r \quad (r \in I), \quad a^{[3]} = a_0 a_1, \quad a^{[4]} = a_1 a_2, \quad (11)$$

puisque $\alpha^3 = 1 + \alpha$ et $\alpha^4 = \alpha + \alpha^2$. Les équations de croisement sont

$$\begin{aligned} x_i y_j &= c^{[i+j]} y_j x_i \quad (i, j \in I), \\ x_i z_{\ell,j} &= d_\ell^{[i+j]} z_{\ell,j} x_i \quad (\ell \in L, i, j \in I), \\ y_i z_{\ell,j} &= e_\ell^{[i+j]} z_{\ell,j} y_i \quad (\ell \in L, i, j \in I). \end{aligned} \quad (12)$$

Ici $i + j$ est une somme entière ordinaire, pas une somme modulo trois. Notons $\mathcal{R}_H$ la famille consistant en les 585 équations de commutation et les 81 équations de croisement ci-dessus.

2.1..2 Relations entières

Les relations entières fournissent la seconde entrée spectrale, associée à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Les relations de compression relient cette entrée à H en prescrivant l'action des cisaillements entiers choisis sur ses générateurs.

Pour $a, b \in D$ distincts, soit $T_{ab} = I_3 + E_{ab} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. En agissant par conjugaison, nous identifions T_{ab} avec $(I_3, T_{ab}) \in G$. Soit U_{ab} le symbole correspondant dans le premier facteur de Λ , et soit t le symbole pour la copie de T_{12} dans le second facteur. Sous l'action sur les exposants des colonnes,

$$T_{ab}(\xi_b) = \xi_a \xi_b, \quad T_{ab}(\xi_\ell) = \xi_\ell \quad (\ell \neq b).$$

Ainsi T_{ab} préserve l'anneau de polynômes et

$$T_{ab} H T_{ab}^{-1} \subseteq H.$$

Son inverse, cependant, envoie ξ_b sur $\xi_a^{-1} \xi_b$, qui est en dehors de l'anneau de polynômes. Le couple ordonné (a, b) enregistre que ξ_b est multiplié par ξ_a , tandis que le produit résultant $\xi_a \xi_b$ ne dépend que de la paire non ordonnée $\{a, b\}$.

Pour les six symboles U_{ab} , nous sélectionnons les quinze identités suivantes :

$$\begin{aligned} U_{ij} U_{ik} &= U_{ik} U_{ij} & (i \in D, j < k \text{ dans } D \setminus \{i\}), \\ U_{ji} U_{ki} &= U_{ki} U_{ji} & (i \in D, j < k \text{ dans } D \setminus \{i\}), \\ U_{ij} U_{jk} &= U_{ik} U_{jk} U_{ij} & (i, j, k \in D \text{ deux à deux distincts}), \\ U_{ij} U_{ji}^{-1} U_{ij} &= U_{ji}^{-1} U_{ij} U_{ji}^{-1} & (i < j \text{ dans } D). \end{aligned} \tag{13}$$

Notons cette famille indexée par $\mathcal{R}_K$. Ses quatre parties contiennent respectivement 3, 3, 6 et 3 équations, exprimant la commutation dans les lignes et colonnes, les identités de Steinberg, et les identités pour les racines opposées. Nous utilisons ces équations à travers les réductions par certificat fini et les bornes d'erreur établies dans le Lemme 7 ; aucune présentation de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ n'est requise.

2.1..3 Relations de produits

Les relations de produits spécifient les éléments de racines correspondant aux monômes $\xi_a \xi_b$ introduits par les cisaillements entiers. L'identité de matrices élémentaires

$$[e_{32}(\alpha^r \xi_a), e_{21}(\xi_b)] = e_{31}(\alpha^r \xi_a \xi_b)$$

donne les 18 équations suivantes :

$$d_{a,r} e_{b,0} = p_{\{a,b\},r} e_{b,0} d_{a,r} \quad ((a, b) \in D^{(2)}, r \in I). \tag{14}$$

Notons cette famille indexée par $\mathcal{R}_{\text{prod}}$. Comme $\xi_a \xi_b = \xi_b \xi_a$, les couples ordonnés (a, b) et (b, a) partagent la même cible $p_{\{a,b\},r}$. Les deux équations sont retenues, exprimant cette cible comme un commutateur de deux manières.

2.1..4 Relations de compression commune

Les relations de compression prescrivent la conjugaison directe des 18 générateurs de racines de base par les cisaillements entiers. Pour $(a, b) \in D^{(2)}$, définissons les cibles

$$z_{\ell,r}^{ab} = \begin{cases} p_{\{a,b\},r}, & \ell = b, \\ z_{\ell,r}, & \ell \neq b. \end{cases} \quad (15)$$

Nous imposons

$$\begin{aligned} U_{ab}x_r &= x_r U_{ab}, & U_{ab}y_r &= y_r U_{ab} & (r \in I), \\ U_{ab}z_{\ell,r} &= z_{\ell,r}^{ab} U_{ab} & & & (\ell \in L, r \in I). \end{aligned} \quad (16)$$

Nous imposons aussi ces équations avec $(a, b) = (1, 2)$ et U_{12} remplacé par t . Chacun des sept symboles d'action contribue $3+3+12 = 18$ équations, donnant une famille $\mathcal{R}_{\text{comp}}$ de 126 équations. Les sept symboles d'action utilisent les mêmes symboles de racines et cibles de produits. En particulier, $u := U_{12}$ et t ont la même conjugaison prescrite sur tous les 18 générateurs de racines de base, y compris $h := z_{2,0}$. Leurs conjugaisons coïncident donc sur le sous-groupe engendré par ces racines.

La famille complète de relations indexées est

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_H \sqcup \mathcal{R}_K \sqcup \mathcal{R}_{\text{prod}} \sqcup \mathcal{R}_{\text{comp}}, \quad |\mathcal{R}| = 666 + 15 + 18 + 126 = 825. \quad (17)$$

À ce stade, les symboles de racines sont requis d'être des involutions, et les sept symboles d'action doivent être unitaires. Dans l'encodage polynomial ci-dessous, chaque relation indexée $\rho \in \mathcal{R}$ reçoit un résidu spécifié, avec toutes les étiquettes et multiplicités préservées.

2.2. Solutions matricielles exactes et obstruction de groupe

Les relations sélectionnées forcent les conjugués inverses $u^{-1}hu$ et $t^{-1}ht$ à coïncider dans les solutions matricielles exactes, bien qu'ils restent distincts dans le double de groupe Λ . Dans le modèle de groupe,

$$\begin{aligned} uhu^{-1} &= tht^{-1} = p_{\{1,2\},0} = e_{31}(\xi_1\xi_2) \in H, \\ u^{-1}hu &= e_{31}(\xi_1^{-1}\xi_2) \text{ dans le premier facteur,} & t^{-1}ht &= e_{31}(\xi_1^{-1}\xi_2) \text{ dans le second facteur.} \end{aligned} \quad (18)$$

Les conjugués inverses sont en dehors de H dans différents facteurs, donc ils sont distincts par la forme normale amalgamée. Ce sont les deux involutions comparées par le polynôme.

Le cas matriciel repose sur une observation simple : une conjugaison unitaire qui envoie une sous-algèbre matricielle en elle-même doit l'envoyer sur elle-même. Par conséquent, deux telles conjugaisons qui coïncident sur la sous-algèbre ont aussi le même inverse là. Le résultat suivant applique cette observation à nos relations ; les sections ultérieures la rendent quantitative.

Lemme 3. *Toute solution exacte de $\mathcal{R}$ dans $M_d(\mathbb{C})$, avec les symboles de racines représentés par des involutions auto-adjointes et les symboles d'action par des unitaires, satisfait*

$$u^*hu = t^*ht, \quad u = U_{12}, \quad h = z_{2,0}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} \subseteq M_d(\mathbb{C})$ la $*$ -algèbre unifère engendrée par $x_r, y_r, z_{\ell,r}$. Prendre $j = 0$ dans (12) exprime $c_r, d_{\ell,r}, e_{\ell,r}$ comme des commutateurs de groupe de ces générateurs, donc ils appartiennent à $\mathcal{B}$. L'équation (14) donne alors $p_{\{a,b\},r} \in \mathcal{B}$.

Les relations de compression impliquent donc

$$u\mathcal{B}u^* \subseteq \mathcal{B}, \quad \text{Ad}(u)|_{\mathcal{B}} = \text{Ad}(t)|_{\mathcal{B}}.$$

Comme la conjugaison préserve la dimension et que $\mathcal{B}$ est de dimension finie, l'inclusion est une égalité. Ainsi, les deux restrictions définissent le même automorphisme de $\mathcal{B}$. En appliquant son inverse à $h \in \mathcal{B}$, on obtient

$$u^*hu = t^*ht. \quad \square$$

Les relations $\mathcal{R}_K$ ne sont pas nécessaires pour cet argument exact. La comparaison de dimensions seule, cependant, ne donne aucune tolérance d'erreur uniforme en d . Les Sections 3.–5. combinent les entrées spectrales de racines et entières pour obtenir les estimations requises pour les solutions approchées.

Le double de groupe admet des conjugués inverses distincts. Le lemme suivant établit leur non-trivialité et relie leur produit au commutateur utilisé dans [26, §5.2].

Lemme 4. *Dans Λ , les éléments $P = u^{-1}hu$ et $Q = t^{-1}ht$ sont des involutions avec $PQ \neq 1$. De plus, QP est conjugué à $[h_0, tu^{-1}]$, où $h_0 = e_{12}(\xi_2)$.*

Démonstration. Comme $h^2 = 1$, P et Q sont tous deux des involutions. La convention de colonnes donne $P = e_{31}(\xi_1^{-1}\xi_2)$ dans le premier facteur et le même élément dans le second facteur pour Q . Aucun n'appartient à H , car $\xi_1^{-1}\xi_2$ n'est pas dans l'anneau de polynômes. Ainsi PQ est un mot réduit de longueur deux et est non trivial par la forme normale amalgamée [24, Chapitre I, §1].

Considérons la matrice constante

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{F}_8) \subseteq H.$$

La multiplication directe donne $Wh_0W^{-1} = h$. L'action entière fixe W , donc W commute avec u et t . Par conséquent,

$$w := [h, tu^{-1}] = W[h_0, tu^{-1}]W^{-1}, \quad QP = t^{-1}wt. \quad (19)$$

Ces identités prouvent la conjugaison affirmée. $\square$

Pour des substitutions unitaires arbitraires de h, u, t , l'identité correspondante est $t^{-1}wt = QP^{-1}$. Donc, par invariance unitaire de la 2-norme traciale,

$$\|P - Q\|_2 = \|QP^{-1} - 1\|_2 = \|w - 1\|_2.$$

Cette annulation n'est utilisée que pour les substitutions unitaires.

En identifiant les éléments de groupe à leurs unitaires réguliers gauches, la trace canonique satisfait $\tau_\Lambda(g) = 0$ pour $g \neq 1$. Comme PQ et QP sont non triviaux,

$$\tau_\Lambda(PQ) = \tau_\Lambda(QP) = 0, \quad \tau_\Lambda((P - Q)^2) = \tau_\Lambda(2 - PQ - QP) = 2.$$

Ainsi $1 - (P - Q)^2$ a pour trace -1 dans le modèle de groupe, tandis qu'il est égal à l'identité dans toute solution matricielle exacte. Les estimations quantitatives ultérieures étendent cette séparation aux relations matricielles approchées.

2.3. Coordonnées auto-adjointes

Nous introduisons maintenant 65 variables auto-adjointes et spécifions un représentant polynomial pour chaque relation dans $\mathcal{R}$. Les 54 symboles de racines sont retenus comme coordonnées. Pour encoder les symboles d'action, nous factorisons chaque cisaillement entier en deux involutions.

Pour $b \in D$, posons

$$D_b = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3), \quad \epsilon_b = 1, \quad \epsilon_j = -1 \ (j \neq b).$$

Ces matrices appartiennent à $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ et satisfont

$$D_b^2 = I_3, \quad D_b T_{ab} D_b = T_{ab}^{-1}, \quad T_{ab} = (T_{ab} D_b) D_b.$$

Ainsi les deux facteurs de la dernière expression sont des involutions. Leurs images dans une représentation unitaire sont donc des unitaires auto-adjoints. Nous introduisons les onze symboles auto-adjoints suivants :

variable	élément de groupe assigné	facteur de Λ	nombre
$S_b \ (b \in D)$	(I_3, D_b)	premier	3
$R_{ab} \ ((a, b) \in D^{(2)})$	$(I_3, T_{ab} D_b)$	premier	6
S'	(I_3, D_2)	second	1
R'	$(I_3, T_{12} D_2)$	second	1

(20)

Avec les 54 symboles de racines, ils forment l'ensemble $\mathcal{V}_{\text{prim}}$ des 65 variables auto-adjointes primitives.

Dans la $*$ -algèbre libre sur $\mathcal{V}_{\text{prim}}$, définissons

$$\begin{aligned} U_{ab} &= R_{ab} S_b, & t &= R' S', & u &= U_{12}, & h &= z_{2,0}, \\ P &= u^* h u, & Q &= t^* h t. \end{aligned} \tag{21}$$

À la substitution de groupe prescrite, ces expressions récupèrent les symboles d'action et les deux involutions comparées ci-dessus. Sur des n -uplets de contractions auto-adjointes arbitraires, les produits U_{ab}, u, t restent des contractions mais pas nécessairement des unitaires. Néanmoins, P et Q sont des contractions auto-adjointes, car

$$\|u^* h u\| \leq \|u\|^2 \|h\| \leq 1, \quad \|t^* h t\| \leq \|t\|^2 \|h\| \leq 1.$$

Nous spécifions ensuite les représentants des mots d'addition de racines dans (11). Leurs facteurs commutent sur les solutions exactes, mais un produit ordinaire de contractions auto-adjointes arbitraires n'est pas nécessairement auto-adjoint. Nous utilisons donc le produit de Jordan. Pour chaque triplet $a = (a_0, a_1, a_2)$ dans

$$\mathcal{A} = \{c, d_0, d_1, d_2, d_3, e_0, e_1, e_2, e_3\},$$

posons

$$\begin{aligned} A \circ B &= \frac{AB + BA}{2}, \\ \hat{a}_r &= a_r \quad (r \in I), \quad \hat{a}_3 = a_0 \circ a_1, \quad \hat{a}_4 = a_1 \circ a_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Écrivons $\hat{d}_{\ell,r}$ et $\hat{e}_{\ell,r}$ pour les expressions correspondantes lorsque $a = d_\ell$ et $a = e_\ell$. Pour des contractions auto-adjointes A, B , le produit de Jordan est auto-adjoint et satisfait $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\| \leq 1$. Lorsque A et B commutent, il est égal à AB . Ainsi les expressions $\hat{a}_r$ coïncident avec $a^{[r]}$ sur les solutions exactes et restent des contractions auto-adjointes sur des n -uplets de contractions auto-adjointes arbitraires.

En remplaçant les inverses de groupe par les adjoints et chaque $a^{[r]}$ par $\hat{a}_r$ dans les équations équilibrées exhibées, on définit les résidus polynomiaux

$$E_\rho = L_\rho - R_\rho \quad (\rho \in \mathcal{R}).$$

Ces résidus ont des coefficients rationnels. Tous les mots d'action et représentants de Jordan sont des abréviations dans les mêmes 65 variables primitives. Les représentants spécifiés font partie de la construction : des formulations équivalentes d'une relation de groupe peuvent donner des résidus différents loin des solutions exactes.

Enfin, identifions les variables primitives à $X_1, \dots, X_{65}$. En utilisant l'ordre lexicographique sur $L \times I$ et $D^{(2)}$, posons

$$\begin{aligned} x_r &= X_{1+r}, & y_r &= X_{4+r}, & c_r &= X_{7+r}, & z_{\ell,r} &= X_{10+3\ell+r}, \\ d_{\ell,r} &= X_{22+3\ell+r}, & e_{\ell,r} &= X_{34+3\ell+r}, \\ p_{\{1,2\},r} &= X_{46+r}, & p_{\{1,3\},r} &= X_{49+r}, & p_{\{2,3\},r} &= X_{52+r}, \\ S_b &= X_{54+b}, & (R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{23}, R_{31}, R_{32}) &= (X_{58}, \dots, X_{63}), \\ S' &= X_{64}, & R' &= X_{65}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ainsi $X_1, \dots, X_{54}$ représentent les racines communes, $X_{55}, \dots, X_{63}$ encodent la première action entière, et X_{64}, X_{65} encodent le second cisaillement. En particulier,

$$P = X_{56}X_{58}X_{16}X_{58}X_{56}, \quad Q = X_{64}X_{65}X_{16}X_{65}X_{64}.$$

Les X_j restent des générateurs auto-adjoints libres ; aucune involution ni relation de groupe n'est imposée dans l'algèbre. La sous-section suivante combine les carrés des résidus en le polynôme séparateur.

2.4. Le polynôme séparateur et son témoin tracial

Chaque relation contribue le carré hermitien de son résidu polynomial. Leur somme s'annule sur les solutions de groupe exactes, tandis que sa trace normalisée sur un n -uplet matriciel auto-adjoint égale la somme des carrés des 2-normes des résidus. Les formules explicites ci-dessous fixent ces pénalités et le polynôme résultant, y compris ses valeurs loin des solutions exactes.

La partie de commutation de $\mathcal{R}_H$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{comm}} &= \sum_{a \in \{x,y,c\}} \sum_{r < s \text{ dans } I} |\mathcal{C}(a_r, a_s)|_*^2 + \sum_{a \in \{z,d,e\}} \sum_{(\ell,r) < (m,s) \text{ dans } L \times I} |\mathcal{C}(a_{\ell,r}, a_{m,s})|_*^2 \\ &+ \sum_{r,s \in I} \left(|\mathcal{C}(c_r, x_s)|_*^2 + |\mathcal{C}(c_r, y_s)|_*^2 \right) \\ &+ \sum_{\ell \in L} \sum_{r,s \in I} \left(|\mathcal{C}(d_{\ell,r}, x_s)|_*^2 + |\mathcal{C}(e_{\ell,r}, y_s)|_*^2 \right) \\ &+ \sum_{\ell,m \in L} \sum_{r,s \in I} \left(|\mathcal{C}(d_{\ell,r}, z_{m,s})|_*^2 + |\mathcal{C}(e_{\ell,r}, z_{m,s})|_*^2 \right). \end{aligned} \tag{24}$$

Ajouter les défauts de croisement donne

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_H = \mathcal{Q}_{\text{comm}} &+ \sum_{i,j \in I} |x_i y_j - \hat{c}_{i+j} y_j x_i|_*^2 \\ &+ \sum_{\ell \in L} \sum_{i,j \in I} \left(|x_i z_{\ell,j} - \hat{d}_{\ell,i+j} z_{\ell,j} x_i|_*^2 + |y_i z_{\ell,j} - \hat{e}_{\ell,i+j} z_{\ell,j} y_i|_*^2 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Ce sont les réalisations polynomiales des 585 commutations et 81 croisements définissant $\mathcal{R}_H$. Les équations entières dans (13), avec les adjoints à la place des inverses, donnent

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_K = \sum_{i \in D} \sum_{j < k \text{ dans } D \setminus \{i\}} &|U_{ij} U_{ik} - U_{ik} U_{ij}|_*^2 \\ &+ \sum_{i \in D} \sum_{j < k \text{ dans } D \setminus \{i\}} |U_{ji} U_{ki} - U_{ki} U_{ji}|_*^2 \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k \in D \\ \text{deux à deux distincts}}} |U_{ij} U_{jk} - U_{ik} U_{jk} U_{ij}|_*^2 \\ &+ \sum_{i < j \text{ dans } D} |U_{ij} U_{ji}^* U_{ij} - U_{ji}^* U_{ij} U_{ji}|_*^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Les équations de produits dans (14) donnent

$$\mathcal{Q}_{\text{prod}} = \sum_{(a,b) \in D^{(2)}} \sum_{r \in I} |d_{a,r} e_{b,0} - p_{\{a,b\},r} e_{b,0} d_{a,r}|_*^2. \quad (27)$$

Pour les équations de compression commune, posons

$$\mathcal{C}_{ab}(V) = \sum_{r \in I} (|V x_r - x_r V|_*^2 + |V y_r - y_r V|_*^2) + \sum_{\ell \in L} \sum_{r \in I} |V z_{\ell,r} - z_{\ell,r}^{ab} V|_*^2.$$

Ajouter ces défauts pour les sept actions et inclure les défauts d'involution primitifs :

$$\mathcal{Q}_{\text{comp}} = \sum_{(a,b) \in D^{(2)}} \mathcal{C}_{ab}(U_{ab}) + \mathcal{C}_{12}(t), \quad \mathcal{Q}_{\text{inv}} = \sum_{A \in \mathcal{V}_{\text{prim}}} (A^2 - 1)^2, \quad (28)$$

Par conséquent, la pénalité totale est

$$\mathcal{Q}_{\text{inv}} + \sum_{\rho \in \mathcal{R}} E_{\rho}^* E_{\rho} = \mathcal{Q}_{\text{inv}} + \mathcal{Q}_H + \mathcal{Q}_K + \mathcal{Q}_{\text{prod}} + \mathcal{Q}_{\text{comp}}.$$

Les 890 carrés de pénalité correspondent aux 825 relations choisies et aux 65 défauts d'involution primitifs.

Pénalité	Relations encodées	Carrés	Degré maximal
$\mathcal{Q}_{\text{inv}}$	Involutions primitives	65	4
$\mathcal{Q}_H$	Commutation de racines et croisement	666	8
$\mathcal{Q}_K$	Matrices élémentaires entières	15	12
$\mathcal{Q}_{\text{prod}}$	Multiplication de monômes	18	6
$\mathcal{Q}_{\text{comp}}$	Cibles de compression commune	126	6

Nous fixons maintenant la tolérance d'erreur δ et le coefficient de pénalité μ :

$$J = 2^{2^{1122000}}, \quad \delta = 2^{-J}, \quad \mu_0 = 2^{2J+26}, \quad \mu = 16\mu_0 = 2^{2J+30}. \quad (29)$$

Le Lemme 19 vérifie que δ est suffisamment petit pour les estimations quantitatives. Définissons le polynôme séparateur par

$$\boxed{f = 1 - (u^*hu - t^*ht)^2 + \mu(\mathcal{Q}_{\text{inv}} + \mathcal{Q}_H + \mathcal{Q}_K + \mathcal{Q}_{\text{prod}} + \mathcal{Q}_{\text{comp}})}. \quad (30)$$

Pour un n -uplet de contractions matricielles auto-adjointes A , cela donne

$$\text{tr}_d f(A) = 1 - \|P(A) - Q(A)\|_2^2 + \mu \left(\sum_{B \in \mathcal{V}_{\text{prim}}} \|B(A)^2 - 1\|_2^2 + \sum_{\rho \in \mathcal{R}} \|E_\rho(A)\|_2^2 \right).$$

Cette identité explique le rôle des pénalités. Lorsque le défaut total est petit, les estimations quantitatives forcent $P(A)$ et $Q(A)$ à être proches, avec des bornes indépendantes de la taille de la matrice. Lorsque le défaut est grand, le terme de pénalité domine la contribution négative possible. La Section 5. prouve $\text{tr}_d f(A) \geq 3/4$ pour le coefficient μ spécifié ci-dessus.

Nous spécifions maintenant la substitution de groupe dans les coordonnées $X_1, \dots, X_{65}$, en utilisant les valeurs de réflexion des racines et des actions dans (10) et (20), avec l'ordre fixé par (23).

Pour $A \in \text{SL}_3(\mathbb{Z})$, soit α_A fixant $\mathbb{F}_8$ et agissant par $\alpha_A(\xi^v) = \xi^{Av}$, en s'étendant entrée par entrée aux matrices. La multiplication dans G est alors

$$(M, A)(N, B) = (M\alpha_A(N), AB).$$

Assignons à chaque symbole de racine sa valeur dans (10) dans le sous-groupe commun H , et à chaque réflexion d'action sa valeur dans (20) dans le facteur indiqué de Λ . Soit $s_B \in \Lambda$ la valeur d'une variable primitive B . Comme tout s_B est une involution, le n -uplet

$$a_j = \lambda_{s_{X_j}} \in L(\Lambda), \quad 1 \leq j \leq 65,$$

consiste en unitaires auto-adjoints, où λ est la représentation régulière gauche.

Les identités de matrices élémentaires vérifient les relations de racines et de produits, tandis que les identités de cisaillement vérifient les relations entières et de compression. Les représentants de Jordan coïncident avec les produits prescrits car les éléments de racines pertinents commutent. Ces produits de Jordan sont pris dans l'algèbre de groupe de caractéristique nulle $\mathbb{C}[\Lambda]$. Ainsi tous les résidus de relations et défauts d'involution primitifs s'annulent.

Le n -uplet réalise donc la substitution de groupe de la Section 2.2. et satisfait (3).

3. Certificats spectraux et correction

Cette section dérive des estimations spectrales quantitatives à partir des relations finies. Nous transférons d'abord deux certificats spectraux dans les algèbres de groupe vers des substitutions matricielles, puis adaptons les constructions de correction dans [2, Sections 2–5] avec des bornes d'erreur explicites et des tolérances. Ces estimations préparent la reconstruction des commutants approchés en Section 4.. Le lien général entre la propriété (T) et les certificats consistant en carrés hermitiens est donné par Ozawa [20, Théorème principal].

3.1. Le certificat de corps fini

La structure de Heisenberg par paires des sous-groupes de racines suivants donne un petit certificat rationnel. Posons

$$V = \mathbb{F}_8 \oplus \mathbb{F}_8 \xi_1 \oplus \mathbb{F}_8 \xi_2 \oplus \mathbb{F}_8 \xi_3, \quad U_1 = e_{12}(\mathbb{F}_8), \quad U_2 = e_{23}(\mathbb{F}_8), \quad U_3 = e_{31}(V).$$

Leurs ordres sont 8, 8, 4096, et ils engendrent H par l'argument de la Section 2.1.1. Soient

$$P_i = \frac{1}{|U_i|} \sum_{g \in U_i} g, \quad Q_i = 1 - P_i, \quad \Delta = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad D_H = \frac{\Delta}{6}. \quad (31)$$

Chaque P_i est une projection auto-adjointe dans $\mathbb{Q}[H]$. Pour chaque paire U_i, U_j , le groupe de Heisenberg fini a pour forme normale $X(a)Y(v)Z(z)$ avec $a \in \mathbb{F}_8$, $v, z \in \mathbb{F}_8^m$, où $m = 1, 4, 4$ pour 12, 13, 23. Sa multiplication est

$$(a, v, z)(a', v', z') = (a + a', v + v', z + z' + a'v).$$

La classification des petits groupes [25, §8.2, Proposition 25] et la décomposition à deux projections [11, Théorème 2] donnent

$$\text{spec}(2 - P_i - P_j) \subseteq \{0, 1, 2, 1 - 1/\sqrt{8}, 1 + 1/\sqrt{8}\}. \quad (32)$$

En effet, la seule paire d'applications moyennes qui ne commute pas est, à multiplicité près, la paire de rang un sur $(1, \dots, 1)/\sqrt{8}$ et e_0 dans $\mathbb{C}^8$. C'est la méthode standard des sous-groupes de racines finis [9].

Nous interpolons ensuite une somme de carrés rationnelle sur ce spectre à cinq points. Posons $A_{ij} = 2 - P_i - P_j$ et définissons

$$\begin{aligned} E_1(t) &= t(t-2)(8(t-1)^2 - 1), & E_2(t) &= \frac{1}{14}t(t-1)(8(t-1)^2 - 1), \\ E_*(t) &= -\frac{64}{7}t(t-2)(t-1)^2, & V_*(t) &= (t - 21/32)E_*(t), \end{aligned}$$

et $m(t) = t(t-1)(t-2)((t-1)^2 - 1/8)$. L'identité rationnelle suivante peut être vérifiée par division, ou directement sur les cinq valeurs spectrales comme montré ci-dessous :

$$t^2 - \frac{5}{8}t \equiv \frac{3}{8}E_1(t)^2 + \frac{11}{4}E_2(t)^2 + 2V_*(t)^2 + \frac{7}{512}E_*(t)^2 \pmod{m(t)}. \quad (33)$$

Pour une vérification directe aux deux racines non rationnelles, poser $t = 1 + v$, $v^2 = 1/8$ et noter $2(v + 11/32)^2 + 7/512 = 1/2 + (11/8)v$. En 0, 1, 2 l'identité est immédiate ; m a des racines distinctes. En sommant les trois identités de paires, on obtient le trou global sans relations de groupe supplémentaires.

Proposition 5. *Dans $\mathbb{Q}[H]$, l'identité suivante exprime $D_H^2 - \frac{1}{24}D_H$ comme une somme de douze carrés hermitiens à poids rationnels positifs :*

$$\begin{aligned} D_H^2 - \frac{1}{24}D_H &= \sum_{i < j} \left(\frac{1}{96}E_1(A_{ij})^*E_1(A_{ij}) + \frac{11}{144}E_2(A_{ij})^*E_2(A_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{18}V_*(A_{ij})^*V_*(A_{ij}) + \frac{7}{18432}E_*(A_{ij})^*E_*(A_{ij}) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Démonstration. La représentation régulière fidèle de chaque groupe de paires fini donne $m(A_{ij}) = 0$. Ainsi (33) est valable dans son algèbre de groupe. Comme $Q_i^2 = Q_i$,

$$\sum_{i < j} \left((Q_i + Q_j)^2 - \frac{5}{8}(Q_i + Q_j) \right) = \Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta.$$

Diviser par 36. Chaque poids exhibé est un nombre rationnel positif, et chaque facteur est une somme de mots rationnels finis spécifiée. $\square$

Pour l'utilisation avec (43), former une liste ordonnée contenant chaque élément de U_1 512 fois, chaque élément de U_2 512 fois, et chaque élément de U_3 une fois. Sa longueur est

$$h_H = 12288. \quad (35)$$

Utiliser des mots binaires ordonnés dans les trois racines x , trois racines y et douze racines z . Ces mots ont une longueur d'au plus douze et incluent chaque racine de base. Les entrées identité et les répétitions sont intentionnelles. Son laplacien $1/2 - (4h_H)^{-1} \sum (s + s^{-1})$ est précisément D_H .

3.2. Transfert de relations finies

Pour utiliser le certificat sur des représentations approchées, collecter ses mots libres dans les formes normales de Heisenberg finies. Nous retenons une borne de longueur de mot afin que l'erreur résultante soit explicite.

Pour chaque paire, ordonner la $\mathbb{F}_2$ -base $1, \alpha, \alpha^2$ pour X et $\alpha^k \xi_\ell$ pour Y, Z par (ℓ, k) . Imposer les carrés, les commutations à l'intérieur d'une racine, les commutations centrales, et les croisements

$$y_{\ell k} x_i \left(x_i y_{\ell k} z (\alpha^i \alpha^k \xi_\ell) \right)^{-1}, \quad (36)$$

où $z(\cdot)$ est son développement binaire ordonné modulo $\alpha^3 + \alpha + 1$. Ceux-ci donnent $6 + 21m + 18m^2$ tests pour $m = 1, 4, 4$, donc 801 tests au total. Ils ne sont utilisés que pour les estimations d'erreur et n'ajoutent aucune pénalité à f : le compte est 666 relations de racines, 45 tests d'involution de racines, et 90 répétitions à travers les trois présentations de paires. Leurs défauts dans le système auxiliaire sont contrôlés dans la preuve du Théorème 20.

Un mot signé de longueur L se collecte en au plus $64(L + 1)^4$ étapes : retirer les signes d'inverses, faire au plus L^2 croisements, puis trier et annuler au plus $L + 3L^2$ jetons. Chaque croisement crée au plus trois lettres centrales. Ainsi, les évaluations unitaires avec erreur de relation ε satisfont

$$\|w(U) - \text{NF}(w)(U)\|_2 \leq 64(L + 1)^4 \varepsilon. \quad (37)$$

L'estimation suivante applique ce compte à la somme pondérée de carrés hermitiens précédente.

Proposition 6. *Pour toute assignation unitaire aux symboles de racines de base satisfaisant les 801 tests de présentation à une erreur inférieure à ε , soit $\mathcal{L} = I - T$ le laplacien de conjugaison de la liste moyennée. Pour toute contraction y ,*

$$\langle (\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}/24)y, y \rangle \geq -2^{64}\varepsilon. \quad (38)$$

Démonstration. Symétriser les relèvements libres des moyennes. Leurs normes de coefficients sont au plus un, et $\|A_{ij}\|_1 \leq 4$. Pour le résidu R_{ij} de (33), les estimations directes de coefficients donnent

$$\|E_1\|_1 \leq 4776, \quad \|E_2\|_1 \leq 1990/7, \quad \|E_*\|_1 \leq 38400/7, \quad \|V_*\|_1 \leq 178800/7, \quad \|R_{ij}\|_1 < 2^{31}.$$

Chaque mot résiduel a une longueur d'au plus 120, donc (37) coûte moins de $2^{34}\varepsilon$ par mot. La conjugaison sur une contraction double cette erreur. Les coefficients ayant la même forme normale s'annulent, et le résidu global est

$$\frac{1}{36} \left(\sum_{i < j} R_{ij} - \sum_i (Q_i^2 - Q_i) \right).$$

Les trois derniers termes ont chacun une norme de coefficients d'au plus deux. La forme quadratique résiduelle est donc bornée en valeur absolue par $2^{35}(3 \cdot 2^{31} + 6)\varepsilon/36 < 2^{64}\varepsilon$; tous les autres termes sont des carrés positifs. $\square$

3.3. Le certificat entier

Pour l'action entière, nous utilisons le certificat spectral de Netzer et Thom ainsi qu'une réduction finie aux quinze équations définissant $\mathcal{Q}_K$. Écrivons $v_{ij} = I_3 + E_{ij}$ dans $K = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, avec les six générateurs ordonnés en 12, 13, 21, 23, 31, 32. Soit $\mathcal{S}_{15}$ consistant en les mots relateurs LR^{-1} obtenus de (26) en remplaçant U_{ij} par v_{ij} . Ces relations découlent de la multiplication élémentaire des matrices. Pour les substitutions unitaires,

$$\|LR^* - 1\|_2 = \|L - R\|_2,$$

donc les pénalités équilibrées mesurent exactement les défauts de relateurs correspondants.

Posons

$$\Delta_K = 12 - \sum_{i \neq j} (v_{ij} + v_{ij}^{-1}), \quad D_K = \Delta_K/24.$$

Netzer et Thom [18, Section 2 et Lemme 2.1] ont établi la borne $\Delta_K^2 - \Delta_K/6 \geq 0$ au moyen d'un certificat consistant en carrés hermitiens. Après division par 24^2 , la réalisation rationnelle utilisée ici est

$$D_K^2 - \frac{1}{144} D_K = \sum_{\nu=1}^{18326} a_\nu q_\nu^* q_\nu \quad \text{dans } \mathbb{Q}[K], \quad a_\nu \in \mathbb{Q}_{>0}, \quad q_\nu \in \mathbb{Z}[F_6]. \quad (39)$$

Ici F_6 est le groupe libre sur six générateurs, envoyé sur K dans l'ordre spécifié ci-dessus. Le lemme suivant consigne les données du certificat rationnel, les réductions vérifiées à travers $\mathcal{S}_{15}$, et les bornes d'erreur résultantes pour les substitutions unitaires approchées.

Lemme 7. *Soit Z le résidu de groupe libre de (39), et groupons ses coefficients par leurs valeurs dans K . Dans chaque classe C , choisir le plus petit mot u_C par longueur et ordre lexicographique signé. Les 6764 mots de comparaison non triviaux $u_C^{-1}u$ admettent des dérivations à partir de $\mathcal{S}_{15}$ utilisant au plus treize remplacements de relations chacun. De plus,*

$$C_K = 2 \sum_C \sum_{u \neq u_C} |z_u| = \frac{238056328850089}{144000000000000} < 2. \quad (40)$$

Par conséquent, pour six unitaires quelconques V dans une algèbre tracial finie,

$$\max_{C,u} \|V(u_C^{-1}u) - 1\|_2 \leq 13 \max_{s \in \mathcal{S}_{15}} \|s(V) - 1\|_2. \quad (41)$$

Démonstration. Les données du certificat spécifient 9 692 termes non nuls dans 2 928 classes à somme nulle à valeur matricielle. Les 6 764 comparaisons se réduisent, sous annulation libre, conjugaison cyclique et inversion, à 945 classes avec les comptes de remplacement suivants :

étapes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
classes	15	165	183	195	148	109	78	22	17	8	2	1	2.

Vérifier le résidu rationnel donne (40) ; vérifier chaque chemin signifie vérifier qu'un sous-mot remplacé ab^{-1} est librement conjugué à un relateur ou son inverse et que le mot final est vide. Nous avons vérifié le certificat rationnel et les données de réduction de mots à l'aide d'arithmétique exacte. Ces données et les scripts de vérification sont disponibles auprès des auteurs sur demande. Sur les substitutions unitaires, la conjugaison et l'inversion préservent la 2-norme de chaque défaut de relateur. Chaque remplacement de relation contribue donc au plus le plus grand tel défaut. En télescopant sur au plus treize remplacements, on obtient (41). $\square$

Pour le laplacien de conjugaison $\mathcal{L}$ des six unitaires, les carrés positifs et les sommes de classes nulles donnent donc

$$\langle (\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}/144)y, y \rangle \geq -26\varepsilon \quad (\|y\| \leq 1), \quad \max_{s \in \mathcal{S}_{15}} \|s(V) - 1\|_2 < \varepsilon. \quad (42)$$

En effet, la conjugaison double chaque borne de défaut de mot, et la contribution résiduelle totale est au plus $13C_K\varepsilon < 26\varepsilon$. Seuls les quinze carrés équilibrés dans (26) entrent dans le polynôme.

3.4. Canaux et estimations standard

Nous passons maintenant d'une inégalité spectrale résiduelle à une algèbre matricielle. Pour une liste unitaire, définissons le canal paresseux et son énergie par

$$T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4h} \sum_{j=1}^h (u_j x u_j^* + u_j^* x u_j), \quad \mathcal{E}(x) = \frac{1}{4h} \sum_{j=1}^h \| [u_j, x] \|_2^2. \quad (43)$$

Alors $0 \leq T \leq I$ sur L^2 , et

$$\mathcal{E}(x) = \langle (I - T)x, x \rangle, \quad \mathcal{E}(x) \leq \|x\|_2^2. \quad (44)$$

La semi-norme $\sqrt{\mathcal{E}}$ est sous-additive et satisfait la règle du produit sur les contractions. Les espérances conditionnelles et les normes d'applications induites sont comme en Section 1.4., en particulier (9).

Pour des n -uplets unitaires $U = (U_1, \dots, U_h)$ et $V = (V_1, \dots, V_h)$ dans la même algèbre matricielle, et tout mot w de longueur $|w|$ dans les générateurs et leurs inverses, le télescopage donne

$$\|w(U) - w(V)\|_2 \leq |w| \max_j \|U_j - V_j\|_2. \quad (45)$$

Nous utilisons l'estimation de Lipschitz pour le calcul fonctionnel dans la norme de Hilbert–Schmidt [4, Lemmes VII.5.4–VII.5.5], la version rectangulaire de l'inégalité d'Araki et Yamagami [3, Théorème 1], obtenue par remplissage de zéros, et les estimations de coaire, de troncature et de complétion polaire dans [2, Lemme 2.3, Section 2.4, et (3.12)]. Tous les espaces auxiliaires utilisent le dénominateur de trace d'origine d .

Pour l'orthogonalisation, nous utilisons l'estimation explicite [2, (3.14)]. Supposons que les projections (q_i) satisfont

$$\sum_i \text{tr}_d(q_i) \leq 3, \quad \sum_i \mathcal{E}(q_i) \leq s,$$

et définissons

$$\text{def}(q) = \text{tr}_d \left(\left(1 - \sqrt{\sum_i q_i} \right)_+^2 \right).$$

Pour tout $0 < a \leq 1/4$ et $t \geq 1$, il existe des isométries partielles Z_i à projections initiales deux à deux orthogonales et $Z_i Z_i^* \leq q_i$ telles que

$$\sum_i \mathcal{E}(Z_i) \leq 2s + \frac{8e^{4t}\sqrt{s}}{a} + \frac{64}{\sqrt{t}}, \quad \text{tr}_d \left(1 - \sum_i Z_i^* Z_i \right) \leq \text{def}(q) + 4a. \quad (46)$$

Ces bornes finies retiennent les paramètres nécessaires à nos estimations quantitatives.

3.5. Correction spectrale et ses paramètres

Nous combinons l'argument de correction spectrale d'Alekseev, Liu et Thom [2, preuve du Théorème 4.3] avec leur construction d'un canal bimodulaire [2, preuve du Corollaire 5.1]. Le théorème suivant donne des tolérances explicites sous lesquelles (47) fournit les bornes de lissage et de correction nécessaires pour déterminer le coefficient de f , uniformément en la dimension de la matrice. Sa preuve utilise les estimations de lissage dans le Lemme 9 et la décomposition quantitative dans la Proposition 10.

Fixons un entier $h \geq 1$ et des paramètres rationnels $0 < \lambda < 1$, $C \geq 0$ et $0 < \theta < 1$, et posons

$$\kappa = \lambda/2, \quad c = \kappa^2/2^{28}.$$

La procédure dans (51)–(52) définit des entiers positifs L, N et un rationnel positif ε_{in} , ne dépendant que de (h, λ, C, θ) . Pour chaque projection non nulle e_i , écrivons $\tau_i(x) = \text{tr}_d(x)/\text{tr}_d(e_i)$ pour la trace normalisée sur $e_i M_d e_i$.

Théorème 8. *Soient $u_1, \dots, u_h \in \mathcal{U}(d)$, avec $T, \mathcal{E}$ comme en (43), et posons $\mathcal{L} = I - T$. Supposons que*

$$\langle (\mathcal{L}^2 - \lambda \mathcal{L})y, y \rangle \geq -C\varepsilon \quad (\|y\| \leq 1), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{in}}. \quad (47)$$

Alors les assertions suivantes sont valables.

(i) *Pour toute contraction $x \in M_d$,*

$$\|x - T^L x\|_2 \leq \kappa^{-1/2} \mathcal{E}(x)^{1/2} + \theta, \quad \mathcal{E}(T^L x)^{1/2} \leq \theta. \quad (48)$$

(ii) *Il existe une partition $1 = \sum_i e_i$ en projections non nulles et des unitaires $V_j^\pm \in \mathcal{U}(d)$, $1 \leq j \leq h$, commutant avec tout e_i et satisfaisant*

$$\sum_{j,\pm} \|V_j^\pm - u_j\|_2^2 \leq \theta^2. \quad (49)$$

Sur chaque coin $e_i M_d e_i$, le n -uplet doublé a un trou spectral scalaire d'au moins c , calculé avec un coefficient d'énergie $1/(8h)$ et une trace normalisée τ_i .

(iii) *Pour la même partition, il existe une application complètement positive unifère $F_0 : M_d \rightarrow M_d$ qui préserve la trace, est auto-adjointe sur L^2 , et est bimodulaire sur $\text{span}\{e_i\}$, telle que*

$$\begin{aligned} \|F_0^2 - F_0\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq \theta, & \|F_0 - T^L\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq \theta, \\ \max_i \|F_0|_{e_i M_d e_i} - \tau_i(\cdot) e_i\|_{2 \rightarrow 2} &\leq \theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Pour chaque j , les symboles V_j^+ et V_j^- désignent deux unitaires corrigés; les exposants sont des étiquettes, pas des exposants. La preuve est donnée à la fin de la sous-section suivante, après le Lemme 9 et la Proposition 10.

Nous fournissons maintenant des choix explicites de L , N et ε_{in} dans le Théorème 8. Les paramètres auxiliaires ci-dessous sont choisis pour assurer les estimations de lissage, de correction et de canal dans ses trois conclusions.

$$\begin{aligned} \kappa' &= \kappa/1024, & N &= \left\lceil \frac{16}{c\theta} \right\rceil, & r_I &= \frac{\theta}{16N}, & C_0 &= \frac{2^{20}}{\kappa^2}, \\ K_0 &= 4h + \frac{256h}{\kappa'}, & K_b &= 72K_0 + 128h, & K_\gamma &= \frac{3 \cdot 2^{19}}{\kappa^2} K_0 + 112h, \\ b_I &= \frac{r_I^2}{8K_b}, & a_I &= \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{r_I^2}{512h} \right\}, & t_I &= \left\lceil (192/b_I)^2 \right\rceil. \end{aligned} \quad (51)$$

Ensuite, définissons

$$\begin{aligned} \gamma &= \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\kappa^2}{2^{20}}, \frac{r_I^2}{8K_\gamma}, \frac{b_I}{222}, \frac{a_I b_I}{168 \cdot 2^{8t_I}} \right\}, \\ v &= \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{r_I^2}{128hC_0}, \frac{r_I^2}{128h}, \frac{\gamma^8}{3} \right\}, & \alpha &= v^2, & \beta &= \min \left\{ \frac{\theta}{16}, \frac{\alpha^2}{64} \right\}, \\ L &= \max \left\{ N, \left\lceil \frac{2}{\kappa\beta} \right\rceil \right\}, & \mu_I &= \frac{\beta^2}{4L^2}, & \rho &= \left(\frac{1-\lambda}{1-\kappa} \right)^2, \\ M &= \left\lceil \frac{2}{(1-\rho)\kappa\mu_I} \right\rceil, & \delta_* &= \frac{\kappa\mu_I(1-\kappa)^{2M}}{2}, & \varepsilon_{\text{in}} &= \min \left\{ 1, \frac{\delta_*}{C+1} \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Tout dénominateur est positif. La procédure n'utilise que de l'arithmétique rationnelle, des minima et maxima, des puissances entières et des plafonds, donc tous les paramètres sont explicitement déterminés par (h, λ, C, θ) .

Comme $0 < c < \kappa < 1$ et $0 < \rho < 1$, en appliquant l'inégalité de Bernoulli $(1-q)^n \leq (1+nq)^{-1}$ à ces choix, on obtient

$$(1-c)^N, (1-\kappa)^N \leq \theta/16, \quad (1-\kappa)^L \leq \beta/2, \quad \rho^M \leq \kappa\mu_I/2. \quad (53)$$

Les choix de v et β donnent aussi

$$0 < \alpha \leq 1/4, \quad 9\alpha \leq \gamma^{16}, \quad \beta \leq \alpha^2/64.$$

3.6. Filtrage et décomposition finie

Nous établissons d'abord l'estimation de filtrage spectral, puis construisons les coins en expansion. Tout au long de cette sous-section, nous travaillons sous les hypothèses du Théorème 8, avec les paramètres fixés en (51)–(52).

Une estimation de mesure spectrale retire d'abord le spectre positif bas ; c'est le seul endroit où la borne résiduelle entre.

Lemme 9. *Pour tout opérateur x de norme d'opérateur au plus un,*

$$\|x - T^L x\|_2 \leq \kappa^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}(x)} + \beta/2, \quad \mathcal{E}(T^L x) \leq \mu_I + (1 - \kappa)^{2L} \leq \beta^2/2. \quad (54)$$

Les puissances de T satisfont aussi

$$\|T^N - T^L\|_{\infty \rightarrow 2}, \quad \|T^{2N} - T^N\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \beta/2 + \theta/16. \quad (55)$$

Démonstration. Pour une contraction x , soit ν_x sa mesure spectrale pour $\mathcal{L}$, supportée dans $[0, 1]$ et de masse au plus un. Appliquer (47) à la contraction $T^M x$. Sur $[0, \kappa]$ on a $s(\lambda - s) \geq \kappa s$ et $(1 - s)^{2M} \geq (1 - \kappa)^{2M}$; sur $[\kappa, \lambda]$ l'intégrande $s(s - \lambda)$ est non positive. Sur $[\lambda, 1]$ sa partie positive pondérée est au plus $(1 - \lambda)^{2M}$. Ainsi

$$\int_{[0, \kappa]} s d\nu_x(s) \leq \frac{C\varepsilon + (1 - \lambda)^{2M}}{\kappa(1 - \kappa)^{2M}} \leq \mu_I. \quad (56)$$

En séparant le spectre en κ et en utilisant $1 - (1 - s)^L \leq Ls$, on prouve (54). La même décomposition, avec (53), prouve (55). $\square$

Nous rendons maintenant explicite l'erreur de correction dans le théorème d'Alekseev, Liu et Thom. La version finie suivante suit leur argument de sélection de projections et d'orthogonalisation avec les paramètres fixés ci-dessus. Nous contrôlons l'erreur totale sur tous les coins pour garder les bornes indépendantes de la taille de la matrice.

Proposition 10. *Il existe une partition $1 = \sum_i e_i$ en projections non nulles et $2h$ unitaires V_j^+, V_j^- commutant avec tout e_i telles que*

$$\sum_{j, \pm} \|V_j^\pm - u_j\|_2^2 \leq r_I^2.$$

Sur chaque coin, la liste de longueur $2h$ a un trou spectral scalaire $c = \kappa^2/2^{28}$, avec un coefficient d'énergie $1/(8h)$.

Démonstration. Appliquer l'argument fini de réparation de projections dans [2, preuve du Théorème 2.4] avec $\Phi = T^L$. Le Lemme 9 fournit ses bornes de défaut, et $\beta \leq \alpha^2/64$ donne une projection r_0 avec

$$\text{tr}_d(1 - r_0) \leq \kappa\beta^2/\alpha + 36\beta^2/\alpha^2 \leq \alpha.$$

Pour toute projection $p \leq r_0$ avec $\mathcal{E}(p) < \kappa \text{tr}_d(p)/64$, la même réparation fournit une projection f satisfaisant

$$\|f - p\|_2^2 \leq 36\kappa^{-1}\mathcal{E}(p), \quad \mathcal{E}(f) \leq \alpha \text{tr}_d(p), \\ \frac{1}{3} \text{tr}_d(p) \leq \text{tr}_d(f) \leq \frac{5}{3} \text{tr}_d(p).$$

Nous utilisons la sélection dans [2, preuve du Théorème 4.3, Étape 1]. Commencer avec $S_0 = 1 - r_0$. À l'étape i , poser

$$b_i = 1_{[0, \kappa/512]}(S_{i-1}), \quad w_i = \text{pol}(r_0 b_i).$$

Alors $w_i^* w_i = b_i$ et $w_i w_i^* \leq r_0$. Choisir une $p_i \leq w_i w_i^*$ non nulle de rang minimal sous la condition $\mathcal{E}(p_i) < \kappa \text{tr}_d(p_i)/64$, la réparer en f_i comme ci-dessus, et poser $S_i = S_{i-1} + f_i$. S'arrêter lorsqu'une

telle p_i n'existe plus. La terminaison finie et les bornes de trace dans la preuve citée, ainsi que l'estimation de couverture ci-dessous, donnent

$$\sum_i \text{tr}_d(p_i) \leq 8, \quad \sum_i \text{tr}_d(f_i) \leq 8/3, \quad A_* := \mathcal{E}(1 - r_0) + \sum_i \mathcal{E}(f_i) \leq 9\alpha \leq \gamma^{16}, \quad (57)$$

$$\text{tr}_d(1_{[0,\gamma]}(S_m)) \leq C_0\sqrt{\alpha}.$$

La dernière borne est l'estimation de fenêtre d'arrêt/coaire dans [2, Théorème 4.3, Étape 2] : elle donne $2^{17}\sqrt{2A_*}/\kappa^2 \leq C_0\sqrt{\alpha}$.

Pour l'étape de résolvante [2, Lemmes 3.2-3.3], poser $\lambda_0 = \gamma^2$, $R_i = (\lambda_0 + S_i)^{-1}$ et $D_i = \lambda_0(R_{i-1} - R_i)$. Les constantes finies utilisées dans cette étape sont

$$\begin{aligned} \sum_i \|[u, R_{i-1}]f_i\|_2^2 &\leq 148\lambda_0^{-3}(\|[u, 1 - r_0]\|_2^2 + \sum_i \|[u, f_i]\|_2^2), \\ \sum_i \mathcal{E}(D_i) &\leq 2696\lambda_0^{-4}A_*, \quad \sum_i \text{tr}_d(S_{i-1}^2 D_i) \leq 3\lambda_0. \end{aligned} \quad (58)$$

Pour la première constante, l'intégration dans [2, preuve du Lemme 3.2] donne $72\lambda_0^{-3} + 2\lambda_0^{-2} \leq 74\lambda_0^{-3}$ pour les unitaires auto-adjoints, et leur dilatation deux par deux donne 148. Pour la seconde, utiliser la factorisation $D_i = X_i X_i^*$, $X_i = \sqrt{\lambda_0} R_{i-1} f_i (I + f_i R_{i-1} f_i)^{-1/2}$: son commutateur est au plus $2\lambda_0^{-3/2} \|[u, f_i]\|_2 + \frac{3}{2}\lambda_0^{-1/2} \|[u, R_{i-1}]f_i\|_2$. Élever au carré et sommer donne $4(8 + \frac{9}{2} \cdot 148) = 2696$.

La coaire sur $[\gamma, 2\gamma]$ et le calcul de couverture dans [2, Lemme 3.3] fournissent des projections q_i avec $\text{rank } q_i \leq \text{rank } f_i$ et

$$\sum_i \mathcal{E}(q_i) \leq 37\gamma^2, \quad \sum_i \text{tr}_d(q_i) \leq 8/3, \quad \sum_i \text{tr}_d(S_{i-1}^2 q_i) \leq 3\gamma, \quad \text{def}(q) \leq \alpha + C_0\sqrt{\alpha} + 7\gamma.$$

Comme $0 < a_I \leq 1/4$ et $t_I \geq 1$, nous pouvons appliquer (46) avec $a = a_I$ et $t = t_I$. Pour les isométries partielles résultantes Z_i , poser

$$B_* = \sum_i \mathcal{E}(Z_i), \quad P_i = Z_i^* Z_i, \quad P_0 = 1 - \sum_i P_i, \quad Q_i = Z_i Z_i^*.$$

L'énergie totale satisfait

$$B_* \leq 74\gamma^2 + 56 \cdot 2^{8t_I} \gamma / a_I + 64/\sqrt{t_I} \leq b_I.$$

La partition initiale résultante $(P_i)_{i \geq 0}$ a $\text{tr}_d(P_0) \leq \alpha + C_0\sqrt{\alpha} + 7\gamma + 4a_I$. Le pincement et la complétion polaire donnent des unitaires W_j la réduisant avec $\sum_j \|W_j - u_j\|_2^2 \leq 32hB_*$. Comme dans [2, (4.12)], définissons

$$\Delta_{j,i}^\pm = u_j^{\pm 1} Z_i - Z_i W_j^{\pm 1}, \quad \xi_i = \frac{1}{2h} \sum_{j,\pm} \|\Delta_{j,i}^\pm\|_2^2 + 2\text{tr}_d((1 - b_i)Q_i).$$

L'inégalité de rang minimal transportée de [2, Théorème 4.3, Étape 3, (4.13)] est

$$\mathcal{E}_W(q) \geq \kappa' \text{tr}_d(q) - \xi_i \quad (q \leq P_i, \text{rank } q \leq \text{rank } P_i/2), \quad \sum_i \xi_i \leq 72B_* + 3 \cdot 2^{19} \gamma / \kappa^2.$$

En effet, la règle du produit et $\sum_i P_i \leq 1$ donnent

$$\sum_{j,i,\pm} \|\Delta_{j,i}^\pm\|_2^2 \leq 16hB_* + 4 \sum_j \|W_j - u_j\|_2^2 \leq 144hB_*.$$

Aussi $Q_i \leq q_i$ et $1 - b_i \leq (512/\kappa)^2 S_{i-1}^2$, donc

$$\sum_i \text{tr}_d((1 - b_i)Q_i) \leq (512/\kappa)^2 \sum_i \text{tr}_d(S_{i-1}^2 q_i) \leq 3 \cdot 2^{18} \gamma / \kappa^2.$$

Ces deux bornes donnent la somme affirmée des ξ_i .

Enfin appliquer [2, Lemme 4.2] ; il donne un trou scalaire $(\kappa')^2/256 = c$. Séparer le coin exceptionnel en blocs de rang un, sur lesquels l'inégalité de trou scalaire est vide. Sa borne d'édition explicite, combinée avec les estimations précédentes, est

$$\sum_{j,\pm} \|V_j^\pm - u_j\|_2^2 \leq K_b B_* + K_\gamma \gamma + 16h\alpha + 16hC_0\sqrt{\alpha} + 64ha_I \leq 5r_I^2/8.$$

Chaque terme de la somme est au plus $r_I^2/8$ par (51)-(52). $\square$

Preuve du Théorème 8. La partie (i) découle du Lemme 9, puisque $\beta \leq \theta/16$. La partie (ii) découle de la Proposition 10, puisque $r_I \leq \theta$.

Pour la partie (iii), définissons le canal paresseux du n -uplet doublé corrigé par

$$Q_0(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8h} \sum_{j,\pm} (V_j^\pm x (V_j^\pm)^* + (V_j^\pm)^* x V_j^\pm), \quad F_0 = Q_0^N.$$

Les deux applications sont unifères, complètement positives, préservant la trace, auto-adjointes sur L^2 , et bimodulaires sur $\text{span}\{e_i\}$. De plus, $0 \leq Q_0 \leq I$ sur L^2 . Le trou spectral scalaire sur chaque coin donne donc

$$\max_i \|F_0|_{e_i M_d e_i} - \tau_i(\cdot) e_i\|_{2 \rightarrow 2} \leq (1 - c)^N \leq \theta/16.$$

L'estimation d'édition et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent

$$\|Q_0 - T\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \frac{1}{2h} \sum_{j,\pm} \|V_j^\pm - u_j\|_2 \leq \frac{r_I}{\sqrt{2h}} \leq r_I.$$

Comme Q_0 et T sont contractants à la fois en norme d'opérateur et en 2-norme, le télescope donne

$$\|Q_0^k - T^k\|_{\infty \rightarrow 2} \leq k r_I \quad (k \geq 1).$$

En utilisant (55), $N r_I = \theta/16$, et $\beta \leq \theta/16$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|F_0 - T^L\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq N r_I + \|T^N - T^L\|_{\infty \rightarrow 2} \\ &\leq N r_I + \beta/2 + \theta/16 \leq 5\theta/32, \\ \|F_0^2 - F_0\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq 2N r_I + \|T^{2N} - T^N\|_{\infty \rightarrow 2} + N r_I \\ &\leq 3N r_I + \beta/2 + \theta/16 \leq 9\theta/32. \end{aligned}$$

Ces estimations prouvent (50). $\square$

4. Normalisation quantitative des commutants approchés

Les relations de compression donnent une inclusion approchée dans une direction, tandis que l'argument de réflexion exige aussi la réciproque. Nous combinons le théorème de reconstruction d'Alekseev, Liu et Thom [2, Théorème 5.2] avec la correction relative de Thom, l'argument de médiane conditionnelle, et l'estimation pour l'inclusion réciproque [26, Proposition 3.1, Lemme 4.1, et Théorème 4.2]. Notre tâche supplémentaire est de contrôler les centres et de spécifier explicitement les tolérances finies nécessaires au polynôme fixé f , qui ne sont pas spécifiées par les conclusions d'ultraproduit.

Pour des $*$ -sous-algèbres unifères $E, A \subseteq M_d$, écrivons $E \subseteq_\nu A$ si toute contraction $x \in E$ satisfait $\|x - E_A x\|_2 \leq \nu$. Par les propriétés de contraction et de projection des espérances conditionnelles rappelées en Section 1.4., ceci est équivalent à

$$\|(I - E_A)|_E\|_{\infty \rightarrow 2} = \|(I - E_A)E_E\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \nu;$$

voir aussi [7], [26, (2.1)], et [23, Remarque 6.6]. Ainsi l'inclusion proche est une approximation uniforme en 2-norme sur la boule unité de la norme d'opérateur. Fixons

$$k = 2^{-9}, \quad r = 2^{-17335}, \quad \eta = 2^{-17313}. \quad (59)$$

La réciproque suivante est le seul énoncé de normalisation utilisé plus tard.

Théorème 11. *Soient $d, m \geq 1$, soient $A, B \subseteq M_d$ des $*$ -sous-algèbres unifères, et soient $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{U}(d)$. Posons $\mathcal{E}_V(x) = (4m)^{-1} \sum_{j=1}^m \|[V_j, x]\|_2^2$. Supposons*

$$\begin{aligned} \|x - E_B x\|_2 &\leq k^{-1/2} \mathcal{E}_V(x)^{1/2} + r & (\|x\| \leq 1), \\ \max_j \|[V_j, b]\|_2 &\leq r & (b \in B, \|b\| \leq 1), \end{aligned} \quad (60)$$

et $V_j^* A V_j \subseteq_\eta A$ pour tout j . Alors

$$V_j A V_j^* \subseteq_{2^{-20}} A \quad (1 \leq j \leq m). \quad (61)$$

Les approximants dans A peuvent être choisis comme des contractions, uniformément en d et m .

La preuve est donnée à la fin de cette section. Elle exige des estimations uniformes pour les centres et pour les blocs matriciels de tailles variables, que les résultats de perturbation pour une algèbre source fixée ne fournissent pas à eux seuls.

4.1. Reconstruction et commutants approchés

Sur une algèbre matricielle finie, un idempotent complètement positif unifié préservant la trace est l'espérance conditionnelle sur son image. Nous utilisons des arguments standard de dilatation et de domaine multiplicatif [21, Chapitres 3 et 4]; voir aussi [22, Théorèmes 6.1.8 et 6.2.2].

Notre tâche est d'approximer une application presque idempotente par une espérance conditionnelle sur une sous-algèbre. Nous suivons l'argument de reconstruction d'Alekseev, Liu et Thom [2, preuve du Théorème 5.2], sous les hypothèses de bimodularité et de coins scalaires énoncées ci-dessous. La proposition suivante donne des tolérances explicites indépendantes de la dimension de la matrice.

Proposition 12. Soit $1 = \sum_{i=1}^m e_i$ une partition en projections non nulles dans M_d , et posons $D_0 = \text{span}\{e_i\}$. Supposons que $F_0 : M_d \rightarrow M_d$ soit unifère, complètement positive, préservant la trace, auto-adjointe sur L^2 , et D_0 -bimodulaire. Écrivons

$$m_i = \text{rank } e_i, \quad \tau_i(x) = \frac{\text{Tr}(x)}{m_i} \quad (x \in e_i M_d e_i).$$

Étant donné $0 < \zeta < 1$, supposons que

$$\delta_0 := \|F_0^2 - F_0\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \frac{\zeta^8}{296}, \quad \sigma := \max_i \|F_0|_{e_i M_d e_i} - \tau_i(\cdot)e_i\|_{2 \rightarrow 2} \leq \frac{\zeta^8}{296}.$$

Alors il existe une $*$ -sous-algèbre unifère $A \subseteq M_d$ contenant D_0 telle que

$$\|F_0 - E_A\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \zeta.$$

Démonstration. Nous suivons la reconstruction rectangulaire dans [2, Théorème 5.2], en suivant les constantes nécessaires ici. Posons $F = F_0$ et $\rho = (\zeta/4096)^2$, donc $\delta_0, \sigma \leq \rho^4$ et $0 < \rho < 2^{-24}$. La bimodularité rend chaque rectangle $e_i M_d e_j$ invariant sous la contraction auto-adjointe F ; écrivons F_{ij} pour sa restriction. L'argument de troncature et d'appariement maximal dans [2, (5.4)–(5.5)] laisse une somme de blocs p avec

$$\text{tr}_d(1 - p) \leq 64\delta_0^2/\rho^6 \leq 64\rho^2, \quad \text{spec}(F_{ij}) \subseteq [-\rho, \rho] \cup [1 - \rho, 1]$$

pour tous les i, j retenus.

Utiliser l'énergie de Kraus $\mathcal{D}(x) = \|x\|_{\text{HS}}^2 - \text{Re } \text{Tr}(x^* F(x))$. Sa racine carrée est une semi-norme invariante par adjoint, et l'estimation de produit [2, (5.7)] donne, pour des contractions x, y ,

$$\|F(xy) - xy\|_{\text{HS}} \leq \sqrt{2}(\mathcal{D}(x)^{1/2} + \mathcal{D}(y)^{1/2}).$$

Appeler un vecteur propre élevé lorsque sa valeur propre est dans $[1 - \rho, 1]$. Pour un tel vecteur $v \in e_i M_d e_j$, poser $M = \max(m_i, m_j)$, $t = \min(m_i, m_j)$, et normaliser $\|v\|_{\text{HS}}^2 = M$. Les inégalités de moment d'ordre quatre dans [2, (5.4)] donnent $t \geq (1 - 3\rho)M$ et $\text{Tr } |v|^4 \leq (1 + 3\rho)M$. Compléter le facteur polaire en une isométrie partielle de rang t u et utiliser $(s - 1)^2 \leq (s^2 - 1)^2$ donne

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{\text{HS}}^2 &\leq \text{Tr } |v|^4 - 2M + t \leq 6\rho M, \\ \mathcal{D}(u)^{1/2} &\leq \sqrt{\rho M} + \sqrt{2}\|u - v\|_{\text{HS}} \leq 5\sqrt{\rho M}. \end{aligned}$$

Pour vérifier l'unicité de la direction propre élevée, supposons que v, w soient des vecteurs propres élevés orthogonaux normalisés comme ci-dessus, avec facteurs polaires complétés u, z . Alors $|\text{Tr}(u^* z)| \leq 2\sqrt{6}\sqrt{\rho}M$. Pour $a = u^* z$, la comparaison de rang, l'hypothèse diagonale et l'estimation de produit impliquent

$$\|\tau_j(a)e_j\|_{\text{HS}} \leq 8\sqrt{\rho M}, \quad \|a - \tau_j(a)e_j\|_{\text{HS}} \leq 10\sqrt{2}\sqrt{\rho M} + \sigma\sqrt{M} \leq 16\sqrt{\rho M}.$$

Comme $\|a\|_{\text{HS}}^2 \geq 2t - M \geq (1 - 6\rho)M$, ces bornes donneraient $1 - 6\rho \leq (8 + 16)^2\rho$, donc $1 \leq 582\rho$, une contradiction.

Pour les indices retenus, poser $i \sim j$ lorsque F_{ij} a un vecteur élevé, et choisir son facteur polaire complété u_{ij} . La réflexivité et la symétrie découlent de l'unitalité et de la préservation de l'adjoint.

Si $i \sim j \sim k$, poser $a = u_{ij}u_{jk}$ et $M_* = \max(m_i, m_j, m_k)$. La comparaison de rang et l'estimation de produit donnent

$$\begin{aligned} \|a\|_{\text{HS}}^2 &\geq \min(m_i, m_j) + \min(m_j, m_k) - m_j \geq (1 - 6\rho)M_*, \\ \|F(a) - a\|_{\text{HS}} &\leq 15\sqrt{\rho M_*}. \end{aligned}$$

Si $i \not\sim k$, alors $\|F_{ik}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \rho$, forçant $(1 - \rho)^2(1 - 6\rho) \leq 225\rho$. Le membre de gauche est au moins $1/8$, donc $1 \leq 1800\rho$, à nouveau une contradiction. Ainsi $\sim$ est une relation d'équivalence.

Dans chaque classe K , choisir un indice de rang minimal o , poser $t_K = m_o$, et poser

$$U_i = u_{io}, \quad U_o = e_o, \quad q_i = U_i U_i^*, \quad W_{ij} = U_i U_j^* \quad (i, j \in K).$$

Alors $U_i^* U_i = e_o$, donc ce sont des unités matricielles exactes, et $t_K \geq (1 - 3\rho)m_i$ pour tout $i \in K$. Pour $i, j \in K$ distincts, l'estimation de produit donne

$$\frac{\|F_{ij}(W_{ij}) - W_{ij}\|_{\text{HS}}}{\sqrt{t_K}} \leq \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1 - 3\rho}} \sqrt{\rho} \leq 15\sqrt{\rho}.$$

Soit Π_{ij} la projection sur la droite propre élevée, et soit $P_{W_{ij}}$ la projection sur $\mathbb{C}W_{ij}$. La séparation spectrale et la formule pour la distance entre projections de rang un donnent

$$\|\Pi_{ij} - P_{W_{ij}}\|_{2 \rightarrow 2} = \left\| (I - \Pi_{ij}) \frac{W_{ij}}{\sqrt{t_K}} \right\|_{\text{HS}} \leq \frac{15\sqrt{\rho}}{1 - \rho} \leq 16\sqrt{\rho}.$$

Comme $\|F_{ij} - \Pi_{ij}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \rho$, nous obtenons $\|F_{ij} - P_{W_{ij}}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \rho + 16\sqrt{\rho} \leq 41\sqrt{\rho}$. Sur les rectangles diagonaux la même borne découle de

$$\|F_{ii} - P_{q_i}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \sigma + \sqrt{1 - t_K/m_i} \leq \sigma + \sqrt{3\rho} \leq 41\sqrt{\rho};$$

entre classes distinctes, $\|F_{ij}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \rho$.

Soit A_0 engendrée par ces unités matricielles, d'unité $q = \sum_i q_i$, en prenant $q_i = 0$ sur les indices écartés. Poser $A = A_0 \oplus (1 - q)M_d(1 - q)$ et $G(x) = E_{A_0}(qxq)$. Alors $q \leq p$, $\text{tr}_d(1 - q) \leq 64\rho^2 + 3\rho \leq 4\rho$, et $D_0 \subseteq A$ car $e_i = q_i + (e_i - q_i) \in A$. Les restrictions rectangulaires de G sont $P_{W_{ij}}$ dans une classe et zéro entre classes. Leur orthogonalité donne $\|(F - G)|_{pM_d p}\|_{2 \rightarrow 2} \leq 41\sqrt{\rho}$, indépendamment du nombre de coins.

Pour une contraction x , décomposer

$$(F - E_A)(x) = F(x - p x p) + (F - G)(p x p) - (1 - q)x(1 - q).$$

En utilisant la contractivité L^2 et $\|x - p x p\|_2 \leq \sqrt{2 \text{tr}_d(1 - p)}$, nous concluons

$$\begin{aligned} \|F - E_A\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq \sqrt{2 \text{tr}_d(1 - p)} + 41\sqrt{\rho} + \sqrt{\text{tr}_d(1 - q)} \\ &\leq \sqrt{128\rho} + 43\sqrt{\rho} \leq 55\sqrt{\rho} \leq \zeta. \end{aligned}$$

□

En combinant les deux versions finies, on obtient le corollaire suivant pour les commutants approchés. La fonction ε_{in} est la procédure rationnelle en (51)-(52).

Corollaire 13. Soient $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, et soient $0 < \lambda < 1$, $C \geq 0$ et $0 < z < 1$ rationnels. Posons $\theta = z^8/2^{96}$. Pour $u_1, \dots, u_h \in \mathcal{U}(d)$, soient $T, \mathcal{E}$ comme en (43) et posons $\mathcal{L} = I - T$. Supposons

$$\langle (\mathcal{L}^2 - \lambda \mathcal{L})y, y \rangle \geq -C\varepsilon \quad (\|y\| \leq 1), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{in}}(h, \lambda, C, \theta).$$

Il existe une $*$ -sous-algèbre unifère $A \subseteq M_d$ telle que

$$\begin{aligned} \|x - E_A x\|_2 &\leq (\lambda/2)^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}(x)} + 3z & (\|x\| \leq 1), \\ \max_j \|[u_j, a]\|_2 &\leq 6\sqrt{h}z & (a \in A, \|a\| \leq 1). \end{aligned} \quad (62)$$

Démonstration. Le Théorème 8(iii) fournit un canal F_0 satisfaisant (50).

La Proposition 12, avec $\zeta = z$, donne A avec $\|E_A - T^L\|_{\infty \rightarrow 2} \leq z + \theta$. Pour une contraction $a \in A$,

$$\mathcal{E}(a)^{1/2} \leq \mathcal{E}(T^L a)^{1/2} + \|a - T^L a\|_2 \leq z + 2\theta \leq 3z.$$

La borne du commutateur découle de (43). Pour une contraction générale x , combiner (48) avec $\|E_A - T^L\|_{\infty \rightarrow 2} \leq z + \theta$ pour obtenir la première estimation. $\square$

4.2. Partitions centrales et moyennage

Avant d'appliquer la correction relative de Thom [26, Proposition 3.1], nous construisons $C \subseteq Z(A)$ à partir des données d'invariance approchée. Le lemme suivant approxime l'opérateur de Markov $E_{Z(A)}E_B|_{Z(A)}$ par une espérance de partition pour des poids d'atomes arbitraires; le lemme de moyennage suivant contrôle son défaut d'idempotence.

Lemme 14. Soit P un opérateur de Markov sur un espace de probabilité fini (Ω, μ) à poids d'atomes positifs, auto-adjoint sur $L^2(\mu)$ et satisfaisant $0 \leq P \leq I$. Si $0 < \zeta < 1$ et

$$\delta_0 := \|P^2 - P\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \zeta^{12}/2^{42},$$

alors il existe une partition $\mathcal{C}$ de Ω dont l'espérance conditionnelle satisfait $\|P - E_{\mathcal{C}}\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \zeta$. L'estimation est indépendante du nombre et des poids des atomes.

Démonstration. Posons $r = \zeta^4/2^{12}$, $\eta = r^2/64$, donc $\delta_0 \leq r^3/64$. Utiliser les poids d'arêtes symétriques $c(x, y) = \mu(x)P(x, y)$, la frontière $b(S) = \sum_{x \in S, y \notin S} c(x, y)$, et l'énergie $\mathcal{D}(f) = \frac{1}{2} \sum c(x, y)|f(x) - f(y)|^2$. Une famille disjointe maximale d'ensembles avec $\|(P - P^2)1_S\|_2 > \eta\sqrt{\mu(S)}$ a une union J de masse au plus $\delta_0^2/\eta^2 \leq r^2$: moyenner la norme au carré sur des signes indépendants de leurs indicatrices. Aucun sous-ensemble de son complément n'est mauvais.

Pour $S \subseteq \Omega \setminus J$ avec $b(S) < \mu(S)/36$, $f = P1_S$ satisfait $\|f - 1_S\|_2^2 \leq b(S)$ et $\mathcal{D}(f) \leq \eta\mu(S)$. Pour $U_t = \{f > t\}$ et $t \in [1/3, 2/3]$,

$$\mu(U_t \triangle S) \leq 9\|f - 1_S\|_2^2 \leq 9b(S) < \mu(S)/4.$$

Comme $0 \leq f \leq 1$ et $\int f d\mu = \mu(S)$, $\mu\{f \geq 1/3\} \leq 3\mu(S)$. La coaire et Cauchy-Schwarz, restreints aux arêtes avec au moins une extrémité dans cet ensemble, donnent

$$\int_{1/3}^{2/3} b(U_t) dt \leq \sqrt{3\mu(S)\mathcal{D}(f)}.$$

Ainsi une certaine coupe $U = U_t$ satisfait

$$b(U) \leq 3\sqrt{3}\sqrt{\eta}\mu(S) \leq 6\sqrt{\eta}\mu(S) \leq r\mu(U).$$

Commencer avec l'ensemble restant $R = \Omega \setminus J$. Choisir $S \subseteq R$ de masse positive minimale avec $b(S) < \mu(S)/36$, retirer $C = U \cap R$ de R , et répéter. Si aucun tel S n'existe, prendre le reste non vide comme dernière partie. Pour chaque partie sélectionnée,

$$\frac{3}{4}\mu(S) \leq \mu(C) \leq \frac{5}{4}\mu(S), \quad \mu(U) \leq \frac{5}{3}\mu(C).$$

Tout $Q \subseteq C$ non vide de masse au plus la moitié de sa masse satisfait $\mu(Q) \leq 5\mu(S)/8 < \mu(S)$, donc la minimalité donne $b(Q) \geq \mu(Q)/36$. La même conclusion tient sur le reste final par la condition d'arrêt. Inclure J comme partie exceptionnelle. En comptant chaque arête à sa première coupe, et en utilisant $b(J) \leq \mu(J) \leq r^2$, on obtient

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} b(C) \leq 2b(J) + 2 \sum_U b(U) \leq 2r^2 + \frac{10}{3}r < 6r. \quad (63)$$

Pour f réelle avec $\|f\|_\infty \leq M$, soit g une médiane sur chaque partie ordinaire et nulle sur J . En intégrant la borne d'expansion de demi-masse sur les ensembles de niveau médian positifs et négatifs, on obtient

$$\|f - g\|_1 \leq Mr + 36\left(\sqrt{\mathcal{D}(f)/2} + 12Mr\right), \quad \|f - g\|_2^2 \leq 2M\|f - g\|_1.$$

Ici les arêtes internes coûtent $\sqrt{\mathcal{D}(f)/2}$ et les arêtes entre parties coûtent au plus $2M \sum_C b(C)$. Pour une contraction réelle x , prendre $f = Px$, dont l'énergie est au plus δ_0 . Sa distance au carré à l'algèbre de partition est au plus $866r + 72\sqrt{\delta_0/2} \leq 875r$. Les parties réelle et imaginaire donnent $\|(I - E_C)P\|_{\infty \rightarrow 2} \leq 44\sqrt{r}$. Réciproquement (63) et $(I - P)^2 \leq I - P$ donnent $\|(I - P)E_C\|_{\infty \rightarrow 2} \leq 4\sqrt{r}$. En couplant l'identité

$$(P - E_C)^2 = (P^2 - P) + (I - E_C)P + (I - P)E_C$$

avec une contraction, on obtient $\|P - E_C\|_{\infty \rightarrow 2}^2 \leq \delta_0 + 48\sqrt{r} \leq 49\zeta^2/64 < \zeta^2$. $\square$

L'estimation suivante donne une partition en projections centrales à partir de l'invariance dans une direction. La preuve utilise à la fois les moyennes directes et inverses car aucune algèbre n'est supposée contenir l'autre.

Lemme 15. *Supposons que A, B, V_j, k, r satisfont (60) et $V_j^* A V_j \subseteq_\eta A$. Pour $n \geq 1$ posons*

$$e_n = \sqrt{2/(kn)} + r + n\sqrt{r}, \quad b_n = 2e_n + n(\sqrt{2\eta} + 2\eta).$$

Alors

$$\|(I - E_{Z(A)})E_B|_{Z(A)}\|_{\infty \rightarrow 2} \leq b_n. \quad (64)$$

Si $b_n \leq b = \zeta^{12}/2^{42}$ pour un certain $0 < \zeta < 1$, il existe $C \subseteq Z(A)$ avec

$$\|E_B|_{Z(A)} - E_C|_{Z(A)}\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \zeta + b \leq 2\zeta. \quad (65)$$

Démonstration. Posons $S = (I + m^{-1} \sum_j \text{Ad}(V_j))/2$ et $\Phi_n = n^{-1} \sum_{j < n} S^j$. L'identité $(I - S)\Phi_n = (I - S^n)/n$ donne une énergie au plus $2/n$ sur les contractions. Pour toute application linéaire L et contraction x , son L^2 -adjoint satisfait

$$\|Lx\|_2^2 = \langle x, L^*Lx \rangle \leq \|x\|_2 \|L^*Lx\|_2 \leq \|L^*\|_{\infty \rightarrow 2} \|Lx\|.$$

Donc $\|L\|_{\infty \rightarrow 2}^2 \leq \|L\|_{\infty \rightarrow \infty} \|L^*\|_{\infty \rightarrow 2}$. Pour $L = E_B(S - I)$, les deux facteurs sont au plus 2 et $r/2$, respectivement, donc $\|L\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \sqrt{r}$. L'estimation de Poincaré et le télescopage, aussi pour S^* , donnent donc

$$\max\{\|\Phi_n - E_B\|_{\infty \rightarrow 2}, \|\Phi_n^* - E_B\|_{\infty \rightarrow 2}\} \leq e_n. \quad (66)$$

Écrivons $P = E_A$, $Z = Z(A)$, $F = PS|_A$, $Q = E_Z S|_Z$. Pour les contractions centrales z et les contractions $a \in A$,

$$[P(V_j z V_j^*), a] = P \text{Ad}(V_j)[z, V_j^* a V_j].$$

L'inclusion proche et le moyennage sur $\mathcal{U}(A)$ donnent $\|Fz - Qz\|_2 \leq \eta$. L'étape inverse satisfait $\|(I - P)S^*|_A\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \eta$ par inclusion proche ; la dualité donne alors $\|PS(I - P)\|_{\infty \rightarrow 2} \leq \sqrt{2\eta}$. Pour tout entier $\ell \geq 0$, le télescopage donne donc

$$\begin{aligned} \|PS^\ell|_Z - Q^\ell\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq \ell(\sqrt{2\eta} + \eta), \\ \|(I - P)(S^*)^\ell|_Z\|_{\infty \rightarrow 2} &\leq \ell\eta. \end{aligned}$$

En moyennant ces bornes pour $0 \leq \ell < n$ et en utilisant (66) pour les moyennes directes et inverses, on obtient $2e_n + n(\sqrt{2\eta} + 2\eta) = b_n$, prouvant (64).

L'opérateur $P_Z = E_Z E_B|_Z$ est une contraction de Markov positive auto-adjointe et $P_Z - P_Z^2 = E_Z E_B(I - E_Z)E_B|_Z$. Son défaut d'idempotence est au plus b_n . Appliquer le Lemme 14 avec les poids de trace centraux réels, puis ajouter l'erreur perpendiculaire à Z b_n . $\square$

4.3. Normalisation des inclusions proches

Les estimations finies suivantes sont contenues dans la preuve de [26, Proposition 3.1]. Nous consignons la forme nécessaire ci-dessous, en utilisant notre notation et des constantes relâchées.

Corollaire 16. *Supposons que $E, A \subseteq M_d$ sont des $*$ -sous-algèbres unifères, $E \subseteq_\nu A$, $0 \leq \nu \leq 1/8$, et $C \subseteq E \cap A$ est unifère. Il existe un espace de dimension finie $\mathcal{K}$, une isométrie $V : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathcal{K}$, une projection R de rang D , et des représentations unifères qui commutent*

$$\sigma : E \rightarrow B(R\mathcal{K}), \quad \rho : A' \rightarrow B(R\mathcal{K}).$$

En écrivant $P = VV^*$, il existe des isométries partielles $W, Z : \mathbb{C}^d \rightarrow R\mathcal{K}$ satisfaisant

$$\|R - P\|_{\text{HS}} \leq 6\nu\sqrt{d}, \quad |D - d| \leq 32\nu^2 d, \quad (67)$$

$$\|W - V\|_{\text{HS}} \leq 12\nu\sqrt{d}, \quad d - \text{rank } W \leq 32\nu^2 d, \quad (68)$$

$$\|Z - V\|_{\text{HS}} \leq 16\nu\sqrt{d}, \quad d - \text{rank } Z \leq 64\nu^2 d, \quad (69)$$

et les identités d'entrelacement

$$Wx = \sigma(x)W \ (x \in E), \quad Zy = \rho(y)Z \ (y \in A'), \quad Zc = \sigma(c)Z \ (c \in C). \quad (70)$$

Démonstration. Appliquer la construction citée avec $(B, A, D, \varepsilon) = (E, A, C, \nu)$. Ses $Q, m, \pi_B, \pi_{A'}$ deviennent R, D, σ, ρ ; ses W et $\text{pol}(T)$ deviennent notre Z et W , où T est l'entrelaceur exact B -équivariant moyenné dans cette preuve. Les estimations de projection et de rang y impliquent les bornes correspondantes en (67)-(69), ainsi que la borne sur $\|Z - V\|_{\text{HS}}$. Pour W , comme V est une isométrie, l'argument de valeur singulière sous-jacent à la meilleure approximation polaire [12, Théorème 2.2 et Corollaire 2.3] donne

$$\|\text{pol}(T) - V\|_{\text{HS}} \leq 2\|T - V\|_{\text{HS}} \leq 4\sqrt{2}\nu\sqrt{d},$$

où $\text{pol}(T)$ désigne le facteur polaire partiel canonique de T . Ce facteur a le même rang que T et préserve ses relations d'entrelacement exactes, donnant la borne de norme restante et (70). $\square$

Pour $J = W$ ou Z , l'estimation du coin support dans [26, preuve de (3.4)] donne, pour les contractions satisfaisant $Jx = \hat{x}J$ et $Jx^* = \hat{x}^*J$,

$$\|\hat{x} - VxV^*\|_{\text{HS}} \leq \sqrt{D - \text{rank } J} + 2\|J - V\|_{\text{HS}}.$$

Avec (67)-(69), cela donne

$$\|\sigma(x) - VxV^*\|_{\text{HS}} \leq 32\nu\sqrt{d} \quad (x \in E, \|x\| \leq 1), \quad \|\hat{x} - VxV^*\|_{\text{HS}} \leq 64\nu\sqrt{d} \quad (71)$$

dans le cas entrelacé par Z , y compris les calculs fonctionnels joints bornés.

Pour l'inclusion réciproque, nous suivons l'argument de Thom [26, preuve du Théorème 4.2]. Ses quantités clés sont les rapports des tailles de blocs matriciels à leurs multiplicités et les transformées bornées définies à l'aide d'une médiane conditionnelle commune. Le Corollaire 17 contrôle le transport de ces transformées, et le Corollaire 18 fournit l'estimation résultante pour l'inclusion réciproque.

Fixons une $*$ -sous-algèbre unifère $C \subseteq Z(A)$ et $T \in \mathcal{U}(d) \cap C'$ tel que $E = T^*AT \subseteq_\nu A$, où $0 \leq \nu \leq \bar{\nu} \leq 1/8$ et $\bar{\nu} > 0$. Comme T commute avec C , nous avons $C \subseteq A \cap E$. Écrivons

$$A = \bigoplus_j (M_{b_j} \otimes I_{s_j}), \quad E = \bigoplus_i (M_{a_i} \otimes I_{r_i}),$$

avec les projections centrales minimales respectives f_j, e_i , et posons

$$\Delta_A = \sum_j \frac{b_j}{s_j} f_j, \quad \Delta_E = \sum_i \frac{a_i}{r_i} e_i = T^* \Delta_A T.$$

La médiane conditionnelle est l'élément positif inversible $M_C \in C$ déterminé par

$$F_A = \Delta_A(\Delta_A + M_C)^{-1}, \quad E_C F_A = \frac{1}{2}I.$$

Posons $F_E = T^* F_A T$.

Pour la correction fournie par le Corollaire 16, soient $r_i^\sharp$ et $b_j^\sharp$ les multiplicités des blocs M_{a_i} et M_{s_j} dans $\sigma(E)$ et $\rho(A')$, respectivement. Posons $A^\sharp = \rho(A')'$, le commutant étant pris sur l'espace corrigé. Les estimations de multiplicité précédant [26, (3.3)] donnent

$$\sum_i a_i |r_i^\sharp - r_i| \leq 160\nu^2 d, \quad \sum_j s_j |b_j^\sharp - b_j| \leq 160\nu^2 d. \quad (72)$$

Comme $\sigma(E)$ commute avec $\rho(A')$, nous avons l'inclusion exacte $\sigma(E) \subseteq A^\sharp$. Ses multiplicités de branchement m_{ij} satisfont [26, (4.2) et (4.3)]

$$b_j^\sharp = \sum_i m_{ij} a_i, \quad r_i^\sharp = \sum_j m_{ij} s_j, \quad \text{rank}(\sigma(e_i)\rho(f_j)) = a_i m_{ij} s_j. \quad (73)$$

Sur l'espace corrigé, posons

$$\Delta^- = \sum_{r_i^\sharp > 0} \frac{a_i}{r_i^\sharp} \sigma(e_i), \quad \Delta^+ = \sum_{b_j^\sharp > 0} \frac{b_j^\sharp}{s_j} \rho(f_j), \quad \widehat{M} = \sigma(M_C).$$

Les transformées bornées qui commutent satisfont [26, (4.3)-(4.4)] :

$$0 < \widehat{F}^- := \Delta^-(\Delta^- + \widehat{M})^{-1} \leq \widehat{F}^+ := \Delta^+(\Delta^+ + \widehat{M})^{-1} < R. \quad (74)$$

Les estimations de transport dans [26, preuve du Théorème 4.2] donnent le corollaire quantitatif suivant.

Corollaire 17. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\|T^*F_A T - F_A\|_2 \leq 128\sqrt{\bar{\nu}}. \quad (75)$$

Démonstration. La comparaison scalaire et le transport dans [26, (4.5)-(4.6)], avec (72), bornent chaque erreur de multiplicité au carré par $160\nu^2 d$. En ajoutant (71), on obtient

$$\|\widehat{F}^- - VF_E V^*\|_{\text{HS}} \leq 80\nu\sqrt{d}, \quad \|\widehat{F}^+ - VF_A V^*\|_{\text{HS}} \leq 80\nu\sqrt{d}. \quad (76)$$

Comme $\text{Tr } F_E = \text{Tr } F_A$, Cauchy-Schwarz sur $R \vee P$, dont le rang est au plus $D + d \leq 5d/2$, donne

$$0 \leq \text{Tr}(\widehat{F}^+ - \widehat{F}^-) \leq 320\nu d.$$

La différence est une contraction positive par (74), donc

$$\|F_E - F_A\|_2 \leq 160\nu + \sqrt{320\nu} \leq 128\sqrt{\bar{\nu}}. \quad \square$$

Nous utilisons l'estimation en dimension finie de Thom, avec sa notation de blocs et sa trace normalisée. [[26, Lemme 4.1]] Pour les sous-algèbres unifères $B \subseteq C \subseteq M_d(\mathbb{C})$, écrivons

$$B = \bigoplus_i (M_{p_i}(\mathbb{C}) \otimes I_{q_i}), \quad C = \bigoplus_j (M_{r_j}(\mathbb{C}) \otimes I_{s_j}),$$

avec les projections centrales minimales w_i, z_j , et posons

$$\Delta_B = \sum_i \frac{p_i}{q_i} w_i, \quad \Delta_C = \sum_j \frac{r_j}{s_j} z_j, \quad R = \Delta_C \Delta_B^{-1}.$$

Alors $R \geq 1$, et l'espérance conditionnelle préservant la trace satisfait

$$\sup_{a \in C, \|a\| \leq 1} \|a - E_B a\|_2 \leq \sqrt{2 \text{tr}(1 - R^{-1})}.$$

Appliquer ceci avec les algèbres sources $(B, C) = (\sigma(E), A^\sharp)$ sur $R\mathcal{K}$. Le rapport source R devient $\Theta = \Delta^+(\Delta^-)^{-1}$; l'identité devient notre projection R , et la dimension source d devient D . En multipliant l'estimation au carré par D , on convertit sa trace normalisée Tr/D en la trace non normalisée. Cela donne le corollaire suivant.

Corollaire 18. Dans le cadre précédent, supposons $z_0 \geq 0$ et $\max_{\pm} \|\hat{F}^{\pm} - R/2\|_{\text{HS}} \leq z_0\sqrt{d}$. Alors

$$\sup_{a \in A, \|a\| \leq 1} \text{dist}_2(a, E) \leq 64\bar{\nu} + 8\sqrt{z_0}, \quad (77)$$

avec des approximants dans E qui sont des contractions.

Démonstration. Pour $\Theta = \Delta^+(\Delta^-)^{-1} \geq R$, le lemme rappelé avec la substitution précédente donne

$$\sup_{x \in A^{\sharp}, \|x\| \leq 1} \|x - E_{\sigma(E)}x\|_{\text{HS}}^2 \leq 2 \text{Tr}(R - \Theta^{-1}).$$

Utiliser l'identité de [26, preuve du Théorème 4.2]

$$\Theta^{-1} = \frac{\hat{F}^-(R - \hat{F}^+)}{\hat{F}^+(R - \hat{F}^-)}.$$

En combinant la borne scalaire, pour $0 < a \leq b < 1$,

$$0 \leq 1 - \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \leq 8\left(|a - \frac{1}{2}| + |b - \frac{1}{2}|\right)$$

avec Cauchy-Schwarz et $D \leq 3d/2$, on obtient $\text{Tr}(R - \Theta^{-1}) \leq 32z_0d$. Ainsi l'erreur inverse corrigée est au plus $8\sqrt{z_0d}$. Pour $a \in A$ une contraction, transporter $ZaZ^* \in A^{\sharp}$ et son approximant par espérance conditionnelle vers l'espace d'origine. Les deux erreurs de transport sont chacune au plus $32\nu\sqrt{d}$, par (69) et (71). Diviser par $\sqrt{d}$ et $\nu \leq \bar{\nu}$ donne (77); l'approximant se relève en une contraction de E . $\square$

Preuve du Théorème 11. Posons $\zeta = 2^{-236}$, $b = \zeta^{12}/2^{42} = 2^{-2874}$, et $n = 2^{5769}$. Appliquer le Lemme 15 avec les constantes en (59). Les identités $n = 2^{12}/(kb^2)$ et $r = kb^2/(2^{40}n^2)$ donnent

$$\sqrt{2/(kn)} < b/32, \quad n\sqrt{r} < b/2^{24}, \quad r < b/2^{24}, \quad n\sqrt{2\eta} = b/8192, \quad 2n\eta < b/8192.$$

Ainsi $e_n < b/16$ et le membre de droite de (64) est inférieur à b . La seconde partie de ce lemme donne une algèbre abélienne $C \subseteq Z(A)$ avec

$$\|E_B|_{Z(A)} - E_C|_{Z(A)}\|_{\infty \rightarrow 2} \leq 2\zeta. \quad (78)$$

Sa boule unité est à 2ζ près dans B , donc ses commutateurs avec chaque V_l sont au plus $r + 4\zeta \leq 5\zeta$. Pincer V_l sur C' et compléter sa partie polaire dans chaque bloc carré. L'édition hors diagonale a une norme au plus 5ζ , en moyennant sur $\mathcal{U}(C)$, et l'édition polaire diagonale au carré est au plus cette édition hors diagonale au carré. Cela donne des unitaires $T_l \in C'$ avec

$$\|T_l - V_l\|_2 \leq 8\zeta, \quad T_l^* A T_l \subseteq_{\bar{\nu}} A, \quad \bar{\nu} = 256\zeta = 2^{-228}.$$

La dernière assertion utilise l'hypothèse $V_l^* A V_l \subseteq_{\eta} A$ et $\eta + 16\zeta \leq \bar{\nu}$.

Choisir la médiane conditionnelle M_C de Δ_A une fois pour toute la liste, de sorte que $E_C F_A = I/2$ exactement. Par le Corollaire 17 et l'édition du compresseur,

$$\|V_l^* F_A V_l - F_A\|_2 \leq 128\sqrt{\bar{\nu}} + 16\zeta \leq 2^{-106}.$$

L'estimation de Poincaré pour B et (78) impliquent

$$\|F_A - I/2\|_2 \leq k^{-1/2} 2^{-107} + r + 2\zeta \leq 2^{-100}.$$

Pour chaque inclusion corrigée, (76) et (67) donnent donc

$$\max_{\pm} \|\hat{F}^{\pm} - R/2\|_{\text{HS}}/\sqrt{d} \leq 83\bar{\nu} + 2^{-100} \leq 2^{-98} =: z_0.$$

Appliquer le Corollaire 18 et conjuguer par T_l . Comme $\|T_l - V_l\|_2 \leq 8\zeta$, nous obtenons

$$V_l A V_l^* \subseteq_{\gamma+16\zeta} A, \quad \gamma = 64\bar{\nu} + 8\sqrt{z_0}, \quad \gamma + 16\zeta \leq 2^{-45} < 2^{-20}.$$

Les espérances conditionnelles donnent des approximants qui sont des contractions. $\square$

5. Rigidité de réflexion et séparation des traces

Nous appliquons les deux entrées analytiques pour montrer que de petites erreurs de relations forcent P et Q à être proches en 2-norme, uniformément en la dimension de la matrice. En arrondissant directement les variables primitives et les expressions de Jordan, nous étendons cette estimation aux contractions matricielles auto-adjointes arbitraires et prouvons la borne inférieure de trace requise pour f .

5.1. Le système de relations auxiliaires

Seule la preuve utilise des symboles auxiliaires. Remplacer les neuf $p_{\{a,b\},r}$ par dix-huit symboles ordonnés $p_{ab,r}$, et pour tout $a \in \mathcal{A}$ remplacer $\hat{a}_3, \hat{a}_4$ par des symboles indépendants a_3, a_4 . Dans les équations non involutives de la Section 2., utiliser les p ordonnés et retirer chaque chapeau ; ajouter

$$a_3 = a_0 a_1, \quad a_4 = a_1 a_2 \quad (a \in \mathcal{A}). \quad (79)$$

Le système résultant a 81 symboles de racines, sept symboles unitaires entiers, et 843 équations. Tous les symboles de racines seront des symétries. Il n'y a aucun changement au polynôme f ou à ses 65 variables primitives.

5.2. L'estimation de réflexion

Les certificats de racines et entiers donnent des algèbres A et B approximant les deux commutants. Les cibles de compression partagées placent alors u^*t près de A , et la normalisation fournit la conjugaison réciproque manquante.

Les deux entrées spectrales, avec paramètres résiduels 2ε et 13ε pour une erreur locale ε , sont

$$(h, \lambda, C) = (12288, 1/24, 2^{64}) \quad \text{et} \quad (6, 1/144, 2). \quad (80)$$

Utiliser k, r de (59) et poser

$$z = 2^{-17500}, \quad \theta = z^8/2^{96} = 2^{-140096}. \quad (81)$$

Le lemme suivant vérifie la tolérance fixée avant qu'aucune entrée spectrale ne soit appliquée. Il compare les exposants entiers, sans développer μ ni utiliser d'approximation numérique.

Lemme 19. Pour l'une ou l'autre entrée en (80) et $\theta = 2^{-140096}$, le nombre fixé $\delta = 2^{-J}$ en (29) satisfait $\delta \leq \varepsilon_{\text{in}}(h, \lambda, C, \theta)$.

Démonstration. Les deux entrées obéissent à $h \leq 2^{14}$, $2^{-9} \leq \kappa \leq 1/4$ et $C \leq 2^{64}$. La substitution successive dans (51) et $\lceil x \rceil \leq 2x$ pour $x \geq 1$ donnent les bornes rationnelles

Quantité	Borne	Quantité	Borne
c	$\geq 2^{-46}$	N	$\leq 2^{140147}$
r_I	$\geq 2^{-280247}$	C_0	$\leq 2^{38}$
κ'	$\geq 2^{-19}$	K_0	$\leq 2^{42}$
K_b	$\leq 2^{50}$	K_γ	$\leq 2^{82}$
b_I	$\geq 2^{-560547}$	a_I	$\geq 2^{-560517}$
t_I	$\leq 2^{1121111}$		

Soit $T_0 = 2^{1121200}$. Chaque entrée du minimum définissant γ est au moins 2^{-16T_0} . Pour sa dernière entrée, l'exposant binaire négatif est au plus $1121072 + 8 \cdot 2^{1121111} < 16T_0$; les quatre autres estimations sont plus petites. Les définitions ultérieures donnent

$$\gamma \geq 2^{-16T_0}, \quad v \geq 2^{-256T_0}, \quad \alpha \geq 2^{-512T_0}, \quad \beta \geq 2^{-2048T_0}, \quad L \leq 2^{4096T_0}, \quad \mu_I \geq 2^{-16384T_0}.$$

Comme $\lambda = 2\kappa$,

$$1 - \rho = \frac{\kappa(2 - 3\kappa)}{(1 - \kappa)^2} \geq \kappa \geq 2^{-9}.$$

Il s'ensuit que $M \leq M_0 := 2^{32768T_0}$. En utilisant $1 - \kappa \geq 1/2$ et $C + 1 \leq 2^{65}$ dans la dernière ligne de (52),

$$\frac{\kappa\mu_I(1 - \kappa)^{2M}}{2} \geq 2^{-4M_0}, \quad \varepsilon_{\text{in}} \geq 2^{-8M_0}.$$

Pour la première inégalité, $16384T_0 + 10 \leq 2M_0$ suffit. Enfin

$$8M_0 = 2^{3+2^{1121215}} < 2^{2^{1122000}} = J.$$

Toutes ces comparaisons sont des comparaisons entières ordinaires; aucun entier énorme n'a été approché numériquement. Elles prouvent la borne de tolérance affirmée. $\square$

Cette tolérance étant disponible, les équations locales forcent l'estimation de réflexion suivante.

Théorème 20. Supposons que les 81 symboles de racines soient représentés par des symétries et les sept symboles entiers par des unitaires dans M_d . Si chacun des 843 défauts d'équations locales équilibrées a une 2-norme inférieure à $\varepsilon < \delta/128$, alors

$$\|U_{12}^* h U_{12} - t^* h t\|_2 \leq 5 \cdot 2^{-20}, \quad h = z_{2,0}. \quad (82)$$

Démonstration. Les 801 tests de présentation de Heisenberg ont des défauts au plus 2ε : les commutations sont des équations locales, et chaque croisement utilise au plus une équation d'addition de (79). La Proposition 6 et le Lemme 7 s'appliquent donc avec les paramètres résiduels 2ε et 13ε , tous deux inférieurs à δ . Le Corollaire 13 donne des algèbres A, B avec un coefficient de Poincaré au plus $k^{-1/2}$ et une erreur additive au plus r , puisque $3z \leq r$ et $6\sqrt{12288}z \leq r$. Les contractions dans A commutent avec les dix-huit racines de base $x_i, y_i, z_{\ell,i}$ à r près; les contractions dans B commutent avec les six U_{ab} à r près.

Les équations de racines d'indice zéro expriment $d_{a,r}, e_{b,0}$, à erreur ε près, comme des commutateurs de quatre lettres de racines de base. Leurs commutateurs avec les contractions dans A sont bornés par $4r + 2\varepsilon$; l'équation de produit ordonné donne la borne $16r + 10\varepsilon$ pour $p_{ab,r}$. Comme $\varepsilon < \delta/128 < r$, la compression donne, pour $V = U_{ab}$,

$$\max_g \|[V^*aV, g]\|_2 \leq 16r + 12\varepsilon \leq 28r \quad (a \in A, \|a\| \leq 1),$$

où g parcourt les racines de base. Les mots de moyennage ont une longueur d'au plus douze, donc leur racine d'énergie est au plus $168r$. L'estimation de Poincaré implique

$$V^*AV \subseteq_\eta A, \quad \eta = 8192r/k = 2^{-17313}. \quad (83)$$

Le Théorème 11 donne maintenant

$$VAV^* \subseteq_{2^{-20}} A. \quad (84)$$

Enfin $c_0 = U_{12}^*t$ commute avec chaque racine de base à 2ε près, car les deux systèmes de compression ont des membres de droite identiques. L'estimation de Poincaré des racines donne $\text{dist}_2(c_0, A) \leq 12\varepsilon/\sqrt{k} + r \leq 512r/k$. Par (84), $tU_{12}^* = U_{12}c_0U_{12}^*$ est à $512r/k + 2^{-20}$ près d'une contraction dans A . Par conséquent

$$\|[h, tU_{12}^*]\|_2 \leq r + 1024r/k + 2^{-19} \leq 5 \cdot 2^{-20}.$$

La multiplication unitaire identifie cette norme à celle de (82). $\square$

5.3. Arrondi direct et positivité

Bien que les expressions de Jordan ne soient pas nécessairement des symétries, les pénalités d'involution et de commutation existantes contrôlent leur erreur d'arrondi. Aucun terme de pénalité supplémentaire n'est requis.

L'identité élémentaire suivante fournit ce contrôle.

Lemme 21. *Pour des contractions auto-adjointes A, B dans une algèbre traciale finie,*

$$\|A \circ B - AB\|_2 = \frac{1}{2}\|AB - BA\|_2, \quad (85)$$

$$\|(A \circ B)^2 - 1\|_2^2 \leq 6(\|A^2 - 1\|_2^2 + \|B^2 - 1\|_2^2 + \|AB - BA\|_2^2). \quad (86)$$

Démonstration. Posons $C = A \circ B, D = AB$. Les deux sont des contractions, $C - D = (BA - AB)/2$, et l'identité exacte

$$C^2 - 1 = C(C - D) + (C - D)D + A(BA - AB)B + (A^2 - 1)B^2 + (B^2 - 1)$$

borne sa norme par $a + b + 2c$, où $a = \|A^2 - 1\|_2, b = \|B^2 - 1\|_2, c = \|AB - BA\|_2$. Utiliser $(a + b + 2c)^2 \leq 6(a^2 + b^2 + c^2)$. $\square$

Nous arrondissons ensuite un 65-uplet donné vers le système de relations auxiliaires. L'estimation concerne ses défauts locaux, non une comparaison de deux polynômes.

Lemme 22. *Posons $\mathcal{Q}_{65} = \mathcal{Q}_{\text{inv}} + \mathcal{Q}_H + \mathcal{Q}_K + \mathcal{Q}_{\text{prod}} + \mathcal{Q}_{\text{comp}}$ et soit $q = \text{tr}_d \mathcal{Q}_{65}(A)$ pour un n -uplet de contractions auto-adjointes A . Il existe une assignation symétrie/unitaire au système auxiliaire avec chaque défaut local au plus $32\sqrt{q}$. Son signal $\tilde{P} - \tilde{Q}$ satisfait*

$$\|(P(A) - Q(A)) - (\tilde{P} - \tilde{Q})\|_2 \leq 10\sqrt{q}. \quad (87)$$

Démonstration. Évaluer d'abord chaque symbole de produit ordonné à la valeur correspondante $A_{p_{\{a,b\},r}}$ et chaque symbole d'addition à son abréviation de Jordan. Cela rend chaque résidu non additif exactement un résidu dans $\mathcal{Q}_{65}$, de norme au plus $\sqrt{q}$; chaque résidu d'addition a une norme au plus $\sqrt{q}/2$ par (85).

Arrondir chaque valeur primitive et chaque valeur de Jordan C à $\text{sgn}(C)$, avec $\text{sgn}(0) = 1$. Le calcul fonctionnel donne $\|C - \text{sgn}(C)\|_2 \leq \|C^2 - 1\|_2$. L'erreur d'arrondi est au plus $\sqrt{q}$ pour une valeur primitive et au plus $\sqrt{6q}$ pour une valeur de Jordan par (86) : les trois défauts de son membre de droite sont déjà des termes de q . Les sept symboles entiers sont des produits de leurs réflexions primitives arrondies. Après expansion de ces produits, la somme des longueurs des deux membres de chaque équation équilibrée est au plus douze, chaque symbole primitif ou auxiliaire étant compté comme une lettre. Le télescopage borne son nouveau défaut par $(1 + 12\sqrt{6})\sqrt{q} < 32\sqrt{q}$. Les deux mots de signal à cinq lettres n'utilisent que des variables primitives, dont les éditions individuelles sont au plus $\sqrt{q}$; cela donne (87). $\square$

Nous prouvons maintenant directement la borne de trace matricielle pour f .

Preuve du Théorème 1. Soit $q = \text{tr}_d \mathcal{Q}_{65}(A)$. Si $q < \delta^2/2^{24}$, les défauts locaux arrondis sont inférieurs à $\delta/128$. Le Théorème 20 et le Lemme 22 donnent

$$\|P(A) - Q(A)\|_2 \leq 5 \cdot 2^{-20} + 10\sqrt{q} < 1/2.$$

Comme la pénalité a une trace non négative, $\text{tr}_d f(A) = 1 - \|P(A) - Q(A)\|_2^2 + \mu q \geq 3/4$. Si $q \geq \delta^2/2^{24}$, alors $\mu q \geq 64$ par (29); comme $P(A), Q(A)$ sont des contractions, la même trace est au moins $-3 + 64$. Cela prouve (2) en toutes dimensions.

L'hermiticité est immédiate. Chaque résidu a des coefficients dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et contient au plus une abréviation de Jordan; son carré a des coefficients dans $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$. Comme $4 \mid \mu$, le polynôme a des coefficients entiers. Son degré est au plus douze, et le mot

$$X_{56}X_{58}X_{57}X_{61}X_{57}X_{59}X_{59}X_{57}X_{61}X_{57}X_{58}X_{56}$$

a pour coefficient μ : c'est le carré du plus long membre $U_{13}U_{23}U_{12}$ d'une relation de Steinberg et il ne peut s'annuler avec un terme négatif de degré douze. Ainsi $\deg f = 12$. La substitution de groupe a déjà prouvé (3). $\square$

La trace négative exclut immédiatement les certificats algébriques dans la formulation de Connes.

Corollaire 23. Avec $\mathcal{M}_{\text{cube}} = \mathcal{M}_{65}$ comme défini en (5), on a

$$f + \varepsilon \notin \mathcal{M}_{\text{cube}} + [\mathcal{A}_{65}, \mathcal{A}_{65}]_{\text{lin}} \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

De plus, $L(\Lambda)$ n'a pas de plongement préservant la trace dans un ultraproduit du facteur II_1 hyperfini.

Démonstration. Tout terme du module quadratique a une trace non négative sur les contractions, et les commutateurs ont une trace nulle, contredisant la valeur $-1 + \varepsilon$ au n -uplet spécifié. L'assertion de plongement découle de l'implication standard d'approximation matricielle pour les sous-algèbres traciales de l'ultraproduit hyperfini; voir [16, Proposition 3.17]. $\square$

Déclaration d'IA générative

Des outils d'IA générative ont aidé à explorer des stratégies de preuve, à vérifier des calculs et à réviser l'exposition. Les auteurs assument l'entière responsabilité du contenu mathématique, des références et du manuscrit final.

Remerciements

Nous remercions Andreas Thom pour avoir suggéré la construction d'un polynôme explicite à partir du double de groupe $G *_H G$ dans son travail avec Gábor Kun, et pour avoir expliqué comment combiner un mot de groupe non trivial devenant asymptotiquement trivial dans les approximations matricielles avec des carrés de défauts de relations. Sa suggestion a motivé la construction étudiée ici. Nous remercions également Sizhuo Yan, Jianting Yang, Tianshi Yu et Hao Liang pour leurs discussions précieuses et leurs encouragements tout au long de notre recherche commune d'un contre-exemple explicite pendant de nombreuses années. Nous remercions l'équipe MechMath Agent (MMAT) [1] pour son soutien. Les auteurs sont soutenus par le Programme national clé de R&D de Chine 2023YFA1009401 et par le programme de recherche prioritaire stratégique de l'Académie chinoise des sciences sous la subvention XDA0480501.

A Un contre-exemple en deux variables auto-adjointes

Nous obtenons le contre-exemple en deux variables en encodant le polynôme f de (30). Une variable sélectionne les blocs spectraux, tandis que l'autre stocke les 65 générateurs originaux. Les expressions polynomiales récupèrent ces générateurs dans un coin commun, et des pénalités supplémentaires contrôlent le décodage sur des contractions matricielles arbitraires. L'évaluation traciale négative est héritée du n -uplet original par une amplification matricielle explicite.

Tout au long, nous conservons le même entier μ et utilisons le n -uplet unitaire auto-adjoint $a_1, \dots, a_{65}$ de la Section 2.4., pour lequel $\tau_\Lambda f(a_1, \dots, a_{65}) = -1$. Pour un polynôme p , soit $\|p\|_{\text{coeff}}$ la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Les formules définissantes donnent

$$\deg f = 12, \quad f(0) = 1 + 65\mu, \quad \|f\|_{\text{coeff}} \leq c := 5 + 3560\mu. \quad (88)$$

En effet, le signal a une somme de coefficients au plus 5, et chacun des 890 carrés de pénalité a une somme de coefficients au plus 4. Seuls les carrés d'involution primitifs contribuent au terme constant de la pénalité.

Pour deux variables auto-adjointes libres X, Y , définissons les sélecteurs spectraux

$$\ell_i(X) = \frac{\prod_{\substack{0 \leq k \leq 65 \\ k \neq i}} (66X - k)}{(-1)^{65-i} i! (65-i)!} \quad (0 \leq i \leq 65), \quad s(X) = \prod_{k=0}^{65} (66X - k), \quad (89)$$

et les polynômes de décodage

$$e = \ell_0(X), \quad Z_j = 66^3 \ell_0(X) Y \ell_j(X) Y \ell_j(X) Y \ell_0(X) \quad (1 \leq j \leq 65). \quad (90)$$

Ainsi $\ell_i(k/66) = \delta_{ik}$, et chaque Z_j est auto-adjoint. Chaque fois qu'une substitution auto-adjointe satisfait $s(X) = 0$, les $\ell_i(X)$ sont des projections orthogonales de somme 1, et $Z_j = e Z_j e$. Sur de

telles substitutions,

$$f_e(Z) := f(Z_1, \dots, Z_{65}) + f(0)(e - 1)$$

est l'évaluation de f dans le coin d'identité e . Le terme de correction remplace l'identité ambiante par e dans le terme constant de f .

Les entiers suivants déterminent les poids de pénalité :

$$\begin{aligned} H &= 65!, & E &= 132^{65}, & T &= 66^3 E^4, & L &= 12c 66^{33}, \\ B &= cT^{12} + 65L^2(T^2 + E)^2, & K &= 2^{65} \cdot 3156 B. \end{aligned} \quad (91)$$

Nous pénalisons d'abord l'échec des variables décodées à être des involutions dans le coin sélectionné :

$$G(X, Y) = f(Z_1, \dots, Z_{65}) + (1 + 65\mu)(e - 1) + L^2 \sum_{j=1}^{65} (Z_j^2 - e)^2. \quad (92)$$

Nous ajoutons ensuite la pénalité spectrale et effaçons les dénominateurs :

$$\boxed{\Psi(X, Y) = H^{48} \left(1 + 132G(X, Y) + (132Ks(X))^2 \right).} \quad (93)$$

Le facteur H^{48} rend tous les coefficients entiers. Les symboles e, Z_j, G sont des abréviations polynomiales, donc Ψ ne dépend que de X, Y ; aucune relation n'est imposée sur ces variables libres. Pour transférer l'évaluation négative originale, soient F_{ij} , $0 \leq i, j \leq 65$, les unités matricielles de $M_{66}(\mathbb{C})$ et posons

$$\begin{aligned} X_{\circ} &= \sum_{i=0}^{65} \frac{i}{66} F_{ii} \otimes 1, \\ Y_{\circ} &= \frac{1}{66} \left(\sum_{j=1}^{65} F_{jj} \otimes a_j + \sum_{j=1}^{65} (F_{0j} + F_{j0}) \otimes 1 \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Ce sont des contractions auto-adjointes, et

$$\ell_i(X_{\circ}) = F_{ii} \otimes 1, \quad Z_j(X_{\circ}, Y_{\circ}) = F_{00} \otimes a_j.$$

Ainsi le décodage récupère exactement le n -uplet original de 65 variables dans le coin F_{00} . Écrivons $\hat{\tau} = \text{tr}_{66} \otimes \tau_{\Lambda}$ pour la trace normalisée sur $M_{66}(L(\Lambda))$.

Théorème 24. *Le polynôme Ψ est hermitien, appartient à $\mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$, et a un degré au plus 3156. Pour toutes les contractions matricielles auto-adjointes $X, Y \in M_d(\mathbb{C})$,*

$$\text{tr}_d \Psi(X, Y) \geq \frac{3}{4} H^{48}.$$

Le couple (94) consiste en contractions auto-adjointes et satisfait $\hat{\tau}\Psi(X_{\circ}, Y_{\circ}) = -H^{48}$.

Démonstration. Le dénominateur $i!(65 - i)!$ de chaque ℓ_i divise H , et $\|\ell_i\|_{\text{coeff}} \leq E$. Donc

$$\deg Z_j \leq 263, \quad \|Z_j\|_{\text{coeff}} \leq T, \quad H^4 Z_j \in \mathbb{Z}\langle X, Y \rangle.$$

Remplacer le terme constant de f par $f(0)e$ donne une somme de coefficients au plus cT^{12} , puisque $E \leq T^{12}$. Il s'ensuit que

$$\deg G \leq 12 \cdot 263 = 3156, \quad \|G\|_{\text{coeff}} \leq cT^{12} + 65L^2(T^2 + E)^2 = B.$$

Le facteur H^{48} efface les dénominateurs dans $f(Z)$, dans la correction constante, et dans les carrés ajoutés : ceux-ci requièrent au plus H^{48} , H et H^{16} , respectivement. Comme s et toutes les constantes en (91) ont des coefficients ou des valeurs entiers, Ψ a des coefficients entiers et un degré au plus 3156. Son hermiticité découle de celle de f, e, Z_j et s .

Supposons que $X, Y \in M_d(\mathbb{C})$ soient des contractions auto-adjointes et $s(X) = 0$. Alors e est une projection et $\|Z_j\| \leq 66^3$. Si $e = 0$, tous les Z_j et G s'annulent. Sinon, soit tr_e la trace normalisée sur eM_de , et choisir $U_j = \text{sgn}(Z_j)$ dans ce coin, avec signe 1 sur le noyau. L'inégalité scalaire $|t - \text{sgn}(t)| \leq |t^2 - 1|$ implique

$$\|Z_j - U_j\|_{2,e} \leq \|Z_j^2 - e\|_{2,e}, \quad q := \sum_{j=1}^{65} \|Z_j^2 - e\|_{2,e}^2.$$

Pour un mot de longueur au plus 12, l'expansion de sa différence en Z et U remplace un facteur à la fois. Tous les autres facteurs ont une norme au plus 66^3 , donc (88) donne

$$\left| \text{tr}_e f_e(Z) - \text{tr}_e f_e(U) \right| \leq 12c(66^3)^{11} \max_j \|Z_j - U_j\|_{2,e} \leq L\sqrt{q}.$$

Le Théorème 1, appliqué aux symétries U_j dans l'algèbre matricielle eM_de , donne

$$\text{tr}_e G \geq \frac{3}{4} - L\sqrt{q} + L^2q = \frac{1}{2} + \left(L\sqrt{q} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent $\text{tr}_d G(X, Y) \geq 0$ chaque fois que $s(X) = 0$.

Pour une contraction auto-adjointe arbitraire X , remplacer chaque valeur propre par un point le plus proche de $\{0, 1/66, \dots, 65/66\}$ et noter la matrice résultante X_0 . Si $i/66$ est le plus proche de $x \in [-1, 1]$, alors $|66x - k| \geq 1/2$ pour $k \neq i$. Donc

$$|x - i/66| \leq 2^{65}|s(x)|, \quad \|X - X_0\|_2 \leq 2^{65}\|s(X)\|_2.$$

X et X_0 sont des contractions, et $s(X_0) = 0$. L'expansion des mots de G , en gardant maintenant Y fixé, donne

$$\left| \text{tr}_d G(X, Y) - \text{tr}_d G(X_0, Y) \right| \leq 3156B\|X - X_0\|_2 \leq K\|s(X)\|_2.$$

En écrivant $t = \|s(X)\|_2$ et en utilisant $\text{tr}_d G(X_0, Y) \geq 0$, on obtient

$$H^{-48} \text{tr}_d \Psi(X, Y) \geq 1 - 132Kt + (132Kt)^2 = \frac{3}{4} + \left(132Kt - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Pour le couple en (94), $\|X_\circ\| = 65/66$ et $\|Y_\circ\| \leq (1 + \sqrt{65})/66 < 1$. En effet, la partie diagonale de $66Y_\circ$ a une norme 1, et sa partie hors diagonale a une norme $\sqrt{65}$. La multiplication par blocs directe donne

$$\ell_i(X_\circ) = F_{ii} \otimes 1, \quad Z_j(X_\circ, Y_\circ) = F_{00} \otimes a_j, \quad s(X_\circ) = 0.$$

Comme $a_j^2 = 1$, chaque carré ajouté $(Z_j^2 - e)^2$ s'annule sur ce couple. La correction constante dans (92) donne donc

$$G(X_\circ, Y_\circ) = F_{00} \otimes f(a_1, \dots, a_{65}).$$

Par (3), sa trace est $-1/66$, et donc $\hat{\tau}\Psi(X_\circ, Y_\circ) = H^{48}(1 - 132/66) = -H^{48}$. $\square$

La même évaluation exclut le module quadratique de contraction.

Corollaire 25. *Pour $0 \leq \varepsilon < H^{48}$,*

$$\Psi + \varepsilon \notin \mathcal{M}_2 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2]_{\text{lin}}.$$

Démonstration. Tout élément de $\mathcal{M}_2$ a une trace non négative au couple de contractions (94), tandis que les commutateurs ont une trace nulle. La valeur négative $-H^{48} + \varepsilon$ prouve l'exclusion affichée. $\square$

Deux variables auto-adjointes sont minimales. En effet, un polynôme hermitien en une variable auto-adjointe est un polynôme réel ordinaire. Une trace non négative sur toutes les contractions matricielles implique donc la non-négativité sur $[-1, 1]$ par évaluation scalaire. Le théorème de Markov–Lukács [6, Théorème 3.72] place alors ce polynôme dans $\mathcal{M}_1$. Pour la représentation de degré impair, cela découle de

$$1 \pm X = \frac{1}{2}(1 \pm X)^2 + \frac{1}{2}(1 - X^2),$$

qui convertit les poids $1 + X$ et $1 - X$ en éléments du module quadratique de contraction. Ainsi, aucun contre-exemple n'existe en une seule variable auto-adjointe, quel que soit le degré.

Les relations originales restent visibles après passage au coin commun. Plus précisément, chaque fois que $s(X) = 0$, la définition de f donne

$$\begin{aligned} G = e - (P(Z) - Q(Z))^2 + (\mu + L^2) \sum_{j=1}^{65} (Z_j^2 - e)^2 \\ + \mu \sum_{\rho \in \mathcal{R}} E_\rho(Z)^* E_\rho(Z). \end{aligned} \tag{95}$$

Ici P, Q et E_ρ sont exactement les polynômes de signal et les 825 résidus non involutifs de la Section 2.; chacun a un terme constant nul. Ainsi les quatre parties de $\mathcal{R}$ conservent leur signification sur les opérateurs décodés Z_j , pas directement sur X, Y .

Au couple distingué, posons $p_i = \ell_i(X_\circ)$. Les identités

$$66p_0Y_\circ p_j = F_{0j} \otimes 1, \quad Z_j(X_\circ, Y_\circ) = F_{00} \otimes a_j \quad (1 \leq j \leq 65)$$

récupèrent toutes les unités matricielles et les générateurs originaux dans le coin 00. Par conséquent, avec $\mathcal{N} = W^*(a_1, \dots, a_{65})$,

$$W^*(X_\circ, Y_\circ) = M_{66}(\mathcal{N}). \tag{96}$$

La construction réduit le nombre de coordonnées mais n'élimine pas l'obstruction algébrique ni les estimations nécessaires pour prouver le Théorème 1. Elle ne fournit ni un polynôme de degré inférieur ni une nouvelle présentation de cette obstruction par deux involutions de groupe. En effet, l'algèbre engendrée par deux involutions auto-adjointes est de type I à fibres matricielles de taille au plus deux, par le théorème des deux projections [11]. L'intégration des traces normalisées sur ces fibres exclut une évaluation traciale négative là pour tout polynôme à trace non négative sur toutes les contractions matricielles.

Références

- [1] Cao, Y. and Qiu, R. and Liu, J. and Wang, J. and Guo, D. and Feng, R. and Zhi, L. and Gao, X.-S., MechMath Agent Team : LLM Driven Agents for Mathematical Research, 2026, [arXiv:2607.04394v1](https://arxiv.org/abs/2607.04394v1), Preprint, 2607.04394, arXiv, cs.AI, <https://arxiv.org/abs/2607.04394v1>
- [2] Alekseev, V. and Liu, J. and Thom, A., Spectral gap, internality of relative commutants, and non-hyperlinear groups, 2026, [arXiv:2609.37761v1](https://arxiv.org/abs/2609.37761v1), Preprint, 2609.37761, arXiv, math.GR, <https://arxiv.org/abs/2609.37761v1>
- [3] Araki, H. and Yamagami, S., An inequality for Hilbert–Schmidt norm, *Comm. Math. Phys.*, 81, 1, 1981, 89–96, 10.1007/BF01941801, [doi:10.1007/BF01941801](https://doi.org/10.1007/BF01941801)
- [4] Bhatia, R., *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 169, Springer, New York, 1997, 10.1007/978-1-4612-0653-8, [doi:10.1007/978-1-4612-0653-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0653-8)
- [5] Burgdorf, S. and Dykema, K. and Klep, I. and Schweighofer, M., Addendum to “Connes’ embedding conjecture and sums of Hermitian squares”, *Adv. Math.*, 252, 2014, 805–811, 10.1016/j.aim.2013.10.020, [doi:10.1016/j.aim.2013.10.020](https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.10.020)
- [6] Blekherman, G. and Parrilo, P. A. and Thomas, R. R., *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*, MOS-SIAM Series on Optimization, 13, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013, 10.1137/1.9781611972290, [doi:10.1137/1.9781611972290](https://doi.org/10.1137/1.9781611972290)
- [7] Christensen, E., Subalgebras of a finite algebra, *Math. Ann.*, 243, 1979, 17–29, 10.1007/BF01420203, [doi:10.1007/BF01420203](https://doi.org/10.1007/BF01420203)
- [8] Connes, A., Classification of injective factors. Cases II_1 , II_∞ , III_λ , $\lambda \neq 1$, *Ann. of Math. (2)*, 104, 1, 1976, 73–115, 10.2307/1971057, [doi:10.2307/1971057](https://doi.org/10.2307/1971057)
- [9] Ershov, M. and Jaikin-Zapirain, A., Property (T) for noncommutative universal lattices, *Invent. Math.*, 179, 2, 2010, 303–347, 10.1007/s00222-009-0218-2, [doi:10.1007/s00222-009-0218-2](https://doi.org/10.1007/s00222-009-0218-2)
- [10] Fritz, T., Tsirelson’s problem and Kirchberg’s conjecture, *Rev. Math. Phys.*, 24, 5, 2012, 1250012, 10.1142/S0129055X12500122, [doi:10.1142/S0129055X12500122](https://doi.org/10.1142/S0129055X12500122)
- [11] Halmos, P. R., Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144, 1969, 381–389, 10.1090/S0002-9947-1969-0251519-5, [doi:10.1090/S0002-9947-1969-0251519-5](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251519-5)
- [12] Higham, N. J., Computing the polar decomposition—with applications, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7, 4, 1986, 1160–1174, 10.1137/0907079, [doi:10.1137/0907079](https://doi.org/10.1137/0907079)
- [13] Ji, Z. and Natarajan, A. and Vidick, T. and Wright, J. and Yuen, H., $MIP^* = RE$, 2020, [arXiv:2001.04383v3](https://arxiv.org/abs/2001.04383v3), Revised 2022; to appear in *Annals of Mathematics*, 2001.04383, arXiv, quant-ph, <https://arxiv.org/abs/2001.04383v3>
- [14] Junge, M. and Navascués, M. and Palazuelos, C. and Pérez-García, D. and Scholz, V. B. and Werner, R. F., Connes’ embedding problem and Tsirelson’s problem, *J. Math. Phys.*, 52, 2011, 012102, 10.1063/1.3514538, [doi:10.1063/1.3514538](https://doi.org/10.1063/1.3514538)
- [15] Kirchberg, E., On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^* -algebras, *Invent. Math.*, 112, 1993, 449–489, 10.1007/BF01232444, [doi:10.1007/BF01232444](https://doi.org/10.1007/BF01232444)
- [16] Klep, I. and Schweighofer, M., Connes’ embedding conjecture and sums of Hermitian squares, *Adv. Math.*, 217, 4, 2008, 1816–1837, 10.1016/j.aim.2007.09.016, [doi:10.1016/j.aim.2007.09.016](https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.09.016)
- [17] Kun, G. and Thom, A., Nonsofic wreath products of residually finite groups, 2026, [arXiv:2608.06222v3](https://arxiv.org/abs/2608.06222v3), Preprint, 2608.06222, arXiv, math.GR, <https://arxiv.org/abs/2608.06222v3>
- [18] Netzer, T. and Thom, A., Kazhdan’s property (T) via semidefinite optimization, *Exp. Math.*, 24, 3, 2015, 371–374, 10.1080/10586458.2014.999149, [doi:10.1080/10586458.2014.999149](https://doi.org/10.1080/10586458.2014.999149)
- [19] Ozawa, N., About the Connes embedding conjecture : Algebraic approaches, *Japanese Journal of Mathematics*, 8, 1, 2013, 147–183, 10.1007/s11537-013-1280-5, [doi:10.1007/s11537-013-1280-5](https://doi.org/10.1007/s11537-013-1280-5)
- [20] Ozawa, N., Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan’s property (T) , *J. Inst. Math. Jussieu*, 15, 1, 2016, 85–90, 10.1017/S1474748014000309, [doi:10.1017/S1474748014000309](https://doi.org/10.1017/S1474748014000309)
- [21] Paulsen, V., *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 10.1017/CBO9780511546631, [doi:10.1017/CBO9780511546631](https://doi.org/10.1017/CBO9780511546631)

- [22] Peterson, J., Notes on von Neumann Algebras, Lecture notes, Vanderbilt University, April 5, 2013, <https://math.vanderbilt.edu/peters10/teaching/spring2013/vonNeumannAlgebras.pdf>, [Author's lecture notes](#)
- [23] Popa, S. and Sinclair, A. M. and Smith, R. R., Perturbations of subalgebras of type II_1 factors, *J. Funct. Anal.*, 213, 2, 2004, 346–379, 10.1016/j.jfa.2004.01.010, math/0305444, arXiv, <https://arxiv.org/abs/math/0305444v2>, [doi:10.1016/j.jfa.2004.01.010](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.010); corrected version, [arXiv:math/0305444v2](https://arxiv.org/abs/math/0305444v2)
- [24] Serre, J.-P., *Trees*, Stillwell, J., Springer, Berlin, 1980, 10.1007/978-3-642-61856-7, Translated by J. Stillwell. [doi:10.1007/978-3-642-61856-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61856-7)
- [25] Serre, J.-P., *Linear Representations of Finite Groups*, Scott, L. L., Graduate Texts in Mathematics, 42, Springer, New York, 1977, 10.1007/978-1-4684-9458-7, Translated by L. L. Scott. [doi:10.1007/978-1-4684-9458-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9458-7)
- [26] Thom, A., A conditional construction of a nonhyperlinear group and the centralizer problem, 2026, [arXiv:2609.27795v1](https://arxiv.org/abs/2609.27795v1), Preprint, 2609.27795, arXiv, math.GR, <https://arxiv.org/abs/2609.27795v1>
- [27] Voiculescu, D., Limit laws for random matrices and free products, *Invent. Math.*, 104, 1991, 201–220, 10.1007/BF01245072, [doi:10.1007/BF01245072](https://doi.org/10.1007/BF01245072)
- [28] Slofstra, W., The set of quantum correlations is not closed, *Forum of Mathematics, Pi*, 7, 2019, e1, 10.1017/fmp.2018.3, [doi:10.1017/fmp.2018.3](https://doi.org/10.1017/fmp.2018.3)
- [29] Lin, J., $MIP^{\text{co}} = \text{coRE}$, *Proceedings of the 58th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '26*, Association for Computing Machinery, New York, 2026, 314–322, 10.1145/3798129.3800751, <https://doi.org/10.1145/3798129.3800751>
- [30] Manzoor, A., There is an equivalence relation whose von Neumann algebra is not Connes embeddable, *Compos. Math.*, 162, 8, 2026, 1851–1868, 10.1017/S0010437X26103431, 2502.06697, arXiv, math.OA, <https://doi.org/10.1017/S0010437X26103431>, [doi:10.1017/S0010437X26103431](https://doi.org/10.1017/S0010437X26103431)