Traductions d'articles des Actes [1] de la seconde conférence sur l'épistémologie des sciences exactes à Königsberg, 5–7 Septembre 1930

Les fondements formalistes des mathématiques

Johann von Neumann (Berlin)

I.

La question des causes de la fiabilité inconditionnelle généralement admise des mathématiques classiques a été réexaminée par les recherches critiques sur les fondements des mathématiques au cours des dernières décennies, et plus particulièrement par le système de l'"intuitionnisme" de Brouwer. Ce qui est remarquable, c'est que cette question, intrinsèquement philosophique et épistémologique, est sur le point de se transformer en une question mathématique et logique. La formulation précise des lacunes des mathématiques classiques par Brouwer, la description exacte et exhaustive de ses méthodes (bonnes et mauvaises) par Russell, et les approches développées par Hilbert pour l'étude mathématique et combinatoire de ces méthodes et de leurs interrelations — ces trois avancées importantes dans le domaine de la logique mathématique ont conduit au fait qu'aujourd'hui, les questions fondamentales impliquent de plus en plus des problèmes mathématiques sans ambiguïté plutôt que des différences de goût.

Les autres articles traitant de manière exhaustive du domaine défini par Brouwer des formes conceptuelles et des méthodes de démonstration inconditionnellement fiables, "intuitionnistes" ou "finies", ainsi que de la caractérisation formelle par Russell du corps des mathématiques classiques, développée ultérieurement par son école en référence à lui, nous ne les examinerons pas en détail ici, bien que leur connaissance soit évidemment indispensable à la compréhension de l'opportunité, de la ligne directrice et du modus procedendi de la théorie de la démonstration de Hilbert. Nous abordons donc directement la théorie de la démonstration elle-même.

Leur idée fondamentale est la suivante : même si les énoncés substantiels des mathématiques classiques devaient s'avérer infondés, il est néanmoins certain que les mathématiques classiques impliquent une procédure autonome, procédant selon des règles fixes connues de tous les mathématiciens, dont le contenu est la construction successive de certaines combinaisons des symboles de base, qualifiées de "correctes" ou de "démontrées". Cette procédure de construction est certaine, finie et directement constructive. Pour clarifier la différence essentielle entre le traitement potentiellement non constructif du "contenu" des mathématiques (nombres réels, etc.) et l'enchaînement toujours constructif des étapes de sa démonstration, voyons l'exemple suivant : considérons une démonstration mathématique classique de l'existence d'un nombre réel x muni d'une certaine propriété $E(x)$, compliquée et profondément ancrée. Il se peut alors que l'on ne puisse déduire de cette démonstration aucune procédure permettant de construire un x vérifiant la propriété $E(x)$ (nous en donnerons un exemple prochainement). En revanche, si la démonstration enfreignait les conventions de la déduction mathématique, c'est-à-dire si elle contenait une erreur, on pourrait bien sûr la trouver avec certitude par une procédure finie d'essais et d'erreurs. Autrement dit :

1. Erkenntnis 9 II 32 (L'Erkenntnis était un journal célèbre de philosophie).
Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla (assistée de Google traduction), octobre 2025.

l'affirmation d'un théorème mathématique classique ne peut pas toujours être vérifiée de manière finie (voire pas du tout), mais le cheminement formel qui y conduit peut l'être. Si l'on souhaite examiner les mathématiques classiques sous l'angle de leur fiabilité, ce qui n'est possible en principe qu'en les réduisant au système fini a priori fiable (c'est-à-dire celui de Brouwer), il faut examiner non pas leurs énoncés, mais leurs méthodes de démonstration. Il faut comprendre la notion de démonstration comme un jeu combinatoire avec les symboles de base, et il s'agit de déterminer de manière combinatoire et finie les combinaisons de symboles de base auxquelles ses méthodes de construction, appelées "preuves", peuvent conduire.

Nous allons maintenant examiner un exemple de preuve d'existence non constructive. Soit $f(x)$ une fonction linéaire entre 0 et $\frac{1}{3}$, linéaire entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, linéaire entre $\frac{2}{3}$ et 1, et ainsi de suite. Soit $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{3}) = -\sum_{1}^{\infty} n^{\frac{\varepsilon_{2n}}{2^n}}$, $f(\frac{2}{3}) = \sum_{1}^{\infty} n^{\frac{\varepsilon_{2n-1}}{2^n}}$, $f(1) = 1$. Ici, ε_n est défini comme suit : si 2^n est la somme de deux nombres premiers, alors $\varepsilon_n = 0$, sinon $\varepsilon_n = 1$. De toute évidence, $f(x)$ est continue et, en tout point x, elle peut être calculée avec une précision arbitraire. Puisque $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, il existe un x tel que $f(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ (on peut constater que $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$). Néanmoins, la spécification d'une racine avec une précision $< \frac{1}{6}$ se heurterait à des difficultés majeures qui ne peuvent être surmontées en l'état actuel de la science : cela impliquerait que l'on pourrait prédire avec certitude l'existence d'une racine $< \frac{2}{3}$ ou $> \frac{1}{3}$ (selon que l'approximation serait $\leq \frac{1}{2}$ ou $\geq \frac{1}{2}$). La première exclurait $f(\frac{1}{3}) < 0, f(\frac{2}{3}) = 0$, la seconde $f(\frac{1}{3}) = 0, f(\frac{2}{3}) > 0$; autrement dit, dans le premier cas, tous les ε_n avec n impair s'annulent, mais tous ceux avec n pair ne s'annulent pas, et dans le second, c'est l'inverse. En d'autres termes, nous aurions prouvé que la conjecture de Goldbach (selon laquelle tout $2n$ est la somme de deux nombres premiers), si elle n'est pas vraie en général, doit être fausse pour n impair, ou pour n pair. Et aucun mathématicien ne peut encore fournir cette preuve aujourd'hui (ni pour la première ni pour la seconde), donc personne ne peut déterminer la solution de $f(x) = 0$ avec une précision supérieure à l'erreur de $\frac{1}{6}$. (Avec l'erreur de $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ est une approximation : car la racine carrée se trouve entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire entre $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$).

II.

Les tâches que la théorie de la démonstration de Hilbert doit résoudre sont donc les suivantes :

1. Lister tous les symboles utilisés en mathématiques et en logique. Ils seront appelés "symboles de base". Parmi eux figurent les symboles $-$ et $\rightarrow$ (qui représentent respectivement la "négation" et l'"implication").
2. Identifier de manière unique toutes les combinaisons de ces symboles qui représentent les énoncés considérés comme "significatifs" en mathématiques classiques. Ils seront appelés "formules". (Remarque : seulement significatifs, pas nécessairement corrects. $1 + 1 = 2$ est significatif, de même que $1 + 1 = 1$, que l'un soit correct et l'autre incorrect. Des énoncés comme $1+ \rightarrow= 1$ ou $+ + 1 = -$ sont dénués de sens.)
3. Une méthode de construction doit être spécifiée permettant la production successive de toutes les formules correspondant aux affirmations "démontrables" des mathématiques classiques. Cette méthode est donc appelée "démonstration".
4. Il faut montrer (de manière combinatoire finie) que les formules correspondant aux affirmations finiment vérifiables (arithmétiquement calculables) des mathématiques classiques

peuvent être démontrées (c'est-à-dire construites) selon le point 3 si et seulement si la "vérification" effective susmentionnée des affirmations mathématiques correspondantes confirme leur validité.

Si les points 1 à 4 sont établis, alors la fiabilité absolue des mathématiques classiques est confirmée pour l'usage suivant : une méthode simplifiée de calcul d'expressions arithmétiques lorsque le calcul élémentaire serait trop fastidieux. Puisqu'elles sont toujours appliquées à l'expérience en ce sens, leur fiabilité empirique est amplement démontrée.

Il convient de noter que les points 1 à 3, d'après les travaux de Russell et de son école, ne présentent plus aucune difficulté : la formalisation des mathématiques et de la logique qu'ils suggèrent peut être réalisée de multiples manières. Le véritable problème réside dans le point 4.

Concernant le point 4, il convient de noter ce qui suit : si la "vérification effective" d'une formule numérique confirme sa justesse, on peut en déduire une démonstration formelle, à condition que les points 1 à 3 représentent véritablement et exhaustivement les mathématiques classiques. Le critère du point 4 est donc nécessaire, et seule sa suffisance doit être vérifiée. Si, en revanche, la "vérification effective" d'une formule numérique révèle son inexactitude, cela signifie qu'une relation $p = q$ peut en être déduite, où p et q sont deux nombres distincts, effectivement donnés. Comme précédemment, cela conduirait à une démonstration formelle (conformément au point 3) de $p = q$. Il est aisé de constater qu'une démonstration de $1 = 2$ peut en découler. Pour garantir le point 4, il suffit de démontrer formellement l'impossibilité de démontrer $1 = 2$; l'examen de cette relation numérique incorrecte spécifique suffit.

L'impossibilité de démontrer la formule $1 = 2$ par les méthodes du point 3 est appelée "cohérence". Le véritable problème réside donc dans la preuve combinatoire finie de la cohérence.

III.

Pour indiquer les approches des preuves de cohérence, il convient d'expliquer plus en détail la procédure de preuve formelle (selon 3.). Elle est définie comme suit :

31. Certaines formules sont appelées axiomes ; elles sont caractérisées de manière unique et finie. Tout axiome est considéré comme démontré.
32. Si a et b sont deux formules significatives, et si a et $a \rightarrow b$ ont déjà été démontrées, alors b est également démontrée.

Remarque : 31 et 32 permettent de formuler successivement toutes les formules démontrables, mais le processus n'est jamais complet et ces assertions ne fournissent pas de procédure permettant de déterminer si une formule donnée e est démontrable. En effet, il ne faut pas négliger les formules qui doivent être démontrées successivement pour finalement démontrer e : il pourrait exister parmi elles des formules bien plus complexes et de construction totalement différente de e elle-même. (Quiconque est familier avec, par exemple, la théorie analytique des nombres sait à quel point cette possibilité est importante, notamment dans les plus beaux chapitres des mathématiques). Le problème de décider de la prouvabilité d'une formule donnée au moyen d'une procédure générale (naturellement finie) est beaucoup plus profond et plus difficile que celui abordé ici : il s'agit de ce que l'on appelle le problème de décision des mathématiques.

Il serait fastidieux d'énumérer tous les axiomes utilisés en mathématiques classiques. Pour les caractériser, il suffit de dire ce qui suit : il existe une infinité de formules pouvant être considérées comme des axiomes (par exemple, dans notre définition, chacune des formules $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, \ldots$ est un axiome), mais elles proviennent d'un nombre fini de schémas par substitution. Ces formules sont construites comme suit : "Si a, b, c sont des formules quelconques, alors $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$ est un axiome", et ainsi de suite.

Serait-il possible de définir une classe R de formules telle que :

α) Tout axiome appartient à R,

β) Avec a et $a \to b$, b appartient également à R.

γ) $1 = 2$ n'appartient pas à R,

Ainsi, la cohérence serait démontrée : car, apparemment, d'après α et β, toute formule démontrée appartient à R, et d'après γ, $1 = 2$ serait indémontrable. Cependant, définir une telle classe R est aujourd'hui hors de question : cette tâche présente des difficultés comparables à celles du problème de décision.

La remarque suivante conduit néanmoins à un problème beaucoup plus simple : si notre système était incohérent, il existerait une démonstration de $1 = 2$. Cette démonstration ne pourrait utiliser qu'un nombre fini d'axiomes ; leur ensemble est appelé $\mathfrak{M}$. Alors, le système d'axiomes $\mathfrak{M}$ est déjà incohérent. Ainsi, le système d'axiomes des mathématiques classiques est certainement cohérent si tout sous-système fini l'est également. Et c'est certainement le cas d'après ce qui précède si, pour tout ensemble fini $\mathfrak{M}$ d'axiomes, nous pouvons spécifier une classe de formules $R_{\mathfrak{M}}$ qui possède les propriétés suivantes :

α) Tout axiome de $\mathfrak{M}$ appartient à $R_{\mathfrak{M}}$.

β) Avec a et $a \to b$, b appartient également à $R_{\mathfrak{M}}$.

γ) $1 = 2$ n'appartient pas à $R_{\mathfrak{M}}$.

Ceci n'a aucun rapport avec le problème de décision (beaucoup trop difficile), car $R_{\mathfrak{M}}$ dépend de $\mathfrak{M}$ et ne dit rien sur la prouvabilité en soi (en utilisant tous les axiomes).

Il est évident que $R_{\mathfrak{M}}$ requiert une construction effective et finie (pour tout ensemble fini d'axiomes effectivement donné $\mathfrak{M}$) ; et les preuves de α), β), γ) doivent également être finies.

L'état actuel des choses se caractérise par le fait que la cohérence des mathématiques classiques reste à démontrer, alors que cette démonstration a déjà été réalisée pour un système mathématique plus restreint. Ce système est étroitement lié à celui proposé par Weyl avant la formulation du système intuitionniste ; il dépasse largement le cadre intuitionniste, tout en restant plus restreint que les mathématiques classiques. (On trouvera des références, par exemple, dans l'article de Weyl sur la "Philosophie des mathématiques" paru dans le *Handbook of Philosophy*, Oldenbourg, Munich). Ainsi, le système de Hilbert a passé avec succès son premier test : la justification d'un système mathématique non fini et non purement constructif a été obtenue par des méthodes constructives finies. Reste à savoir s'il sera possible de reproduire cette justification pour le système plus complexe et fondamental des mathématiques classiques.

Loi causale et mécanique quantique

Werner Heisenberg (Leipzig)

Mesdames et Messieurs,

La question de la validité de la loi causale a récemment fait l'objet de nombreux débats approfondis et passionnés, au point qu'elle a parfois semblé relever davantage de la foi que de la science. Les physiciens parmi vous se souviendront peut-être qu'avant la découverte de la théorie de Maxwell sur la lumière, un vif débat a longtemps opposé les physiciens les plus éminents quant à la polarisation du vecteur lumière : parallèle ou perpendiculaire au plan de polarisation ? Cette question est devenue caduque avec la découverte de la théorie de Maxwell ; une nouvelle situation s'est créée. Rétrospectivement, chaque camp pourrait prétendre avoir eu raison. En réalité, cependant, chacun avait simplement appris quelque chose de nouveau, quelque chose qu'il n'avait pas envisagé auparavant. La situation est assez similaire aujourd'hui avec la question de la validité de la loi de causalité. Notre première tâche sera donc d'examiner dans quelle mesure les formulations de la loi de causalité utilisées jusqu'à présent conservent une signification claire. Je décrirai ensuite la nouvelle situation dans laquelle la théorie quantique nous a placés et, enfin, j'aborderai diverses formulations du principe de causalité qui semblent adaptées à cette nouvelle situation.

Si l'on demande à l'une de nos connaissances si elle sait ce que signifie la loi de causalité, elle affirme généralement que cette loi lui est parfaitement claire. Elle la formule en quelque sorte ainsi : "Pas d'effet sans cause.". Or, le fait que les termes "cause" et "effet" ne soient pas clairement définis ici est évident, puisque notre connaissance admettrait volontiers qu'un effet peut avoir plusieurs causes. Seuls les naturalistes ont tenté de postuler un lien clair entre les événements observables sous le nom de loi de causalité.

Cette relation sans équivoque régit indubitablement tout le domaine de notre expérience quotidienne ; nous observons régulièrement que deux processus issus d'un état initial similaire et se déroulant dans des conditions similaires évoluent également de manière similaire. Si, exceptionnellement, les deux processus évoluent différemment, nous supposons que l'un d'eux a été perturbé par une cause qui nous a échappé. De la régularité des processus dans le monde de notre expérience, nous inférons ainsi une loi générale, que nous ne pouvons toutefois justifier que par une extrapolation assez poussée à partir de l'expérience. Avant de nous interroger sur la formulation possible de cette loi, obtenue par extrapolation, il nous faut examiner précisément le sens que peut revêtir une telle extrapolation. Il ne s'agit pas simplement de rejeter d'emblée les concepts vides comme inutiles et inintéressants. Prenons un exemple, cité également par Bergmann dans son ouvrage sur la loi de causalité : selon la théorie de la relativité, le concept de "simultanéité absolue" est vide ; il est fondamentalement irréalisable, puisque les signaux ne peuvent jamais se propager plus vite que la lumière. Pourtant, la simultanéité absolue est un concept très utile pour comprendre la mécanique classique. Ce n'est que lorsqu'on souhaite formuler des énoncés concrets sur le comportement du monde extérieur que de tels concepts ou propositions vides de sens deviennent inutilisables. Un autre concept de ce type, dont l'inutilité est immédiatement manifeste, serait par exemple "La couleur de l'électron". Le physicien ne peut s'intéresser à de tels concepts ; cependant, ils peuvent présenter un intérêt pédagogique ou psychologique. Il faut rappeler ici que, par exemple, la poésie utilise souvent délibérément des mots dont le sens n'est pas parfaitement précis, laissant ainsi une large place à l'imagination de l'auditeur ; la philosophie, elle aussi, peut légitimement s'intéresser à de tels mots. Seules les sciences naturelles reposent sur l'hypothèse que leurs concepts peuvent, au moins, acquérir un sens précis au fil du temps.

Après ces remarques préliminaires, j'aimerais aborder brièvement les formulations antérieures de la loi de causalité avant de traiter de la situation nouvelle engendrée par la mécanique quantique. Vous aurez certainement déjà constaté, d'après ce qui précède, qu'il est aisé de formuler la loi de causalité de manière à la rendre irréfutable.

La formulation la plus simple m'a été rapportée un jour, sur le ton de la plaisanterie, par M. Bohr : "Tout ce qui arrive devait arriver." On voit immédiatement que cette affirmation ne dit absolument rien du cours des événements. Car, selon elle, nous ne faisons que constater ce qui doit arriver ; rien ne peut être changé par la suite. Ainsi, une telle formulation est irréfutable puisqu'elle n'affirme rien.

Mais penchons-nous maintenant sur une formulation plus sérieuse, celle qui a constitué le fondement de toute la physique pendant plus d'un siècle : "Si l'état actuel d'un système isolé est connu précisément dans toutes ses caractéristiques déterminantes, alors l'état futur du système peut en être calculé." Cette affirmation constitue la base de la tentative ambitieuse de créer une science naturelle objective entreprise par les physiciens au siècle dernier. Elle repose sur l'hypothèse qu'il est, en principe, possible de connaître un système isolé dans toutes ses caractéristiques essentielles. On suppose ainsi que les interactions qui relient l'objet à l'observateur, et qui permettent en premier lieu à ce dernier de formuler une affirmation sur le système, peuvent être minimisées à un point tel qu'elles deviennent insignifiantes pour le cours des événements. Seule cette hypothèse justifie de traiter les systèmes "en soi", c'est-à-dire indépendamment de leur observabilité, d'un point de vue physique. En théorie quantique moderne, cette même hypothèse s'avère erronée, comme je l'expliquerai plus loin. Il est fondamentalement impossible de déterminer tous les paramètres d'un système isolé nécessaires au calcul de son avenir. Ceci, bien sûr, ne prouve pas que la version précédemment citée de la loi de causalité soit incorrecte, mais simplement qu'elle soit vide de sens ; elle n'a plus aucune validité ni aucun champ d'application et, par conséquent, aucun intérêt pour les physiciens.

Vous me reprocherez d'avoir porté un jugement quelque peu hâtif sur la loi de causalité en physique classique. Car, direz-vous, ce principe est indispensable comme fondement de toutes les sciences naturelles, même s'il ne peut être démontré physiquement. On peut argumenter, par exemple, comme le fait Kant dans la "*Critique de la raison pure*" ; permettez-moi de citer quelques phrases de cet ouvrage :

> “Supposons que rien ne précède un événement qui doit le suivre selon une règle ; alors toute séquence de perception serait purement subjective, sans aucune détermination objective quant à ce qui précède et ce qui suit les perceptions. Ainsi, lorsque nous faisons l’expérience d’un événement, nous présupposons toujours qu’il a été précédé et qu’il suit une règle. Car sans cela, je ne dirais pas de l’objet qu’il suit. Par conséquent, c’est toujours par rapport à une règle qui détermine la séquence des apparitions que je rends ma synthèse subjective objective, et c’est seulement sous cette seule présupposition que l’expérience d’un événement est possible.”

Kant souligne à juste titre ici que la possibilité même d’objectiver nos perceptions est liée au postulat d’une relation causale. Pour Kant, le principe de cause à effet n’est donc pas une proposition vérifiable par l’expérience, mais une forme de pensée, un “jugement synthétique a priori”, qui constitue pour lui le fondement des sciences naturelles. Si, à un moment donné, des événements physiques apparaissent indéterminés, alors, selon la formulation kantienne de la loi de causalité, il s’agit simplement d’un signe de l’existence d’un problème encore non résolu. Il est évident qu’une telle conception de la loi de causalité comme postulat a priori ne peut être réfutée par l’expérience, puisqu’elle ne dit rien de l’expérience. Or, il s’avérera que la soutenir face aux faits de la physique atomique moderne est impraticable. La raison en est que, précisément, une telle objectivation de notre monde expérimental, telle qu’on l’a tentée au temps de Kant, s’est révélée fondamentalement impossible. La loi de causalité est ainsi semblable à la géométrie euclidienne. On peut la concevoir comme une somme de principes a priori qui ne peuvent être vérifiés par l’expérience ; ces principes ne peuvent alors être réfutés, puisqu’ils ne disent rien de l’expérience, mais ils se révèlent souvent impraticables dans les domaines de la physique moderne.

Je crois vous avoir présenté un aperçu suffisant des formulations précédentes du principe de cause à effet, et je vais maintenant décrire la nouvelle situation créée par la théorie quantique.

La théorie atomique a conduit au dilemme suivant : d’une part, nous décrivons tous les processus dans l’espace et le temps. Nous parlons, par exemple, d’un électron trouvé à un endroit précis à un instant précis, ou de l’intensité du champ électrique ayant une certaine valeur en un point précis de l’espace à un instant donné. Ainsi, nous décrivons toujours les résultats expérimentaux dans l’espace et le temps. D’autre part, selon Bohr, l’introduction même d’un point de référence spatio-temporel implique automatiquement de ne pas connaître certaines variables. Je tiens à souligner explicitement, à l’attention des physiciens parmi vous, que cette connaissance préalable est toujours nécessaire, que l’on considère la matière ou la lumière comme un mouvement ondulatoire ou comme l’action de particules.

Pour clarifier ce point, je présenterai d’abord brièvement le modèle particulaire, puis le modèle ondulatoire. Je ne fais que rappeler un fait souvent évoqué. Pour déterminer la position d’un électron à un instant précis, on bloque un faisceau d’électrons à l’aide d’un diaphragme, comme décrit par Bohr. Ce diaphragme peut être ouvert et fermé par un curseur. En raison de la diffraction de de Broglie, la quantité de mouvement de l’électron après son passage à travers le diaphragme est, dans une certaine mesure, indéterminée. De plus, le travail effectué pour ouvrir et fermer le curseur est également indéterminé.

Ainsi, la quantité de mouvement et l’énergie de l’électron ne sont connues qu’imparfaitement après la détermination de sa position, conformément aux relations d'incertitude.

L'idée principale de Bohr est de souligner que dès qu'un référentiel "fixe" est introduit, on perd la connaissance de l'impulsion et de l'énergie de ce référentiel, et donc aussi de celles des particules à mesurer.

On a souvent affirmé qu'une telle indétermination n'apparaît que dans le cadre du modèle particulaire ; c'est précisément pour cette raison qu'il serait plus raisonnable d'utiliser uniquement le modèle ondulatoire. Je tiens donc à souligner qu'une indétermination analogue apparaît lorsqu'on part de modèles ondulatoires spatio-temporels. Si, par exemple, on cherche à mesurer l'intensité des champs électrique et magnétique dans une petite région de l'espace, on ne peut le faire qu'en observant la déviation de la matière chargée causée par ces champs. Les phénomènes de diffraction à l'œuvre dans cette matière font alors qu'on ne peut mesurer avec précision que l'intensité du champ électrique ou celle du champ magnétique.

Le principe d'incertitude démontre, premièrement, qu'une connaissance précise des éléments nécessaires à l'établissement d'une relation causale en théorie classique est impossible en théorie quantique. Une autre conséquence de cette incertitude est que le comportement futur d'un tel système, connu de manière imprécise, ne peut être prédit qu'imprécisément, c'est-à-dire uniquement de façon statistique. Il est clair que le principe d'incertitude remet en cause le fondement de la loi causale précise de la physique classique, tant dans le cadre du modèle particulaire que dans celui du modèle ondulatoire de l'espace-temps.

La question se pose alors de savoir si le cadre mathématique de la théorie quantique, qui, d'une certaine manière, remplace la relation causale classique, pourrait néanmoins permettre une formulation précise du principe de causalité. Plusieurs physiciens ayant formulé cette conjecture, je souhaite examiner plus en détail le cadre mathématique de la mécanique quantique.

Si une mesure physique est effectuée avec la plus grande précision théorique possible, c'est-à-dire dans les limites des incertitudes, le résultat constitue un "cas pur" au sens de Weyl. Cela signifie que ce résultat peut être représenté de manière unique dans le cadre mathématique de la mécanique quantique, par exemple par un paquet d'ondes de Schrödinger dans l'espace de configuration ou par un rayon dans l'espace de Hilbert. Si le système reste isolé après cette première mesure, le groupe d'ondes représentatif dans l'espace de configuration peut être obtenu à partir du paquet d'ondes initial par une équation différentielle. Si l'on considère ce groupe d'ondes comme représentatif de l'"événement réel", alors un événement causalement déterminé semble se produire.

Il nous faut maintenant examiner dans quelle mesure le processus ondulatoire susmentionné peut être considéré comme l'équivalent mathématique du comportement physique du système. Au vu des développements de la physique atomique, on pourrait initialement considérer avec certitude que ce processus ondulatoire englobe toutes les caractéristiques définissant le système, c'est-à-dire qu'aucune grandeur physique du système n'est étrangère à la fonction d'onde. Inversement, si le comportement physique du système était uniquement déterminé par celui de la fonction d'onde, on pourrait parler de déterminisme, comme en théorie classique. Or, ce n'est pas le cas. Premièrement, puisque le processus ondulatoire se déroule dans un espace de configuration multidimensionnel, il ne peut être aussi facilement transposé dans un espace-temps et assimilé au comportement du système. Une description spatio-temporelle n'est possible que si l'on pose la question physique suivante : qu'observe-t-on lorsqu'on réalise des expériences spécifiques sur le système considéré ? La théorie classique fournit une prédiction unique du résultat de chaque expérience si tous les paramètres du système sont connus. La théorie quantique, en revanche, ne fournit généralement que des résultats statistiques, même si tous les paramètres (notamment la fonction d'onde) sont connus. Il est toutefois toujours possible d'identifier des expériences pour lesquelles la mécanique quantique permet encore des prédictions uniques. Pour la plupart des expériences, cependant, seule la probabilité d'un résultat particulier peut être calculée.

Prenons un exemple : supposons que l'on établisse qu'un atome est dans son état "normal". Si l'on réalise une expérience de déviation de Stern-Gerlach avec cet atome, le résultat peut être prédit avec exactitude. En revanche, si l'on tente de mesurer la position de l'électron à l'aide d'un microscope, on ne peut donner que la probabilité d'un résultat particulier. La différence cruciale entre la théorie classique et la mécanique quantique est donc la suivante : si toutes les caractéristiques d'un système fermé sont connues grâce à des mesures antérieures, alors :

a) en théorie classique, le comportement du système lors de toute observation ultérieure est entièrement déterminé ;
b) en revanche, en théorie quantique, le comportement du système lors de nouvelles expériences ne peut généralement être décrit que statistiquement. Ce n'est que pour des expériences judicieusement choisies que la théorie quantique permet une prédiction non ambiguë.

L'une des raisons de cette indétermination fondamentale pourrait être l'imprécision inhérente à la toute première mesure, due au principe d'incertitude. On pourrait également l'attribuer aux perturbations introduites par les instruments de mesure lors de l'observation. L'essentiel est que le résultat d'une expérience ne peut, par principe, être prédit avec exactitude.

Le fait que toutes les caractéristiques d'un système fermé soient déterminées par une équation différentielle au cours du temps, et que seule la réaction du système à l'observateur ou à son dispositif devienne indéterminée, suggère la solution suivante : combiner le système et l'observateur (qu'il soit humain ou appareil, cela importe peu) en un seul système, à nouveau entièrement représenté par une fonction d'onde. Cette fonction d'onde possède elle aussi une équation différentielle, ce qui détermine son comportement au cours du temps. La difficulté réside cependant dans le fait que cette fonction d'onde ne fournit aucune description spatio-temporelle du phénomène. Elle est totalement inutile à moins d'observer à nouveau le système dans son ensemble et de se demander ce qu'une telle observation révélerait. Or, à cette question, la fonction d'onde ne fournit naturellement qu'une réponse statistique.

Telle est la nouvelle situation créée par la mécanique quantique. Il nous faut maintenant examiner dans quelle mesure le concept de causalité existant reste applicable dans ce contexte.

La physique classique a formulé la loi de causalité comme suit : "Si tous les facteurs déterminants d'un système fermé sont connus avec exactitude à un instant donné, alors le comportement physique du système peut être calculé de manière unique pour l'avenir." Cependant, si, en théorie atomique, on considère que les facteurs déterminants d'un système sont des quantités dérivées de sa description spatio-temporelle (par exemple, la position et la vitesse d'un électron ou l'amplitude de l'onde en un point précis de l'espace), alors cette formulation n'est pas applicable, c'est-à-dire qu'elle est dénuée de sens, puisque la première prémisse ne peut être satisfaite ; les facteurs déterminants ne sont jamais connus avec exactitude en raison des relations d'incertitude. Dans ce cas, la loi classique de causalité n'a aucun champ de validité. Si, en revanche, on considère les propriétés de la fonction d'onde dans l'espace de configuration ou du vecteur dans l'espace de Hilbert comme facteurs déterminants, alors, dans la formulation susmentionnée, la première prémisse du principe de causalité est effectivement satisfaite, mais la seconde est fausse. Le comportement physique du système ne peut être calculé de manière unique à partir de la spécification complète de tous les facteurs déterminants. Par conséquent, les facteurs déterminants peuvent probablement être calculés sans ambiguïté pour l'avenir également ; mais les facteurs déterminants ne définissent le comportement physique que dans des cas particuliers.

Dans ces cas particuliers, le résultat des expériences futures est précisément prévisible, et il s'ensuit qu'un certain degré de déterminisme, si je puis dire, est préservé même en théorie atomique. Si l'on considère les quantités caractérisées par le vecteur dans l'espace de Hilbert comme les facteurs déterminants, on peut formuler une loi causale restreinte qui reste précisément correcte et significative même en physique atomique : "Si les facteurs déterminants d'un système isolé sont précisément connus à un instant donné, alors à tout instant ultérieur, des expériences sur ce système ont des résultats précisément déterminés et prévisibles, pourvu que le système ne subisse aucune perturbation autre que celles causées par l'expérience susmentionnée."

Cette formulation est certes quelque peu lourde, mais elle définit précisément les limites dans lesquelles la mécanique quantique peut être décrite comme une théorie causale. Le choix de qualifier ou non cette formulation de loi causale relève, bien entendu, d'une simple question de préférence.

Après avoir examiné la conception réaliste du principe classique de causalité, il nous faut maintenant aborder la formulation kantienne, selon laquelle le principe de causalité n'est pas une proposition vérifiable par l'expérience, mais plutôt un postulat permettant d'appréhender la nature. Nous nous interrogerons d'abord sur la possibilité même de maintenir un tel postulat si les processus que nous observons ne semblent pas déterminés.

À titre de comparaison, je me permets de rappeler la question, largement débattue il y a quelques années, de la validité de la géométrie euclidienne en relativité générale. Kant considère également la géométrie euclidienne parmi les jugements synthétiques a priori ; elle peut donc être postulée, et plusieurs philosophes ont accordé une grande importance à cette possibilité. Un exemple simple permettra d'illustrer ce principe :

Selon Einstein, dans un champ gravitationnel, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à 180 degrés. Par conséquent, si l'on tend un triangle à l'aide d'un fil tendu à ses extrémités, et que l'on augmente progressivement la tension de sorte que les côtés du triangle se rapprochent de plus en plus de la droite, la somme des angles (que l'on mesure, par exemple, en découpant les angles formés par le fil dans une plaque de métal et en les juxtaposant) tendra vers une valeur différente de 180 degrés. C'est ainsi que se déroulerait l'expérience, selon Einstein, avec des mesures suffisamment précises. Pour l'interprétation, on peut toutefois, si on le souhaite, conserver la géométrie euclidienne en supposant que les forces du champ gravitationnel empêchent d'une manière ou d'une autre les fils de s'aligner sur la ligne la plus courte, ou en supposant que les plaques de métal utilisées pour la mesure des angles se déforment sous l'influence du champ gravitationnel. On le voit, on peut donc effectivement conserver la géométrie euclidienne. Mais cela n'apporte rien, car il faut alors renoncer à toute tentative de lien direct avec l'expérience.

De la même manière, selon Kant, on peut aussi sauver la loi stricte de causalité, car il reste toujours permis, aux points où les processus de notre expérience sont indéterminés, de dire : nous ne connaissons pas encore la cause. Une telle défense réussie du principe causal est cependant une victoire à la Pyrrhus, car la loi causale ainsi sauvée n'est plus utile pour formuler des énoncés sur la réalité. Il me semble fort peu pratique, par exemple, de dire en théorie atomique : nous ne connaissons tout simplement pas encore les causes qui amènent l'atome, dans un état excité, à passer à un certain état inférieur. Car nous savons, par de nombreux arguments, que l'atome ne possède pas d'autres facteurs déterminants que ceux exprimés dans la fonction d'onde. En effet, ce n'est pas, pour ainsi dire, la faute de l'atome si ses transitions radiatives se produisent de manière statistique, mais cela résulte plutôt de l'indétermination de l'interaction de l'atome avec le moyen d'observation utilisé : le "rayonnement". Si Kant a démontré que le postulat causal est une condition préalable à une science naturelle objective, il faut alors rétorquer qu'une physique "objective" en ce sens, c'est-à-dire une séparation parfaitement nette du monde en sujet et objet, n'est plus possible. Alors qu'auparavant une description spatio-temporelle était possible même pour un objet isolé, elle est désormais essentiellement liée à l'interaction de l'objet avec l'observateur ou ses instruments ; l'objet totalement isolé ne possède plus, en principe, aucune propriété descriptible. La physique atomique moderne ne s'intéresse donc plus à la nature et à la structure des atomes, mais aux processus que nous percevons lors de leur observation ; l'accent est ainsi toujours mis sur le concept de "processus d'observation". Ce processus ne peut plus être simplement objectivé, ni son résultat directement transformé en un objet réel.

J'espère que les considérations présentées vous auront démontré que la situation créée par la physique atomique exige véritablement un réexamen du concept de causalité. À la suite de cette discussion, je voudrais résumer : premièrement, la formulation classique de la loi de causalité s'est révélée vide et physiquement inapplicable ; deuxièmement, un déterminisme partiel persiste même en physique atomique, que l'on peut formuler approximativement ainsi : "Si un système est connu dans tous ses aspects déterminants à un instant donné, alors, à tout instant ultérieur, des expériences seront menées sur ce système et leurs résultats pourront être prédits avec précision." La question de savoir si un tel comportement doit encore être qualifié de causal ou non ne me semble pas pertinente. Nous devrions plutôt nous réjouir que la nature, à travers les phénomènes atomiques, nous ait appris quelque chose de nouveau concernant les principes fondamentaux des sciences naturelles.