

Claire Voisin

Claire Voisin a reçu de nombreux prix pour ses réalisations mathématiques et elle est connue pour ses travaux en géométrie algébrique, en particulier en relation avec la théorie de Hodge. Cette théorie a de nombreuses applications. Par exemple, étant donné l'espace de modules de fibrés vectoriels holomorphes stables de rang k sur une surface de Riemann complexe, on sait via la théorie de Hodge que l'espace de modules est muni d'une métrique kählérienne canonique. Le théorème de Riemann-Roch nous donne une formule pour la dimension de cet espace de modules, mais il peut ne pas être possible d'utiliser réellement cette formule en pratique¹. Une métrique kählérienne est une métrique riemannienne sur une variété complexe, c'est-à-dire que l'on a une variété kählérienne munie d'une métrique hermitienne

$$h = g - i\omega,$$

où ω est une forme kählérienne définie par

$$g(X, Y) = \omega(X, JY).$$

J est une structure presque complexe sur la variété. Une structure de ce genre est un choix lisse d'applications linéaires sur chaque espace tangent

$$J_X : T_X M \rightarrow T_X M$$

tel que

$$J_X^2 = \text{Id}.$$

En d'autres termes, les espaces tangents ont la structure d'espaces vectoriels complexes où J agit comme la multiplication par i . On peut montrer que si une variété M possède une structure presque complexe, alors elle doit posséder une structure Spin^c . Des constructions similaires sont possibles lorsqu'on travaille avec des structures presque quaternioniques, où les espaces tangents ont la structure d'espaces vectoriels quaternioniques.

Pour $r \geq 2$, fixons un repère orthonormal $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{R}^r$. L'algèbre de Clifford Cl_r est l'algèbre engendrée par $e_1, \dots, e_r$ soumise aux relations suivantes :

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i.$$

L'algèbre de Clifford paire est la sous-algèbre engendrée par les produits pairs :

$$\text{Cl}_r^0 = \langle e_i e_j \mid i < j \rangle.$$

Le concept d'une structure presque complexe peut être généralisé en disant qu'une structure d'algèbre de Clifford presque paire de rang r sur une variété M est un choix lisse de représentations d'algèbres :

$$\Phi : \text{Cl}_r^0 \rightarrow \text{End}(T_X M),$$

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Edward Witten, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, dans Shing-Tung Yau (éd.), *Geometry, Topology, and Physics for Raoul Bott* (Cambridge, Massachusetts : International Press, 1994).

$$e_i \cdot e_j \mapsto \Phi(e_i, e_j) = J_{ij}.$$

Les endomorphismes dans ce cas sont antisymétriques. Une question naturelle à se poser est de savoir si une variété M ayant une structure d'algèbre de Clifford presque paire de rang r implique que M doit posséder une structure $\text{Spin}^r(n)$. On peut montrer qu'une variété possédant ce type de structure ainsi qu'un grand groupe d'automorphismes implique que la variété est toujours une variété spin lorsque $r = 5, 7$ et qu'environ la moitié des variétés sont spin lorsque $r = 3, 4, 6, 8$, bien que la preuve soit technique². Une structure Spin^r est simplement une généralisation appropriée d'une structure Spin^c , étant donné que toutes les variétés ne possèdent pas une structure Spin^c et que le groupe doit donc être élargi. Cela peut être fait en considérant le groupe spin torsadé :

$$\text{Spin}^r(n) = \frac{\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(r)}{\langle (-1, -1) \rangle}.$$

Les théorèmes correspondants sont analogues : il suffit de remplacer $\text{SO}(2)$ par $\text{SO}(r)$, et ainsi de suite. Toute variété riemannienne orientable possède l'une de ces structures.

La théorie de Hodge est une façon d'étudier les groupes de cohomologie sur les variétés lisses. Si l'on souhaite la résumer brièvement, on peut voir qu'il s'agit d'une théorie des formes harmoniques. Comme beaucoup de choses, la théorie trouve en réalité son origine dans la physique mathématique. Le théorème de de Rham sur les variétés lisses énonce que si M est une variété lisse et p un entier non négatif, alors le groupe de cohomologie de de Rham est isomorphe au groupe de cohomologie singulière correspondant, à coefficients dans $\mathbb{R}$ (voir Bredon pour une belle démonstration)³ :

$$H_{\text{dR}}^p \cong H^p(M, \mathbb{R}).$$

Cette application est donnée par

$$\omega \mapsto [\sigma \mapsto \int_{\sigma} \omega].$$

Si vous ne savez pas ce qu'est un groupe de cohomologie de de Rham, prenons une forme φ qui s'annule lorsque la dérivée extérieure lui est appliquée : une telle forme est dite fermée. Considérons une p -forme φ qui est la dérivée extérieure d'une $(p-1)$ -forme η

$$\varphi = d\eta.$$

On peut prouver que le carré de la dérivée extérieure est toujours nul. Évidemment, il est équivalent de montrer que le résultat est 0 lorsqu'il agit sur une p -forme arbitraire, plaçons donc tout en coordonnées locales :

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{p!} (d\varphi_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Agissons sur la forme résultante avec l'opérateur de dérivée extérieure :

$$dd\varphi = \frac{1}{p!} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

2. Gerardo Arizmendi, Rafael Herrera et Noemi Santana, *Almost even-Clifford hermitian manifolds with large automorphism group*, *Proceedings of the American Mathematical Society* 144(9), 4009-4020 (2016).

3. Glen Bredon, *Topology and Geometry* (New York : Springer-Verlag, 1993).

Les dérivées partielles mixtes commutent :

$$\frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k \partial x^j}.$$

Cependant, le produit extérieur anti-commute :

$$dx^k \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^k.$$

Cela signifie que la contraction sur les indices j et k s'annulera, mais cela implique que l'ensemble s'annule :

$$dd\varphi = 0.$$

Cela implique à son tour que toute forme exacte est fermée. En quotientant l'ensemble des p -formes fermées sur M par l'ensemble des p -formes exactes, on obtient le p -ième groupe de cohomologie de de Rham. Pour une forme fermée ω sur M , la classe d'équivalence de ω dans cet espace quotient est appelée la classe de cohomologie de ω .

En d'autres termes, chaque classe de cohomologie réelle sur une variété lisse peut être représentée par une forme fermée sur cette variété, et deux formes fermées représentent la même classe de cohomologie si elles ne diffèrent que par une forme exacte. Ce résultat est toujours considéré comme un résultat remarquable de nombreuses années après avoir été démontré. Nous avons mentionné plus tôt que les équations de Maxwell peuvent s'écrire en fonction d'une 2-forme. Dans le cas homogène, les équations peuvent en fait s'écrire

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ d * F &= 0. \end{aligned}$$

La relation F et son opérateur de Hodge sont invariants sous le groupe des transformations de Lorentz. C'est en considérant ces équations que Hodge a défini le premier l'opérateur de dualité de Hodge et est parvenu à la théorie de Hodge. Comme vous le savez probablement, une classe d'équivalence peut avoir de nombreux représentants, et il y a une question quant à savoir s'il existe un choix canonique pour la forme ω qui représente une classe de cohomologie. Nous pourrions imaginer l'ensemble $\{\omega + d\tau\}$ pour une certaine forme exacte $d\tau$ et considérer le membre "le plus petit" de cet ensemble où τ varie sur toutes les p -formes. Cet ensemble pourrait être défini ponctuellement et intégré sur la variété entière⁴.

Une p -forme lisse ω sur une variété riemannienne compacte est dite harmonique si elle s'annule lorsqu'elle subit l'opérateur de dérivée extérieure et si

$$\|\omega\|_M \leq \|\omega + d\tau\|_M.$$

L'ensemble des p -formes harmoniques sur la variété est noté $\mathcal{H}^p(M)$. Définissons le laplacien de Hodge sur les formes par

$$\begin{aligned} \Delta : \Omega^p(M) &\rightarrow \Omega^p(M), \\ \Delta\omega &= (d\delta + \delta d)\omega. \end{aligned}$$

4. Mark Green, Jacob Murre et Claire Voisin, *Algebraic Cycles and Hodge Theory* (Berlin : Springer-Verlag, 1994).

Pour une p -forme ω , $\Delta\omega = 0$ si et seulement si $d\omega = 0$ et $\delta\omega = 0$. Cela peut être prouvé trivialement en utilisant la définition de l'opérateur, puisque

$$\begin{aligned}(\Delta\omega, \omega) &= (d\delta\omega, \omega) + (\delta d\omega, \omega), \\ &= (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega).\end{aligned}$$

La seconde étape découle du fait que

$$(\delta\omega, \phi) = (\omega, d\phi),$$

où ω est une p -forme et ϕ est une $(p-1)$ -forme : cela peut être prouvé en utilisant le théorème de Stokes pour les variétés. Si nous posons $\Delta\omega = 0$, cela implique clairement que $\delta\omega = 0$ et $d\omega = 0$, ce qui est une direction de la démonstration⁵. Avec un peu plus de travail, on peut montrer que les deux équivalents à ω , une forme harmonique.

En substance, nous cherchons à montrer qu'une suite de formes lisses dans une classe d'équivalence de de Rham dont les tailles convergent vers l'infimum des tailles de toutes les formes de la classe converge également vers une forme lisse. Cela peut être fait avec une théorie d'EDP elliptiques, et l'on arrive à un résultat central connu sous le nom de théorème de Hodge. Celui-ci énonce que pour une variété riemannienne compacte M avec orientation, l'application canonique qui envoie une p -forme harmonique vers la classe d'équivalence de de Rham correspondante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\mathcal{H}^p(M) \cong H_{\text{dR}}^p(M).$$

Cela implique que chaque classe de cohomologie de de Rham possède une unique forme harmonique comme représentant. Ce théorème peut conduire à des résultats géométriques puissants, en particulier pour les variétés kählériennes. Un corollaire connexe est le théorème de décomposition de Hodge qui énonce qu'on a l'isomorphisme suivant :

$$H^k(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

Il y a plusieurs résultats spéciaux associés à la cohomologie des variétés kählériennes compactes. Par exemple, si M est une variété kählérienne compacte de dimension n , alors $(-1)^q \langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive sur l'espace $L^j(P^{p,q}(M))$ et les espaces sont orthogonaux. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit intérieur hermitien sur $\Omega^k(M)$ défini par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = i^{k^2} \int_M \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \bar{\beta}.$$

$P^{p,q}(M)$ désigne un espace de formes différentielles primitives défini par

$$P^{p,q}(M) = \{\Omega^{p,q}(M) \text{ tel que } \Lambda\omega = 0\}.$$

Un autre exemple est le principe des deux types. Commençons par une variété kählérienne compacte comme précédemment et soit une forme $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ telle que $\partial\alpha = 0$, $\bar{\partial}\alpha = 0$ et rendons cette forme exacte sous l'opérateur différentiel ∂ ou $\bar{\partial}$, alors il existe $\lambda \in \Omega^{p-1,q-1}(M)$ telle que

$$\alpha = \partial\bar{\partial}\lambda.$$

5. Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* (Heidelberg : Springer, 2008).

∂ et $\bar{\partial}$ sont une paire particulière d'opérateurs qui sont définis uniquement par l'équation ⁶

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

La preuve de ce résultat de cohomologie nécessite le théorème de Hodge, ainsi que des résultats de la théorie des opérateurs elliptiques, en particulier l'existence d'une fonction de Green G unique sur une variété riemannienne orientée compacte envoyant $\Omega^k(M)$ sur $\Omega^k(M)$ tel que G commute avec d et δ , $G(\mathcal{H}^k(M)) = 0$, et

$$\text{Id} = \pi_{\mathcal{H}} + \Delta G,$$

où $\pi_{\mathcal{H}}$ est la projection orthogonale.

L'un des problèmes du prix du Millénaire est un problème en théorie de Hodge, connu sous le nom de conjecture de Hodge. Cette conjecture énonce que si X est une variété projective complexe non singulière (c'est-à-dire une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$), alors tout cycle de Hodge (ou cycle algébrique) est une combinaison linéaire de classes de cycles algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par un théorème de Chow, les cycles algébriques sur une variété projective complexe sont équivalents à des sous-espaces analytiques fermés. Il existe également des versions plus généralisées de la conjecture de Hodge : par exemple, il existe une version de la conjecture qui prend pour X une variété kählérienne complexe et qui énonce que tout cycle de Hodge sur X devrait être une combinaison linéaire rationnelle de classes de Chern de fibrés vectoriels sur X . On peut obtenir une version différente en remplaçant dans la version ci-dessus les fibrés vectoriels remplacés par des faisceaux cohérents. Claire Voisin a prouvé que la conjecture était fausse en construisant un tore complexe de dimension 4 tel que tout cycle de Hodge analytique non trivial de degré 4 est tel que tout faisceau cohérent analytique $\mathcal{F}$ sur la variété a une classe de Chern triviale. Au cours de la recherche de ce contre-exemple, Claire Voisin a trouvé un critère non trivial pour l'annulation de la deuxième classe de Chern d'un faisceau cohérent analytique sur X . Si X est une variété kählérienne compacte de dimension $n \geq 3$ telle que le groupe de Néron-Severi engendré par les premières classes de Chern de fibrés de lignes holomorphes sur X est le groupe nul, si X ne contient aucun sous-ensemble analytique fermé propre de dimension positive, et si pour la classe d'équivalence kählérienne $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X)$, l'ensemble des cycles de Hodge Hdg^4 est perpendiculaire à $[\omega]^{n-2}$ pour l'accouplement d'intersection

$$H^4(X, \mathbb{R}) \otimes H^{2n-4}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

alors tout faisceau cohérent analytique $\mathcal{F}$ sur X a une classe de Chern triviale ⁷. Claire Voisin a initialement proposé une version plus forte de la conjecture, mais Grothendieck a réalisé que cette version était automatiquement fausse pour des raisons triviales ⁸.

Nous devrions saisir l'opportunité à ce stade pour définir des structures de Hodge. Une structure de Hodge de poids k est un espace vectoriel réel V muni d'un réseau $\Gamma \subseteq V$, ainsi que d'une filtration décroissante $F^\bullet V_{\mathbb{C}}$ sur $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ avec $F^0 V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}$ et $F^{k+1} V_{\mathbb{C}} = 0$ telle que

$$V_{\mathbb{C}} = F^p V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{k-p+1} V_{\mathbb{C}}},$$

6. Mark Green, Jacob Murre et Claire Voisin, *Algebraic Cycles and Hodge Theory* (Berlin : Springer-Verlag, 1994).

7. Claire Voisin, *A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties*, *International Mathematics Research Notices*, 2002 (20), 1057-1075 (2002).

8. Alexander Grothendieck, *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, *Topology*, 8 (3), 299-303 (1969).

pour tout $p = 0, \dots, k$. Il est également possible de définir une sous-structure de Hodge. Gardons à l'esprit que toute structure de Hodge ne provient pas d'une variété kählérienne compacte. Une structure de Hodge polarisée entière de poids k est donnée par une structure de Hodge $(V_{\mathbb{Z}}, F^p V_{\mathbb{C}})$ de poids k , ainsi qu'une forme d'intersection Q sur $V_{\mathbb{Z}}$ que nous définirons, qui est symétrique si k est pair, alternée si k est impair, et telle que la décomposition de Hodge est orthogonale pour la métrique hermitienne induite et

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} H(\alpha) > 0,$$

pour α non nul de type (p, q) .

Nous avons essayé de donner une idée brève de la manière dont la théorie de Hodge peut être appliquée pour apprendre des choses sur la cohomologie. Elle peut également être utilisée pour tirer des conclusions sur la dualité de Poincaré et les théorèmes de dualité, même si nous n'entrerons pas dans les détails ici. Un théorème important que nous devrions mentionner est le théorème de l'indice de Hodge. Commençons par X une variété kählérienne compacte de dimension n , munie d'une forme kählérienne ω . Prenons un accouplement $\langle, \rangle$ défini par

$$H^k(X, \mathbb{R}) \otimes H^{2n-k}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si L est l'opérateur de Lefschetz qui agit sur la cohomologie, définissons la forme d'intersection Q sur $H^k(X, \mathbb{R})$:

$$Q(\alpha, \beta) = \langle L^{n-k} \alpha, \beta \rangle = \int_X \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \beta.$$

On peut prouver que les sous-espaces $H^{p,q}(X) \subset H^k(X, \mathbb{C})$ forment une somme directe orthogonale pour H_k . De plus, la forme définie par

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} H_k$$

est définie positive sur le sous-espace complexe défini par l'intersection de $H^k(X, \mathbb{C})$, avec $H^{p,q}(X)$. Le théorème de l'indice de Hodge est une conséquence de ce théorème : il décrit l'indice (ou plutôt, la signature) de l'intersection. La signature de la forme définie par

$$Q(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge \beta$$

sur $H^n(X, \mathbb{R})$ est égale à

$$\sum_{a,b} (-1)^a \dim(H^{a,b}(X)).$$

La plupart de ces résultats isolés (et bien d'autres) peuvent être reliés pour prouver que la cohomologie rationnelle d'une variété complexe polarisée compacte peut être décomposée en une somme directe de structures de Hodge polarisées. Nous pouvons également définir des structures de Hodge intégrales et rationnelles via la décomposition de Hodge de la cohomologie. La décomposition de Lefschetz et le théorème de l'indice de Hodge permettent une expression en somme directe de la cohomologie d'une variété kählérienne compacte, où les éléments de la somme sont des composants primitifs qui sont compatibles avec la décomposition de Hodge. Si α est une forme fermée réelle de type $(1, 1)$ sur une variété kählérienne compacte avec une classe de cohomologie entière, alors α est la forme de Chern pour un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne. De plus,

si L est un fibré en droites holomorphe sur une variété complexe compacte, et h est une métrique de fibré hermitien dont la forme de Chern est kähliérienne, alors pour un N assez grand, les sections holomorphes de $L^{\otimes N}$ donnent un plongement holomorphe de la variété dans un espace projectif⁹.

Il existe également une notion de théorie de Hodge formelle dans la littérature, où l'on étudie les structures de Hodge formelles et où l'on étend la réalisation de Hodge T_{Hodge} des 1-motifs de Deligne à une réalisation provenant de la catégorie des 1-motifs de Laumon à la catégorie des structures de Hodge formelles libres de torsion FHS_1^{fr} de niveau ≤ 1 . Un motif est un objet qui a été introduit pour unifier différentes théories de cohomologie (nous avons mentionné la cohomologie de de Rham et la cohomologie singulière, mais il y en a beaucoup d'autres). Ces structures de Hodge formelles forment une sous-catégorie de la catégorie abélienne FHS_1 de toutes les structures de Hodge mixtes formelles :

$$\text{FHS}_1^{\text{fr}} \subset \text{FHS}_1.$$

La catégorie des structures de Hodge mixtes polarisables graduées libres de torsion est une sous-catégorie de FHS_1^{fr} et l'on peut montrer qu'il y a une équivalence de catégories

$$T_{\mathfrak{f}} : \mathcal{M}_1^{\text{a,fr}} \rightarrow \text{FHS}_1^{\text{fr}},$$

où $\mathcal{M}_1^{\text{a,fr}}$ est la catégorie des 1-motifs de Laumon et où l'on obtient un diagramme commutatif tel que le foncteur de la catégorie des 1-motifs de Deligne $\mathcal{M}_1^{\text{fr}}$ vers les 1-motifs de Laumon est une inclusion canonique, le foncteur de $\mathcal{M}_1^{\text{a,fr}}$ vers $\mathcal{M}_1^{\text{fr}}$ est un foncteur d'oubli (l'inverse de l'inclusion), et

$$T_{\mathfrak{f}}(M)_{\text{ét}} = T_{\text{Hodge}}(M_{\text{ét}}).$$

Ceci équivaut à dire que $T_{\mathfrak{f}} = T_{\text{Hodge}}$ si $M = M_{\text{ét}}$, où $M := [F \rightarrow G]$ est un 1-motif de Laumon (défini comme étant un groupe formel commutatif avec une partie étale sans torsion), un groupe algébrique connexe commutatif, et une application de faisceaux abéliens u qui est fidèlement plate avec des présentations finies. La topologie "fppf" est un type de topologie qui est pertinent en géométrie algébrique (les topologies plates en général sont des exemples de topologies de Grothendieck)¹⁰.

Ce discours sur les catégories peut sembler étrange si vous n'êtes pas habitué à ce type de paysage mathématique. L'homologie, par exemple, est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des suites de groupes abéliens, et cela n'a pas nécessairement beaucoup de sens d'essayer de le voir d'une autre manière. Partons d'une classe d'objets et pour chaque paire ordonnée d'objets dans la classe, spécifions un ensemble de morphismes qui envoie l'objet A sur l'objet B (noté par $[A, B]$). Pour chaque triplet d'objets A, B, C , spécifions une règle qui associe à chaque paire de morphismes un autre morphisme qui appartient à l'ensemble des morphismes de l'objet A à l'objet C , appelé composition des morphismes. La classe des objets ainsi que les morphismes et les lois de composition forment une catégorie si la composition des morphismes est associative (si $(hg)f = h(gf)$ pour tout triplet de morphismes, où $f \in [A, B]$, $g \in [B, C]$ et $h \in [C, D]$) et si

9. Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry* (Cambridge : Cambridge University Press, 2002).

10. Luca Barbieri-Viale, *Formal Hodge theory*, *Math. Res. Lett.* 14(3), 385-394 (2007).

pour tout objet B , il y a un morphisme identité envoyant B sur lui-même (B) tel que pour deux morphismes quelconques $f \in [A, B]$ et $g \in [B, C]$, on a les égalités suivantes :

$$\text{id}_B f = f, \quad g \text{id}_B = g.$$

Il y a de nombreux exemples de catégories. Prenons la catégorie de tous les ensembles et de leurs applications, par exemple. Observons que nous ne parlons jamais de prendre l'ensemble de tous les ensembles, car nous serions alors confrontés au paradoxe de Russell. L'énoncé le plus courant d'un exemple de ce paradoxe demande qu'un barbier dans un village rase toute personne qui ne se rase pas elle-même et personne d'autre. La question est de savoir si le barbier se rase lui-même, ou non : c'est le type de paradoxe qui est décrit, puisque vous vous retrouvez avec quelque chose qui est et n'est pas un élément de lui-même. En termes formels, le paradoxe est

$$\text{Si } R = \{x \text{ tel que } x \notin x\}, \text{ alors } R \in R \iff R \notin R.$$

Évidemment, c'est un non-sens complet.

Les objets de la catégorie sont tous les ensembles et l'ensemble des morphismes est composé de toutes les applications possibles d'un ensemble dans un autre. L'exemple le plus évident suivant est la catégorie des groupes et des homomorphismes de groupes, où les objets sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes. La catégorie des espaces topologiques ainsi que l'ensemble des applications continues en est un autre exemple. On peut également prendre la catégorie formée de tous les espaces topologiques et de toutes les classes d'applications homotopiques : dans ce cas, les morphismes sont des classes d'un type particulier d'application, et non des applications elles-mêmes. En général, les morphismes n'ont pas besoin d'être des applications, bien que nous puissions les désigner comme s'ils l'étaient. Ces définitions absorbent également la notion d'isomorphisme d'une manière plus générale. Deux objets dans une catégorie sont isomorphes s'il existe deux morphismes $f \in [A, B]$ et $g \in [B, A]$ tels que

$$fg = \text{id}_B, \quad gf = \text{id}_A.$$

Un isomorphisme dans la catégorie des ensembles est une bijection, un isomorphisme dans la catégorie des espaces topologiques est un homéomorphisme, et ainsi de suite.

Prenons maintenant deux catégories et, pour un objet A dans la première catégorie, associons un objet dans la seconde catégorie $F(A)$. De plus, pour un morphisme $f \in [A, B]$ dans l'ensemble des morphismes de la première catégorie, attribuons un morphisme $f_* \in [F(A), F(B)]$ dans l'ensemble des morphismes de la seconde catégorie. Cela définit un foncteur covariant de la première catégorie vers la seconde catégorie, dans la mesure où f étant un morphisme d'identité implique que f_* est un morphisme d'identité et dans la mesure où

$$(fg)_* = f_*g_*,$$

pour une composition bien définie. Si vous définissez tout pour agir dans la direction opposée et si on modifie trivialement les axiomes, vous obtenez à la place un foncteur contravariant¹¹. Pour un exemple de foncteur, prenons la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie V avec des isomorphismes comme morphismes. On peut définir un foncteur $\mathcal{F} : V \rightarrow V$ en exigeant que

$$\mathcal{F}(V) = V^*$$

11. Sergey Matveev, *Lectures on Algebraic Topology* (Switzerland : European Mathematical Society, 2006).

pour un certain espace vectoriel V vivant dans la catégorie, et que $\mathcal{F}(A) = (A^{-1})^*$ pour un certain isomorphisme A vivant dans l'ensemble des morphismes.

On peut montrer que $\mathcal{F}$ est un foncteur covariant lisse (c'est-à-dire qu'il est lisse pour chaque V) et que $\mathcal{F}(TM)$ et T^*M sont des fibrés vectoriels isomorphes de manière lisse via un choix canonique d'isomorphisme de fibré¹². De plus, l'image de la structure de Hodge sur la cohomologie des variétés kählériennes par rapport aux applications holomorphes entre deux variétés kählériennes est fonctorielle. Il devrait vous paraître désormais clair que ce type de théorie est très utile pour prouver des choses, et qu'il peut être étendu à de multiples contextes d'une manière flexible. Cependant, comme toujours, vous devez réfléchir précisément à ce qui peut être calculé, et faire des restrictions si cela ne peut pas l'être. Par exemple, un foncteur pour une théorie de l'homologie enverra la catégorie de tous les espaces topologiques vers la catégorie de toutes les *suites* de groupes abéliens, ce qui va rendre le calcul pratique des groupes d'homologie extrêmement difficile, à moins que des restrictions ne soient apportées au type d'espace que nous étudions. En fait, il est rare que l'on puisse considérer ce qu'on pourrait appeler le cas "arbitraire" en mathématiques pures, car il y a trop d'éléments à traiter : on doit généralement faire une restriction ou une supposition particulière avant de pouvoir faire des progrès.

L'un des résultats les plus importants de Claire Voisin a été la preuve de la conjecture de Green sur les syzygies du plongement canonique d'une courbe algébrique dans le cas de courbes génériques C de genre $g(C)$ et de gonalité G dans l'intervalle

$$\frac{g(C)}{3} + 1 \leq \text{gon}(C) \leq \frac{g(C)}{2} + 1.$$

La gonalité est définie par

$$\text{gon}(C) := \text{Min}\{d, \exists L \in \text{Pic } C, d^0 L = d, h^0(L) \geq 2\}$$

telle que

$$\text{gon}(C) = \begin{cases} \frac{g+3}{2}, & g \text{ impair} \\ \frac{g+2}{2}, & g \text{ pair} \end{cases}$$

Spécifiquement, Claire Voisin a prouvé une reformulation de la conjecture qui est que pour une courbe projective lisse de genre g en caractéristique 0, la condition que l'indice de Clifford soit supérieur à l est équivalente au fait que $K_{g-l-2,1}(C, K_C) = 0$. La conjecture pour les courbes arbitraires est toujours un problème ouvert¹³.

Un autre résultat important de Claire Voisin a été la preuve qu'en dimension ≥ 4 , il existe des variétés kählériennes compactes qui ne sont pas homotopiques à des variétés projectives complexes. Ce résultat est intéressant, car on savait déjà qu'une surface kählérienne compacte est équivalente par déformation à une surface projective complexe, mais le nouvel apport du résultat est que ce n'est pas vrai dans les dimensions supérieures. Deux variétés complexes équivalentes par déformation sont homéomorphes et homotopiques. Le problème de savoir si le résultat pour une surface peut être

12. John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (New York : Springer, 2003).

13. Claire Voisin, *Green's generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a K3 surface*, *J. Eur. Math. Soc.* 4, 363-404 (2002).

étendu à une dimension supérieure est connu sous le nom de problème de Kodaira. Il y a aussi un théorème de Kodaira plus général qui énonce qu'une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la classe de cohomologie est entière¹⁴.

14. Claire Voisin, *On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds*, *Inventiones Math.* 157 (2), 329-343 (2003).