

Dusa McDuff

Dusa McDuff a reçu de nombreux prix pour ses contributions à la géométrie et à la topologie symplectiques. Elle est également membre de la Royal Society (*Fellow of the Royal Society*). Il convient ici d'expliquer un peu plus en détail le versant topologique de la géométrie symplectique. La topologie symplectique étudie les aspects globaux de la géométrie symplectique, tandis que les structures locales d'une variété symplectique sont équivalentes à une structure euclidienne. Cela découle du théorème de Darboux, qui énonce que toute forme symplectique ω sur M est localement difféomorphe à la forme standard ω_0 sur $\mathbb{R}^{2n}$ euclidien. Pour le prouver, on a d'abord besoin d'un lemme. Considérons une variété lisse M^{2n} et une sous-variété compacte $Q \subset M$. Supposons que ω_1 et ω_2 soient des 2-formes fermées telles que, en tout point $q \in Q$, ω_1 et ω_2 soient égales et non dégénérées sur l'espace tangent $T_q M$. Dans ce cas, il existe des voisinages ouverts U_1 et U_2 de Q et un difféomorphisme $\psi : U_1 \rightarrow U_2$ tels que

$$\psi = \text{Id}, \quad \psi^* \omega_2 = \omega_1,$$

où, pour la première équation, nous nous sommes restreints à Q . Pour le prouver, il suffit de montrer qu'il existe une 1-forme $\sigma \in \Omega^1(U_1)$ telle que

$$\sigma = 0, \quad d\sigma = \omega_2 - \omega_1.$$

On le démontre en restreignant l'application exponentielle au fibré normal $TQ^\perp$ de la sous-variété Q par rapport à une métrique riemannienne quelconque g ¹.

Le fibré normal est un exemple de fibré vectoriel relativement facile à visualiser. Plus précisément, un fibré vectoriel lisse de dimension n est un couple de variétés lisses E (connu sous le nom d'espace total) et d'une variété de base M , muni d'une application surjective $\pi : E \rightarrow M$ appelée projection, telle que chaque fibre $\pi^{-1}(p)$ de E au-dessus d'un point p soit munie d'une structure d'espace vectoriel. De plus, pour chaque point de M , il existe un voisinage U de p et un difféomorphisme

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

appelé trivialisat on locale de E , tel que l'on ait un diagramme commutatif lorsque l'on inclut la projection sur le premier facteur du produit

$$\pi_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U.$$

La restriction de φ à une fibre $\pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire. On constate ainsi que l'on revient pour l'essentiel à l'algèbre linéaire, cette construction ayant pour effet de réunir une collection d'espaces vectoriels en une union, mais il ne faut pas oublier que ce fibré est également une variété.

L'exemple prototype est le fibré tangent TM , qui est l'union disjointe des espaces tangents obtenus en chaque point. Si l'on prend à la place les espaces cotangents, on construit un fibré différent appelé fibré cotangent T^*M . De plus, considérons un fibré dont la fibre en chaque point est le complément orthogonal de T_pM pour une sous-variété de l'espace euclidien : c'est ce qu'on appelle le fibré normal de la sous-variété². C'est un résultat de Whitney (le théorème de plongement) que

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Dusa McDuff et Dietmar Salamon, Introduction to Symplectic Topology (New York : Oxford University Press, 1998).

2. John M. Lee, *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature* (New York : Springer, 1997).

toute variété lisse de dimension n possède un plongement propre et lissant dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Il découle de ce théorème que toute variété lisse de dimension n est difféomorphe à une sous-variété fermée et plongée de $\mathbb{R}^{2n+1}$ ³. Cela résulte du fait que l'on sait déjà qu'il existe un plongement lisse propre, et que l'image de ce plongement doit être une sous-variété plongée et fermée dans l'espace ambiant, car les applications continues propres sont fermées. Comme corollaire de l'énoncé précédent, toute variété lisse possède une fonction distance dont la topologie métrique est équivalente à la topologie induite. Cela tient au fait que tout sous-espace d'un espace métrique hérite d'une métrique qui contrôle la topologie du sous-espace.

Le théorème de plongement de Whitney a répondu à l'une de ces questions d'apparence évidente que personne n'avait su résoudre pendant longtemps : existe-t-il des variétés lisses qui ne sont pas difféomorphes à des sous-variétés de l'espace euclidien ? Un résultat similaire, appelé théorème d'immersion de Whitney, énonce que toute variété lisse de dimension n possède une immersion dans $\mathbb{R}^{2n}$. Il existe également des versions plus fortes de ces deux théorèmes, qui stipulent que si $n > 1$, alors toute variété lisse de dimension n possède une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ et que, si $n > 0$, toute variété lisse de dimension n possède un plongement lisse dans $\mathbb{R}^{2n}$. Le théorème de plongement de Nash est un résultat similaire pour les variétés riemanniennes. Pour un point p dans une variété riemannienne M , on définit l'application exponentielle

$$\exp_p : V_p \rightarrow M,$$

$$v \mapsto \gamma_v(1),$$

où

$$\gamma_v(t) : [0, T] \rightarrow M$$

est la géodésique maximale telle que

$$\gamma_v(0) = p, \quad \partial_t \gamma_v(0) = v.$$

Certains auteurs notent $\exp_p^\nabla$ pour insister sur la dépendance par rapport à la connexion, mais nous omettrons cet indice, car il est implicite. V_p est l'ensemble des éléments de l'espace tangent en p pour lesquels γ_v est définie sur l'intervalle unitaire. L'application exponentielle prend un voisinage de $0 \in T_p M$ et le transforme par difféomorphisme en un voisinage de $p \in M$, de sorte qu'on peut la voir comme une application qui part du point 0 dans l'espace tangent en un point, puis descend vers le point correspondant sur la variété. Cela peut se démontrer par un bref calcul.

$T_p M$ est un espace vectoriel, il peut donc être identifié à $\mathbb{R}^n$. Pour la même raison, $T_0(T_p M)$ est isomorphe à $T_p M$ lui-même. La dérivée de $\exp_p(0)$ est alors une application linéaire de l'espace tangent dans lui-même :

$$d\exp_p(0) : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Grâce à l'identification avec l'espace euclidien, l'application $\exp_p^{-1}$ définit une carte de coordonnées locale pour un voisinage de p , où p est envoyé sur $\exp_p^{-1}(p) = 0$. Les coordonnées locales définies par la carte $(\exp_p^{-1}, U)$ sont appelées coordonnées normales riemanniennes de centre p . Dans ces

3. John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (New York : Springer, 2003).

coordonnées, $x = \{x^i\}$ autour du point $\exp_p^{-1}(p) = 0$, on a l'expression suivante pour une métrique riemannienne g :

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ipjq}x^p x^q + O(|x|^3), \\ g_{ij}(0) &= \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(0) = 0, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0, \\ \Delta(g_{ij}) &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2} g_{ij} \right) = -\frac{2}{3}R_{ij}. \end{aligned}$$

Les calculs sont généralement beaucoup plus simples avec ce choix de coordonnées locales ; il est donc conseillé de vérifier que l'on peut reproduire le reste des résultats de ce lemme, et de consulter un manuel standard si l'on a besoin de quelques repères. Le fait que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ découle immédiatement de l'identification de l'espace tangent avec l'espace euclidien, puisque cette identification doit envoyer une base orthonormée de $T_p M$ par rapport à la métrique riemannienne sur la base orthonormée euclidienne correspondante de l'espace euclidien. Le développement de la métrique provient d'un développement de Taylor :

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_p \partial_q g_{ij} x^p x^q + O(|x|^3).$$

Un calcul montre que⁴

$$\frac{1}{2}\partial_p \partial_q g_{ij} x^p x^q = -\frac{1}{3}R_{ipjq} x^p x^q.$$

Une autre façon de voir les choses (un choix de notation différent, en somme) consiste à prendre $p \in M$ et $v \in T_p M$. L'application

$$\sigma_{p,v}(-T_-, (p, v), T(p, v)) \rightarrow M$$

est la solution maximale de

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = 0.$$

Les conditions initiales dans ce cas sont

$$\sigma_{p,v}(0) = p,$$

$$\dot{\sigma}_{p,v}(0) = v.$$

Il existe une solution unique d'après les théorèmes standard sur les solutions des équations différentielles ordinaires (EDO). Nous avons également

$$\sigma_{p,\lambda v}(t) = \sigma_{p,v}(\lambda t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \left(-\frac{T_-}{\lambda}, \frac{T}{\lambda}\right).$$

$\exp_p(v)$ est difféomorphe par rapport à la fois à p et à v en raison de la dépendance lisse des solutions d'EDO par rapport aux conditions initiales.

Pour prouver que l'application exponentielle est un difféomorphisme sur un voisinage de $p \in M$, nous devons calculer la dérivée au vecteur nul de l'espace tangent. Cette dérivée peut être calculée

4. Reto Müller, Differential Harnack Inequalities and the Ricci Flow (Allemagne : European Mathematical Society, 2004).

en considérant une courbe à l'intérieur de l'espace tangent qui part de l'origine. Commençons par une courbe dans $T_p M$ donnée par

$$\xi(t) = tw,$$

où $w \in T_0(T_p M) \cong T_p M$.

$$\begin{aligned} (d \exp_p(0))(w) &= \frac{d}{dt} \exp_p(\xi(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \sigma_{p, \xi(t)}(1) \\ &= \frac{d}{dt} \sigma_{p, w}(t). \end{aligned}$$

Tout ce qui se trouve du côté droit est évalué en $t = 0$. Définissons une nouvelle application exponentielle agissant sur les couples comme suit :

$$\text{Exp}(p, v) := (p, \exp_p(v)).$$

Si nous évaluons la dérivée en zéro pour un couple de vecteurs, nous avons

$$(d \text{Exp}(p, 0))(v, w) = (d \text{Exp}(p, 0))(v, 0) + (d \text{Exp}(p, 0))(0, w).$$

Quelques calculs et considérations sur les conditions initiales ci-dessus pour une courbe dans la variété nous montrent que :

$$\begin{aligned} (d \text{Exp}(p, 0))(v, 0) &= \frac{d}{dt} \text{Exp}(\gamma(t), 0) \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma(t), \gamma(t)) \\ &= (v, v). \end{aligned}$$

De même, les côtés droits des deux premières équations sont évalués en $t = 0$. Nous avons également

$$\begin{aligned} (d \text{Exp}(p, 0))(0, w) &= (0, (d \exp_p(0))(w)) \\ &= (0, w). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$d \text{Exp}(p, 0) = (0, w).$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de la section nulle de TM tel que

$$\text{Exp} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$$

est un difféomorphisme, où $\mathcal{V}$ est un voisinage de $M \times M$. Le théorème des fonctions implicites énonce que si M et N sont des variétés lisses, $p \in M$, et F est une application lisse entre les deux variétés telle que la différentielle F_* soit une bijection, alors il existe des voisinages ouverts U_0 de p et V_0 de $F(p)$ tels que la restriction de F de U_0 à V_0 soit un difféomorphisme. Évidemment, ces critères sont satisfaits dans ce cas si l'on considère l'endroit où l'on effectue la mise en correspondance.

La version pour les applications entre sous-ensembles ouverts d'espaces euclidiens est similaire. Essentiellement, dès que l'on dispose de géodésiques, on peut décrire l'application exponentielle⁵.

On peut souvent utiliser les propriétés souhaitables de l'application exponentielle pour obtenir des démonstrations d'autres lemmes et théorèmes. Par exemple, dans la preuve d'une version plus faible du théorème de non-effondrement du volume de Perelman, on observe l'hypothèse selon laquelle si ω_n est le volume de la boule unité dans l'espace euclidien de dimension n et $V(p, r)$ est le volume de la boule géodésique en un point p de rayon r pour une variété riemannienne complète, alors le rapport de volume tend toujours vers le volume de la boule unité euclidienne⁶. Sous forme d'équation :

$$K(p, r) = \frac{V(p, r)}{r^n} \rightarrow \omega_n.$$

Une façon de voir que cela est vrai consiste à effectuer un bref calcul avec l'application exponentielle. En partant d'une boule unité dans l'espace tangent en un point, puis (en supposant le rayon r petit), on peut projeter cette boule sur la variété M à l'aide de l'application exponentielle (appelons cette application particulière φ_r). C'est ce que fait l'application sur un vecteur tangent :

$$v \mapsto \exp_p(rv).$$

Nous avons dit que r était petit, on peut donc définir une métrique sur la boule via le “ramené” *pullback* de la métrique sur la variété par l'application exponentielle. Cela implique que le volume de la boule géodésique est égal au volume de la boule unité dans l'espace tangent par rapport à la métrique du “ramené” (pullback), mais le rapport de volume doit alors être égal au volume de cette boule unité par rapport à une métrique modifiée qui est

$$h_r = \frac{g_r}{r^{\frac{n \times 2}{n}}} = \frac{g_r}{r^2}$$

La modification de la métrique découle du fait que multiplier une métrique riemannienne par une fonction f multiplie la forme volume par $f^{n/2}$.

Il suffit maintenant d'utiliser les propriétés bien connues de l'application exponentielle que l'on peut trouver dans n'importe quel manuel de géométrie différentielle et d'évaluer pour un couple de vecteurs et un point q dans la boule unité⁷ :

$$\begin{aligned} (g_r)_q(v, w) &= g_{\exp_p(rq)}\left((d \exp_p)_{rq}(v), (d \exp_p)_{rq}(w)\right), \\ &= r^2 g_{\exp_p(rq)}\left((d \exp_p)_{rq}(v), (d \exp_p)_{rq}(w)\right), \end{aligned}$$

où nous avons sorti les facteurs de la forme bilinéaire. Cela implique immédiatement que

$$(h_r)_q(v, w) = g_{\exp_p(rq)}\left((d \exp_p)_{rq}(v), (d \exp_p)_{rq}(w)\right).$$

5. Jürgen Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis (Heidelberg : Springer, 2008).

6. Peter Topping, Lectures on the Ricci Flow (Cambridge : Cambridge University Press, 2006).

7. Michael Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry (USA : Publish or Perish, 1979).

Prenons les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} (h_r)_q(v, w) &= g_{\exp_p(0)} \left((d \exp_p)_0(v), (d \exp_p)_0(w) \right) \\ &= g_p(u, v).\end{aligned}$$

À la limite, la métrique associée à la forme volume converge vers la métrique euclidienne, mais cela implique que la forme volume converge vers la forme volume euclidienne. Les propriétés diféomorphes de l'application exponentielle sont également utilisées pour prouver le lemme que nous avons mentionné plus tôt en lien avec le théorème de Darboux. Le résultat principal découle ensuite de l'application du lemme dans le cas où Q est un point unique. Le théorème de Darboux est un résultat local ; le prendre et tenter de l'étendre à toute la variété ne fonctionnera pas en raison d'obstructions topologiques. Cette preuve du théorème de Darboux a été initialement suggérée par Moser.

En topologie symplectique, on étudie la structure globale d'une variété symplectique et le comportement non local des symplectomorphismes qui sont loin de l'identité. Un certain nombre de nouvelles constructions sont apparues dans le développement de ces études globales. Par exemple, Lalonde et Dusa McDuff ont découvert une méthode pour construire des plongements symplectiques de boules, cette méthode étant utilisée pour prouver le théorème de non-gonflement (*non-squeezing theorem*) pour des variétés symplectiques arbitraires. Ce théorème énonce qu'il n'existe aucun plongement symplectique qui prend une boule standard de dimension $2n + 2$ de rayon unité et l'injecte dans un cylindre $(M \times D^2(a), \omega \oplus \sigma)$ dont l'espace de base $D^2(a)$ est un disque fermé de σ -aire $a < \pi$ ⁸. C'est l'un des théorèmes les plus importants en géométrie symplectique, prouvé pour la première fois par Gromov⁹. Une autre question clé dans la transition du local au global est la question de l'existence d'orbites périodiques pour les flots hamiltoniens. Partons d'une valeur régulière $c \in \mathbb{R}$ d'un hamiltonien lisse $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Si Φ est une application lisse entre deux variétés M et N , un point $p \in M$ est dit point régulier de Φ si la différentielle associée

$$\Phi_* : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$$

est surjective. C'est un point critique dans le cas contraire.

Un point de l'autre variété N est dit valeur régulière de Φ si chaque point de l'ensemble $\Phi^{-1}(c)$ est un point régulier. $\Phi^{-1}(c)$ est connu sous le nom d'ensemble de niveau. Pour des raisons techniques, il est courant de voir une sous-variété comme un ensemble de niveau d'une application lisse, bien qu'il soit nécessaire d'avoir un critère pour distinguer les ensembles de niveau qui ne sont pas des sous-variétés plongées. Par exemple, si l'on a par hasard un ensemble de niveau qui est une courbe comportant un point de rebroussement (*cusp*), alors cette courbe ne peut pas être une sous-variété plongée dans le plan. Si on utilise des applications vers $\mathbb{R}^k$, l'ensemble de niveau $\Phi^{-1}(0)$ est appelé ensemble zéro de l'application Φ . (Les ensembles de niveau ont joué un rôle crucial dans la preuve par Huisken-Ilmanen de l'inégalité de Penrose riemannienne). Il existe divers théorèmes relatifs aux ensembles de niveau ; par exemple, le théorème des ensembles de niveau réguliers énonce que

8. François Lalonde et Dusa McDuff, *Local non-squeezing theorems and stability*, Geometric and Functional Analysis 5(2), 364 – 386 (1995).

9. Mikhail Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82, 307 – 347 (1985).

tout ensemble de niveau régulier d'une application lisse est une sous-variété fermée plongée dont la co-dimension est égale à la dimension de l'espace d'arrivée. C'est un corollaire du théorème du rang constant.

Supposons donné par l'ensemble de niveau du hamiltonien lisse $S = H^{-1}(c)$ qui est compact et non vide. Il s'ensuit que S est invariant sous le flot des équations de Hamilton qui nous sont familières en mécanique classique :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

En tout point régulier de H , le champ de vecteurs hamiltonien est tangent aux ensembles de niveau de H . De plus, le champ de vecteurs XH n'a aucun zéro sur la surface S . Une chose simple que nous aimerions savoir est si le flot possède ou non une orbite périodique. Dans certains cas, il n'est pas difficile de voir quelles seraient les orbites périodiques (nous avons déjà mentionné les caractéristiques sur la sphère, qui sont toutes fermées circulaires, et donc périodiques). De même, pour un ellipsoïde vu comme une hypersurface de $\mathbb{R}^{2n}$, il n'y a pas moins de n caractéristiques fermées distinctes. Dans cette situation, une caractéristique est une feuille d'un feuilletage de la surface S appelée feuilletage caractéristique. C'est à son tour le feuilletage déterminé par les courbes intégrales d'une distribution tangente de dimension 1 construite en choisissant un sous-espace

$$L_z = \{v \in T_z S \text{ tels que } v \perp T_z S\} \subset T_z S$$

de l'espace tangent $T_z S$ pour tout $z \in S$. Si H est un hamiltonien avec S l'ensemble de niveau régulier associé, alors on peut voir que

$$XH \in L_z$$

pour tout $z \in S$, de sorte que les solutions des équations de Hamilton ci-dessus sont les caractéristiques, modulo des reparamétrisations du temps.

La conjecture de Weinstein relie un type particulier d'hypersurface appelé hypersurface de contact (l'hypersurface doit également être compacte). L'énoncé précis de la conjecture est que le champ de vecteurs de Reeb d'une telle hypersurface doit posséder au moins une orbite périodique. La géométrie de contact a été décrite comme la version de la géométrie symplectique de dimension impaire. Partons d'une variété de dimension $2n + 1$ et $\xi \subset TM$ d'un champ d'hyperplans transversalement orientables. Prenons une 1-forme α telle que $\xi = \ker \alpha$, alors $d\alpha$ est non dégénérée sur ξ si et seulement si

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

ξ est une structure de contact et α une forme de contact pour ξ . De manière informelle, une structure de contact peut être vue comme un champ d'hyperplans qui ne pourrait pas être plus éloigné de l'intégrabilité. On peut également voir la structure de contact comme une classe d'équivalence de formes partitionnées par une relation d'équivalence donnée par l'équation ci-dessus : explicitement, la relation d'équivalence est que la forme α est équivalente à α' si et seulement si

$$\alpha' = f\alpha,$$

où α' et α sont des 1-formes avec

$$\xi = \ker \alpha = \ker \alpha'.$$

Cela implique que spécifier une forme de contact équivaut à spécifier une certaine fonction f positive et non nulle, mais une fonction sur une variété symplectique génère un flot. Étant donnée une forme de contact α , il existe un unique champ de vecteurs $Y_\alpha : M \rightarrow TM$ tel que

$$\iota(Y)d\alpha = 0, \quad \alpha(Y) = 1.$$

Nous appelons ce champ de vecteurs le champ de vecteurs de Reeb déterminé par la forme de contact α . Un exemple de structure de contact serait la structure de contact standard sur l'espace euclidien de dimension impaire $\mathbb{R}^{2n+1}$ donné par la 1-forme :

$$\alpha_0 = dz - \sum_j y_j dx_j.$$

On peut spécifier une autre forme de contact sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ via

$$\alpha_1 = dz + \frac{1}{2} \sum_j (x_j dy_j - y_j dx_j).$$

Dans ce cas, les deux formes de contact sont difféomorphes, mais ce ne sera pas toujours le cas. Tous les difféomorphismes de S^n ne préservent pas les formes de contact, par exemple, même à un facteur multiplicatif près.

Les hypersurfaces de type de contact sont caractérisées par l'existence d'un champ de vecteurs X proche de la surface de niveau du hamiltonien tel que

$$\mathcal{L}_X \omega_0 = \omega_0.$$

Weinstein a proposé sa conjecture pour toutes les hypersurfaces de type de contact, et il a été ultérieurement prouvée par Viterbo que toute hypersurface de type de contact dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ possède une caractéristique fermée. La conjecture générale pour les variétés de contact qui ne sont pas des hypersurfaces de contact plongées dans l'espace euclidien est toujours ouverte, cependant. La conjecture a été prouvée pour toutes les variétés de 3 dimensions fermées, par Taubes, en utilisant une version de l'homologie de Seiberg-Witten-Floer¹⁰. Un autre problème fondamental en géométrie symplectique est celui de la transition du local au global, qui est celui de la rigidité. Supposons que nous prenions une suite de symplectomorphismes qui convergent sur un ensemble compact vers un difféomorphisme. Cette limite préserve le volume, mais il n'est pas clair que la structure symplectique soit préservée, et si cette structure n'est pas préservée, alors nous ne pouvons plus garantir que nous étudions encore la topologie symplectique. Autrement dit, nous aimerions connaître la C^0 -clôture du groupe des difféomorphismes symplectiques. Il s'avère que la clé pour caractériser les symplectomorphismes est d'utiliser le théorème de non-gonflement pour définir un invariant symplectique qui est continu par rapport à la topologie C^0 . Les difféomorphismes symplectiques sont alors simplement les difféomorphismes qui préservent cet invariant symplectique, d'où l'on voit que les quatre branches fondamentales du sujet s'influencent mutuellement.

Le dernier problème fondamental en géométrie symplectique est celui du comptage des points fixes de symplectomorphismes. Là encore, il y a une conjecture qui englobe ce problème, connue sous le

10. Clifford Taubes, *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture*, Geometry and Topology, 11(4), 2117 – 2202 (2007).

nom de conjecture d'Arnold. La conjecture met en relation le nombre minimal de points fixes d'un symplectomorphisme hamiltonien sur une variété fermée avec la théorie de Morse¹¹. Nous n'entrerons pas dans les détails de la théorie de Morse ici, mais le point de départ est de prendre une variété riemannienne compacte ainsi qu'une fonction $F \in C^\infty(M)$. La théorie de Morse commence par étudier le comportement de F au voisinage de chaque point critique (en supposant qu'il y ait un nombre fini de ces points) et étudie les changements topologiques possibles que les ensembles de niveau de F peuvent subir¹². Le nombre minimal de points fixes pour une fonction définie sur une variété compacte est en fait un invariant topologique de la variété. Ce nombre minimal doit être d'au moins 2 d'après le calcul infinitésimal élémentaire, car toute fonction aura un maximum local distinct et un minimum local distinct. Une façon d'exprimer la conjecture est de dire que si ϕ est l'application temps-1 d'un flot hamiltonien dépendant du temps sur une variété symplectique compacte, alors ϕ possède un nombre de points fixes distincts qui est d'au moins le nombre de points critiques sur une variété compacte, pris sur toutes les fonctions lisses f . La conjecture d'Arnold peut être vue comme une version globale de l'énoncé local selon lequel une fonction définie sur une variété doit avoir plus de points critiques qu'il n'y a de zéros pour un champ de vecteurs ou un champ de covecteurs défini sur cette variété. Les détails exacts de l'interaction entre la structure symplectique locale et les propriétés globales (et la manière dont la première se manifeste dans la seconde) sont au cœur de la topologie symplectique¹³.

Dusa McDuff a apporté de nombreuses contributions à ce sujet encore en plein essor. Dusa McDuff a été la première personne à construire des variétés symplectiques fermées et simplement connexes qui ne sont pas des variétés de Kähler. Un exemple qu'elle a fourni est le suivant. Considérons la 4-variété kählérienne symplectique de Thurston (M, ω) . Cette variété est un quotient $\mathbb{R}^4/\Gamma$, où Γ est le groupe affine discret engendré par les translations unitaires le long des axes x_1, x_2, x_3 ainsi que par une transformation

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2, x_2, x_3, 1 + x_4).$$

M est un fibré en T^2 au-dessus de T^2 et la forme symplectique ω se relève en une forme sur $\mathbb{R}^4$:

$$\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4.$$

Les premier et troisième nombres de Betti de la variété sont impairs, ce qui implique que M n'a pas de structure kählérienne¹⁴. Rappelons que la somme alternée des nombres de Betti est égale à la caractéristique d'Euler :

$$\chi(U) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \beta_p(U).$$

Dans le contexte des structures presque complexes, Dusa McDuff a prouvé que pour (M, ω) , une 4-variété symplectique compacte connexe qui contient une 2-sphère S symplectiquement plongée avec un nombre d'intersections défini par le produit intérieur défini positif $S \cdot S$, nous avons que (M, ω)

11. Dusa McDuff et Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology* (New York : Oxford University Press, 1998).

12. John Milnor, *Morse Theory* (Princeton : Princeton University Press, 1963).

13. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology* (New York : Oxford University Press, 1998).

14. Dusa McDuff, *Examples of simply connected symplectic non-Kählerian manifolds*, *Journal of Differential Geometry*, 20, 267–277 (1984).

est minimale, alors il s'agit soit du plan projectif complexe, soit d'un fibré en S^2 au-dessus d'une surface riemannienne. Les fibres de la règle peuvent également être supposées symplectiques¹⁵. Dans un article sur les actions du cercle, Dusa McDuff a prouvé qu'un cercle symplectique sur une 4-variété fermée est hamiltonien si et seulement s'il a des points fixes, fournissant également un exemple d'action de cercle symplectique non hamiltonienne sur une 6-variété symplectique compacte avec des points fixes¹⁶. Dusa McDuff a également démontré divers résultats liés aux éclatements (*blow-ups*) et aux contractions (*blow-downs*). Par exemple, le fait qu'en dimension 4, les éclatements $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}_\psi)$ et $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}_\phi)$ sont isotopes si et seulement si les plongements symplectiques normalisés ψ et ϕ sont isotopes¹⁷.

15. Dusa McDuff, *Rational and ruled symplectic 4-manifolds*, Journal of the American Mathematical Society, 3, 679–712 (1990).

16. Dusa McDuff, *The moment map for circle actions on symplectic manifolds*, Journal of Geometrical Physics, 5, 149–160 (1988).

17. Dusa McDuff, *Remarks on the uniqueness of symplectic blowing-up*. In Symplectic Geometry (ed. D. Salamon), 157–168. (Cambridge : Cambridge University Press, 1993).