

Krystyna Kuperberg

Krystyna Kuperberg a fait des recherches en topologie et en systèmes dynamiques, y compris des travaux liés à la conjecture de Seifert. La conjecture de Seifert est un énoncé concernant la 3-sphère. La n -sphère est la plus intensément étudiée de toutes les variétés, du niveau de base au niveau avancé. Un exercice standard avec la n -sphère est de calculer l'application de transition donnée par $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$ où α_1 est la projection stéréographique depuis le pôle sud de la sphère et α_2 la projection stéréographique depuis le pôle nord. Étudions le cas de S^2 , mais tous les arguments peuvent être généralisés. On commence par paramétrer la droite qui passe par le pôle sud et un autre point P . D'après la géométrie analytique, la représentation paramétrique de la droite passant par deux points P et P' est donnée par

$$r(t) = P + tD,$$

où $D = P' - P$ et $t \in [0, 1]$. En appliquant cela à S^2 , on a

$$\begin{aligned} r(t) &= S + t(P - S), \\ &= (0, 0, -1) + t((x^1, x^2, x^3) - (0, 0, -1)), \\ &= (0, 0, -1) + t(x^1, x^2, x^3 + 1), \\ &= (tx^1, tx^2, -1 + t(x^3 + 1)). \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à un nouvel ensemble de coordonnées :

$$z^1 = tx^1, \quad z^2 = tx^2, \quad z^3 = -1 + t(x^3 + 1).$$

Les points sur ce faisceau de droites intersectent le plan $x^3 = 0$, auquel cas, en réarrangeant, on a :

$$z^3 = -1 + t(x^3 + 1) = 0.$$

$$t(x^3 + 1) = 1.$$

$$t = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

En remplaçant cela dans le nouvel ensemble de coordonnées :

$$(z^1, z^2, z^3) = \left(\frac{x^1}{1 + x^3}, \frac{x^2}{1 + x^3}, 0 \right).$$

Ceci définit une application de projection stéréographique $\alpha_1 : S^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\alpha_1(x^1, x^2, x^3) = \frac{(x^1, x^2)}{1 + x^3}.$$

On répète le processus pour définir une projection stéréographique depuis le pôle nord :

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

Les deux cartes ne peuvent faire partie de la même structure différentiable que si $(\beta \circ \alpha^{-1})(x)$ est un difféomorphisme. En effectuant le calcul, on trouve

$$\alpha^{-1}(x) = x, \quad (\beta \circ \alpha^{-1})(x) = \beta(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

La fonction $(\beta \circ \alpha^{-1})(x)$ n'est clairement pas lisse en tout point de la droite réelle, puisque la dérivée

$$\frac{\partial (x^{\frac{1}{3}})}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

explose en $x = 0$. Cela implique que les deux cartes ne sont pas compatibles.

La n -sphère apparaît également beaucoup dans la théorie des surfaces minimales. Si M est une hypersurface minimale fermée de dimension n dans S^{n+1} , alors on a

$$R = n(n-1) - S,$$

où R est la courbure scalaire et S est le carré de la longueur de la seconde forme fondamentale de M . Un théorème de rigidité bien connu de Chern et d'autres stipule que si $S \leq n$, alors soit $S = 0$, soit $S = n$. Cela implique que M est soit la grande sphère, soit le tore de Clifford défini par

$$S^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \times S^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Un problème intéressant dans ce domaine est de savoir s'il pourrait y avoir plusieurs résultats de pincement de la courbure scalaire pour les hypersurfaces minimales fermées dans une sphère unité. Par exemple, il a été prouvé que si la courbure scalaire de M est constante, alors il existe une constante positive $\alpha(n)$ telle que si $n \leq S \leq n + \alpha(n)$, alors $S = n$. Un autre théorème connexe stipule que dans le cas $n \leq 5$, si M est une n -hypersurface minimale fermée dans S^{n+1} , alors il existe une constante positive $\delta(n)$ telle que si $n \leq S \leq n + \delta(n)$, alors $S = n$ identiquement. Soit M une n -hypersurface minimale fermée dans S^{n+1} où $n \geq 6$. Un problème ouvert est de savoir s'il existe une constante positive $\delta(n)$ telle que si $n \leq S \leq n + \delta(n)$, alors $S = n$. Une solution à ce problème a été proposée par Ogiue et Sun pour n arbitraire, mais une faille fatale a été trouvée dans leur preuve¹.

Lorsqu'on cherche à trouver des relations entre la courbure et la topologie, on se concentre généralement sur l'effet de la courbure de Ricci positive ou négative, de la courbure sectionnelle ou de la courbure scalaire. D'autres hypothèses de courbure sont possibles, cependant. On peut supposer une courbure positive sur les 2-plans totalement isotropes. Sous cette hypothèse, et en utilisant la théorie de Sacks-Uhlenbeck des 2-sphères minimales, Micallef et Moore ont montré que si M est une n -variété riemannienne compacte simplement connexe avec $n \geq 4$ et si la courbure sur les 2-plans totalement isotropes est positive, alors M est homéomorphe à une sphère. La courbure d'une variété riemannienne sur les 2-plans totalement isotropes est dite positive si $K(\sigma) > 0$ chaque fois que $\sigma \subseteq T_p M \otimes \mathbb{C}$ est un 2-plan totalement isotrope situé en tout point de la variété². Les homéomorphismes vers une sphère apparaissent également dans l'une des conjectures les plus célèbres

1. Si-Ming Wei and Hong-Wei Xu, *Scalar curvature of minimal hypersurfaces in a sphere*, Math. Res. Lett., 14 (3), 423–432 (2007).

2. Mario Micallef and John Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Annals of Mathematics, 127, 199–227 (1988).

des mathématiques, la conjecture de Poincaré. Cette conjecture stipule que toute 3-variété fermée, lisse et simplement connexe est difféomorphe à S^3 . Il n'est pas nécessaire de spécifier que la variété est homéomorphe à S^3 , car les classifications des 3-variétés topologiques à difféomorphisme près ou à homéomorphisme près sont équivalentes. La conjecture peut s'écrire très simplement sous forme d'équation :

$$\pi_1(M) = 0 \implies M \cong S^3.$$

La conjecture est incroyablement difficile à prouver, et il existe diverses tentatives avortées dans la littérature³. Elle a finalement été prouvée par Perelman en utilisant les techniques et les idées de Hamilton⁴.

Fait intéressant, ce que l'on appelle une surface minimale la plus externe est toujours une sphère, ce qui a pour conséquence que les sphères les plus externes sont parfois appelées sphères minimales. (Les sphères minimales les plus externes pourraient techniquement être de type sphère ou tore, mais un argument de stabilité élimine cette dernière possibilité). Ce qu'on appelle surface minimale la plus externe, c'est simplement une surface minimale qui n'est pas complètement contenue à l'intérieur d'une autre surface minimale. Définissons S comme l'ensemble des surfaces qui sont des bords compacts lisses d'ensembles ouverts U dans M^3 , où U contient tous les points à l'infini $\{\infty_K\}$ qui sont ajoutés pour compactifier chacune des extrémités M_K . Étant donné un $\Sigma \in S$, définissons $\bar{\Sigma} \in S$ comme l'enveloppe minimale d'aire la plus externe de Σ . Dans la littérature de physique mathématique, on définit $\Sigma \in S$ dans une donnée initiale de Cauchy (M^3, g, k) comme un horizon apparent futur si $H_\Sigma + \text{Tr}_\Sigma(k) = 0$ sur Σ .

Si $\Sigma \in S$ a une courbure moyenne nulle (c'est-à-dire si c'est une surface minimale), alors l'inégalité de Penrose n'est satisfaite que lorsque A est l'aire de l'enveloppe minimale d'aire la plus externe de Σ , l'égalité ne se produisant que si $(M^3 - U, g)$ est isométrique à l'espace-temps de Schwarzschild.

La conjecture de Seifert (dont on sait maintenant qu'elle est fausse) stipulait que tout champ de vecteurs continu non singulier sur S^3 avait un point fixe ou une orbite fermée. Un contre-exemple à cette conjecture a été trouvé assez tôt, mais ce n'était pas la fin de l'histoire, car on aimerait améliorer la différentiabilité (la régularité) de ces exemples. Seifert a été conduit à cette conjecture lorsqu'il a montré qu'un champ de vecteurs continu non singulier sur S^3 dont les vecteurs sont proches de vecteurs tangents aux fibres de la fibration de Hopf a une courbe intégrale fermée. Schweitzer a donné un contre-exemple en dimension 3 en exhibant un exemple de champ de vecteurs C^1 apériodique sur S^3 . Krystyna Kuperberg a considérablement amélioré la différentiabilité de cet exemple en trouvant un champ de vecteurs C^∞ non singulier sans orbites circulaires fermées sur S^3 ; ceci a été fait indépendamment de l'exemple de Schweitzer. Le point de départ de la construction de Krystyna Kuperberg est un bouchon de type Wilson, image miroir, qui est modifié par une opération appelée auto-insertion⁵.

3. David Gabai, *Valentin Poenaru's program for the Poincaré conjecture*, in Shing-Tung Yau (ed.) *Geometry, Topology, and Physics for Raoul Bott* (Cambridge, Massachusetts : International Press, 1994).

4. John Morgan and Gang Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture* (Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2007).

5. Krystyna Kuperberg, *A smooth counterexample to the Seifert conjecture*, *Annals of Mathematics*, 2(140), 723-732 (1994).

Inspiré par ce contre-exemple analytique réel, Krystyna Kuperberg a modifié le contre-exemple de Schweitzer et a prouvé que toute 3-variété admet un flot C^1 préservant le volume sans points fixes ni orbites fermées. La construction principale est une version préservant le volume du bouchon de Schweitzer (spécifiquement, un bouchon de type Wilson à torsion de Dehn). Elle a également prouvé que toute 3-variété admet un flot C^∞ préservant le volume sans points fixes ni orbites fermées, ainsi qu'un feuilletage PL transversalement mesuré avec des feuilles fermées discrètes. La preuve du théorème construit un bouchon et l'insère dans le flot, mais il y a des obstructions techniques dues au fait qu'un bouchon préservant le volume ne peut pas boucher un ensemble ouvert. Celles-ci sont surmontées en utilisant des bouchons à torsion de Dehn : ces bouchons peuvent changer la topologie d'une variété lors de l'insertion. Un aspect important d'un flot préservant le volume en dimension 3 sans points fixes est que le feuilletage parallèle 1-dimensionnel est transversalement symplectique. Un tel flot préservant le volume sur une 3-variété peut être compris comme un flot hamiltonien provenant d'une structure symplectique sur $M \times \mathbb{R}$. Cela renvoie à la conjecture de Weinstein. Dans ce cas, le résultat est que le flot sur une variété de contact fermée $(2n + 1)$ -dimensionnelle qui est transversalement symplectique a une orbite fermée si

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = 0.$$

La conjecture de Weinstein a été prouvée vraie pour S^3 , donc le flot préservant le volume dont il est question ici ne peut pas être de contact⁶. Rappelons que dans une terminologie un peu plus ancienne, dire qu'une variété est fermée implique qu'elle est compacte et qu'elle n'a pas de bord, c'est-à-dire que son bord est l'ensemble vide.

Krystyna Kuperberg a collaboré avec son fils Greg Kuperberg et ils ont construit ensemble des contre-exemples généralisés à la conjecture de Weinstein. En utilisant la théorie des bouchons et la construction d'auto-insertion due à Krystyna, ils ont prouvé qu'un feuilletage de toute codimension de toute variété peut toujours être modifié de manière analytique réelle ou linéaire par morceaux afin que tous les ensembles minimaux aient une codimension 1. Un corollaire de ce théorème est que S^3 possède un système dynamique analytique tel que tous les ensembles limites sont 2-dimensionnels. En particulier, il n'a pas de trajectoires circulaires. Les contre-exemples généralisés sont basés sur la construction de bouchons apériodiques. Un bouchon insérable, non tordu, attachable est un feuilletage orienté 1-dimensionnel F d'une variété à bord donnée par le produit cartésien $F \times I$ d'une variété $(n - 1)$ -dimensionnelle et de l'intervalle I . Le feuilletage coïncide avec le feuilletage trivial dans la direction I sur un voisinage du bord de $F \times I$, si une feuille du feuilletage reliant $(p, 0)$ à $(q, 1)$ implique que $p = q$ et s'il y a une feuille non compacte contenant $(p, 0)$. Un résultat important dans la théorie des feuilletages est le théorème de Frobenius global, qui stipule que si D est une distribution involutive sur une variété lisse M , alors la collection de toutes les variétés intégrales maximales connexes de D forme un feuilletage de M .

Une distribution sur M est un choix de sous-espace linéaire k -dimensionnel de l'espace tangent en tout point $p \in M$. Une distribution est dite lisse si l'union de tous ces sous-espaces linéaires forme un sous-fibré lisse

$$D = \prod_{p \in M} D_p \subset TM.$$

6. Greg Kuperberg, *A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture*, Comment. Math. Helvetici, 71, 70–97 (1996).

Le critère de cadre local pour les sous-fibrés fournit immédiatement un critère de régularité pour une distribution. Essentiellement, tout point d'une variété a un voisinage sur lequel il existe des champs de vecteurs tels que l'on puisse former une base pour le sous-espace k -dimensionnel correspondant dans la distribution. Dans ce cas, on peut dire que la distribution est engendrée localement par ces champs de vecteurs. Maintenant, si l'on part d'une distribution, une sous-variété immergée N contenue dans M est appelée une variété intégrale si l'on a

$$T_p N = D_p$$

en tout point p dans N . Comme exemple, si V est un champ de vecteurs lisse ne s'annulant nulle part sur une variété, alors V engendre trivialement une distribution lisse 1-dimensionnelle sur cette variété. L'image de toute courbe intégrale de V est une variété intégrale de D .

Des variétés intégrales peuvent cependant ne pas exister. Prenons D une distribution tangente lisse sur une variété. On dit de D que c'est une distribution involutive si pour toute paire de sections locales lisses de D (essentiellement des champs de vecteurs lisses définis sur l'ouvert approprié), le crochet de Lie est également une section locale de la distribution. D est dite intégrable si chaque point de M est contenu dans une variété intégrale de la distribution. On peut prouver que toute distribution intégrable est involutive. L'involutivité peut également être décrite en termes de formes différentielles : en général, les distributions tangentes peuvent être décrites localement par des 1-formes lisses, ainsi que par des champs de vecteurs. Rappelons que l'algèbre graduée des formes différentielles lisses sur une variété lisse M est définie par

$$\mathcal{A}^*(M) = \mathcal{A}^0(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{A}^n(M),$$

où $\mathcal{A}^k(M)$ est l'espace vectoriel des sections lisses de $\Lambda^k(M)$. $\Lambda^k(M)$ est défini comme

$$\Lambda^k(M) = \prod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

$\Lambda^k V$ est l'espace vectoriel des formes k -linéaires alternées définies comme suit :

$$\Lambda^k V \{ \phi : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R} \}.$$

La notation et la terminologie sont un peu déroutantes : on peut simplement penser à tout cela en termes d'applications.

Rappelons qu'une application ϕ est alternée si

$$\phi(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\phi(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

Cela implique immédiatement qu'une forme multilinéaire alternée évaluée pour un ensemble de vecteurs linéairement dépendants s'annule. Par exemple, dans le cas d'une forme bilinéaire, si l'un des vecteurs est nul, la bilinéarité implique immédiatement que la forme est nulle :

$$\phi(v_1, v_2) = 0.$$

On rappelle qu'en algèbre linéaire, deux vecteurs sont linéairement dépendants s'il existe un scalaire c tel que

$$v_1 = c v_2.$$

La propriété d'alternance implique que

$$\phi(v_1, v_2) = -\phi(v_2, v_1).$$

En substituant :

$$\phi(cv_2, v_2) = -\phi(v_2, cv_2).$$

La bilinéarité implique que

$$c\phi(v_2, v_2) = -c\phi(v_2, v_2).$$

La seule façon pour que cela soit satisfait est que

$$\phi(v_2, v_2) = 0,$$

ce qui établit le résultat. Notons que ce qui précède ne permet pas toujours d'obtenir la nullité car celle-ci dépend du corps de base (si le corps de base est de caractéristique 2, alors on n'obtient pas nécessairement la nullité). Cet argument peut être généralisé à un nombre arbitraire de vecteurs, en utilisant la multilinéarité au lieu de la bilinéarité.

L'involutivité peut être exprimée en disant qu'une distribution lisse est involutive si et seulement si $J(D)$ est un idéal différentiel. $J(D)$ est défini comme

$$J(D) = J^0(D) \oplus \dots \oplus J^n(D) \subset \mathcal{A}^*(M),$$

où $J^p(D) \subset \mathcal{A}^p(M)$ est l'espace des p -formes lisses qui annihilent D . Un résultat central de la théorie des variétés lisses qui découle de tout cela est que toute distribution involutive est complètement intégrable, où une distribution est complètement intégrable s'il existe toujours une carte plate pour la distribution au voisinage de tout point de la variété. C'est ce qu'on appelle le théorème de Frobenius. Le théorème de Frobenius global découle une fois qu'on a prouvé que pour une distribution involutive D et $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une collection de variétés intégrales connexes de la distribution avec un point commun, l'union suivante

$$N = \bigcup_{\alpha} N_\alpha$$

a une structure lisse unique en tant que variété lisse qui en fait une variété intégrale connexe de D dans laquelle chacun des N_α est une sous-variété ouverte⁷.

Pour revenir à notre feuilletage original, la base F est une $(n-1)$ -variété qui admet une immersion dans $\mathbb{R}^{n-1}$, une immersion qui se relève en un plongement dans $\mathbb{R}^n$. Un bouchon est dite apériodique s'il n'a pas de feuilles fermées. L'idée proposée par Schweitzer est d'utiliser des bouchons pour modifier le feuilletage et briser les feuilles circulaires, et il a observé que la base d'un bouchon n'a besoin que d'admettre une immersion, et non un plongement. Le théorème que nous avons énoncé sur un feuilletage en toute codimension implique directement que la 3-sphère admet un système dynamique analytique tel que tous les ensembles limites sont 2-dimensionnels. Le bouchon apériodique C^2 de Schweitzer-Harrison a deux ensembles minimaux 1-dimensionnels. En particulier, on peut prouver qu'un 1-feuilletage d'une variété de dimension au moins 3 peut être modifié dans la catégorie PL de sorte qu'il n'y ait pas de feuilles fermées mais que tous les ensembles minimaux

7. John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (New York : Springer, 2003).

soient 1-dimensionnels. Si la variété est fermée, alors il existe une modification PL apériodique avec un seul ensemble minimal, et cet ensemble minimal est 1-dimensionnel.

Comme nous l'avons dit, le but principal d'un bouchon est de permettre d'effectuer une opération géométrique appelée insertion. L'idée est de partir d'un feuilletage χ d'une n -variété X et d'un bouchon n -dimensionnel P avec une base F . On cherche alors un plongement préservant les feuilles de $F \times I$ trivialement feuilleté dans la variété, et on voit s'il peut être remplacé par le bouchon. Les obstructions techniques impliquées lorsqu'on essaie de faire ceci sont l'insertibilité, l'attachabilité et la torsion. Une application d'insertion pour un bouchon dans un feuilletage est définie comme un plongement

$$\sigma : F \longrightarrow X$$

de la base de P qui est transverse à χ . Cette application d'insertion peut être étendue au produit pour obtenir un plongement

$$\sigma : F \times I \longrightarrow X$$

qui envoie le feuilletage fibre de $F \times I$ vers χ . Un bouchon n -dimensionnel P est dit insérable si F admet un plongement dans $\mathbb{R}^n$ qui est transverse aux droites verticales. Un plongement de ce type est équivalent à une immersion de F dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour être clair, il est équivalent à une immersion qui se relève en un plongement de $F \times I$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme exemple, si F est 2-dimensionnelle, orientable, et avec un bord non vide, alors F doit avoir une immersion.

Un bouchon est dit attachable si chaque feuille dans le bord parallèle est finie. Si M est une variété à bord, prenons N_M un voisinage ouvert du bord de M dans M . L'étape suivante dans l'insertion du bouchon est de retirer $\sigma((F \times I) - N_{F \times I})$ de la variété et de coller la lèvres $\sigma(N_{F \times I})$ au support d'un bouchon attachable via un homéomorphisme préservant les feuilles défini comme

$$\alpha : N_{F \times I} \longrightarrow N_{\text{supp}} P,$$

où $N_{\text{supp}} P$ est un voisinage du bord du support de P . L'identification satisfait également les conditions suivantes

$$\alpha(p, 0) = \alpha_-(p), \quad \alpha(p, 1) = \alpha_+(p).$$

Une application α avec ces propriétés est une application d'attachement pour le bouchon. Nous pouvons laisser G être le bord parallèle pour le support $\mathcal{P}$ du bouchon, de sorte que

$$\partial \mathcal{P} = G \cup F_- \cup F_+.$$

Toutes les feuilles dans ce bord parallèle ont deux extrémités : un lemme montre alors qu'il existe un homéomorphisme préservant les feuilles $N_G \longrightarrow N_F \times I$. L'équivalence assure l'existence d'une application d'attachement pour toute variable liée ou non⁸. À ce stade, vous commencez à voir à quel point la géométrie impliquée est sophistiquée : dans ce cas, le simple fait que quelqu'un ait trouvé un contre-exemple particulier à la conjecture n'était pas du tout la fin de l'histoire.

Outre les travaux sur la conjecture de Seifert, Krystyna Kuperberg a également fait d'autres travaux sur l'application de la topologie à la théorie des systèmes dynamiques. En particulier, avec

8. Greg Kuperberg and Krystyna Kuperberg, *Generalized counterexamples to the Seifert conjecture*, Annals of Mathematics, 143(3), 547–576 (1996).

Reed, elle a étudié les trajectoires de systèmes dynamiques sur $\mathbb{R}^3$. Elle a construit un exemple de système dynamique sans point de repos sur $\mathbb{R}^3$ avec des trajectoires uniformément bornées et sans trajectoires circulaires. La construction était basée sur un exemple de Schweitzer⁹. Krystyna Kuperberg a également résolu un problème lié à la question de savoir si un espace homogène doit être bihomogène. Un contre-exemple à cette conjecture a été trouvé il y a de nombreuses années, mais la question de savoir si elle était vraie pour les espaces continus est restée un problème ouvert pendant un certain temps, jusqu'à ce que Krystyna Kuperberg trouve un contre-exemple dans le cas des espaces continus. Un continuum est un espace topologique, souvent considéré comme un espace métrique compact connexe non vide¹⁰. Des exemples classiques d'espaces continus en topologie sont le cercle de Varsovie et la courbe sinusoïdale.

9. Coke Reed and Krystyna Kuperberg, *A dynamical system on $\mathbb{R}^3$ with uniformly bounded trajectories and no compact trajectories*, Proceedings of the American Mathematical Society, 106(4), 1095–1097 (1989).

10. Krystyna Kuperberg, *A homogeneous nonbihomogeneous continuum*, Topology Proceedings, 13, 399–401 (1988).